Übung 1 1. Das Sensorsignal eines idealen Sensors lässt sich mit $y(t) = S \cdot x(t)$ beschreiben.

a) Was bedeutet S?

• idealer Sensor ⇒ „∞-Schnell"

$x \rightarrow$ Sensor-system $\rightarrow y$

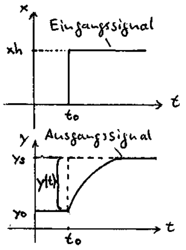
P, T, a, c, St, h U, I, R, f

$\boxed{y = \sum_{i=1}^{n} S_i \cdot x_i} = S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + \dots S_n \cdot x_n$

S ≙ sensitivity ≙ Sensibilität   • realer Sensor ⇒ träge → reagiert zeitverzögert

$S_i = \frac{dy_i}{dx_i}$ (Verstärker ⇒ „V")

Empfindlichkeit, d.h. Eingangssignal produziert sofort korrektes Ausgangssignal mit Zeitverzögerung Null! (techn. nicht machbar)



S ≙ Slope (Steigung) $= \frac{dy}{dx}$; $y(t) = S \cdot x(t)$

$S = \frac{1}{a_0}$ (idealer Sensor)

$a_0 \cdot y = x(t) \Rightarrow y = \frac{1}{a_0} \cdot x(t) \Rightarrow y(t) = S \cdot x(t)$

--- idealer Sensor

— realer Sensor

Beispiel: $S = 0{,}5 \frac{V}{°C} \Rightarrow y(t) = 0{,}5 \frac{V}{°C} \cdot 10°C \Rightarrow \boxed{y(t) = 5V}$

$x(t) = 10°C$

b) Geben Sie eine DGL an, die das Zeitverhalten des Sensors vollständig berücksichtigt!

Reihenansatz

$$\boxed{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + \underbrace{a_0 \cdot y = x(t)}_{\text{idealer Sensor mit } S = \frac{1}{a_0}}}$$ lineare DGL n-ter Ordnung

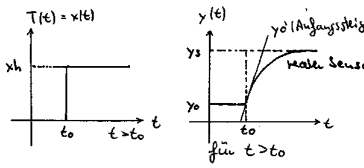
Temperatursensor immer DGL-1-Ordnung
Beschleunigungssensor immer DGL-2-Ordnung

Praxis-Arbeitsgl.: $\boxed{a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x(t)}$

c) Vereinfachen Sie die DGL aus b) und bestimmen Sie die Systemparameter ohne Lösen der DGL!

$\boxed{a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x(t)}$ „Praxis-Arbeits-DGL" für >95% aller Sensoren ⇒ Lösung liefert $y = y(t) = \dots$

lineare DGL-1-Ordnung



Annahme: $x(t) = \text{konst.} = x_h$

Ausgangsgleichung: $a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x(t)$

$\Rightarrow a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x_h$

Lösung der DGL-1-Ordnung: $\boxed{y(t) = y_s \cdot (1 - e^{-t/\tau})}$

• wenn $t \to \infty$ (Idealfall)

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$; $y = y_s$ nach einer bestimmten Zeit ist $y = y_s$; steigt nicht mehr ⇒ Steigung = 0

⇒ einsetzen $a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot y_s = x_h \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{x_h}{y_s}}$

• wenn $t \to 0$ (Realfall)

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = y_0'$; $y = 0$ ⇒ einsetzen $a_1 \cdot y_0' + a_0 \cdot 0 = x_h$

(Anfangssteigung) $\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{x_h}{y_0'}}$

x_h gleichsetzen: $x_h = a_0 \cdot y_s = x_h = a_1 \cdot y_0' \Rightarrow a_0 \cdot y_s = a_1 \cdot y_0'$

$\Rightarrow \boxed{y_s = \frac{a_1}{a_0} \cdot y_0'}$ Sättigungswert

mit $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ $\Rightarrow \boxed{y_s = \tau \cdot y_0'}$; $\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{y_s}{y_0'}}$

d) Lösen Sie die DGL und bestimmen Sie dann die Systemparameter!

$a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x_h$ Vorweg: $y(t) = y_s \cdot (1 - e^{-t/\tau})$ zusätzliche Erkenntnis ...?

$\Rightarrow y(t \to \infty) = y_s \cdot (1 - e^{\infty}) = \underline{y_s}$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y_0' = \frac{y_s}{\tau} \Rightarrow \underline{y_s = \tau \cdot y_0'}$

$y(t = \tau) = y_s \cdot (1 - e^{-1}) = \underline{0{,}63 \cdot y_s}$ (Sättigungswert bis zu 63% erreicht)

Seperationsansatz: $\boxed{\frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = dt}$

$a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x_h \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x_h - a_0 \cdot y}{a_1} \Leftrightarrow dt = \frac{a_1}{x_h - a_0 \cdot y} \cdot dy \quad |\cdot(-a_0)$

$\Leftrightarrow -\int \frac{a_1 \cdot a_0}{x_h - a_0 \cdot y} \cdot dy = -a_0 \int 1 \cdot dt \Leftrightarrow a_1 \cdot \ln(x_h - a_0 \cdot y) + \gamma_1 = -a_0 \cdot t + \gamma_2$ mit $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma^*$

$\Leftrightarrow \ln(x_h - a_0 \cdot y) = -\frac{a_0}{a_1} \cdot t + \gamma^* \Leftrightarrow x_h - a_0 \cdot y = e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot \underbrace{e^{\gamma^*}}_{A} = A \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t}$

$\Leftrightarrow x_h = A \cdot e^0 = \underline{A}$ mit Anfangsbedingungen $t \to 0 \Rightarrow y = 0$

auf y freistellen: $x_h - a_0 \cdot y = x_h \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \Leftrightarrow a_0 \cdot y = x_h - x_h \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t}$

$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = \frac{x_h}{a_0} \cdot (1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t})} \Rightarrow \boxed{y(t) = y_s \cdot (1 - e^{-t/\tau})}$!!

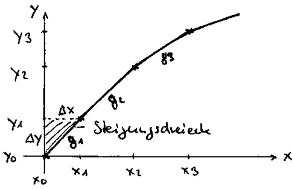
$\Uparrow$ $\boxed{y_s = \frac{x_h}{a_0}}$

$y(t \to \infty) = \frac{x_h}{a_0} = \underline{y_s}$

$y(t \to 0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = y_0' = \frac{x_h}{a_1}$

$\boxed{\tau = \frac{a_1}{a_0}}$

2. Zeigen Sie, wie Sensorkennlinien abschnittsweise linearisiert werden können!



$\boxed{y_n = a_n \cdot x + b_n}$

g_1: $(y_0|x_0)$; $(y_1|x_1)$ ⇒ ges: a_1, b_1

g_2: $(y_1|x_1)$; $(y_2|x_2)$ ⇒ ges: a_2, b_2

g_3: $(y_2|x_2)$; $(y_3|x_3)$ ⇒ ges: a_3, b_3

$\Rightarrow g_1$: I. $y_0 = a_1 \cdot x_0 + b_1$ ⇒ II−I: ⇒ $y_1 - y_0 = a_1 \cdot (x_1 - x_0) + (b_1 - b_1)$

II. $y_1 = a_1 \cdot x_1 + b_1$ Steigungsdreieck ⇒ $\boxed{a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

allgemein ⇒ $\boxed{a_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}}$

a_1 in II: $y_1 - a_1 \cdot x_1 = \boxed{b_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x_1}$

allgemein ⇒ $\boxed{b_n = y_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \cdot x_n} \Rightarrow \boxed{b_n = y_n - a_n \cdot x_n}$

Beispiel: ⇒ 4-5 Geraden für eine Kennlinie!

$y_0 = 0$; $x_0 = 0$
$y_1 = 3$; $x_1 = 4$
$y_2 = 5$; $x_2 = 9$
$y_3 = 6$; $x_3 = 13$
$y_4 = 7$; $x_4 = 18$

$a_1 = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$; $b_1 = 3 - \frac{3}{4} \cdot 4 = 0 \Rightarrow g_1$: $\boxed{y_1 = \frac{3}{4}x}$

$a_2 = \frac{5-3}{9-4} = \frac{2}{5}$; $b_2 = 5 - \frac{2}{5} \cdot 9 = \frac{7}{5} \Rightarrow g_2$: $\boxed{y_2 = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}}$

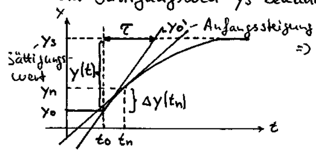
$a_3 = \frac{6-5}{13-9} = \frac{1}{4}$; $b_3 = 6 - \frac{1}{4} \cdot 13 = \frac{11}{4} \Rightarrow g_3$: $\boxed{y_3 = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}}$

$a_4 = \frac{7-6}{18-13} = \frac{1}{5}$; $b_4 = 7 - \frac{1}{5} \cdot 18 = \frac{17}{5} \Rightarrow g_4$: $\boxed{y_4 = \frac{1}{5}x + \frac{17}{5}}$

Übung 2 Das Sensorsignal eines realen Sensors lässt sich mit der linearen DGL-1-Ordnung beschreiben: $\boxed{a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x(t)}$

I. Für $x(t) = x_h$ = konst. wurde in Übung 1 folgende Lösung erarbeitet: ⇒ $\boxed{y(t) = y_s \cdot (1 - e^{-t/\tau_s})}$

a) Geben Sie einen Weg an, um τ experimentell zu bestimmen! Dabei soll der Sättigungswert y_s bekannt sein.



$\Rightarrow \boxed{y_{ges} = y(t) + y_0}$

$\Rightarrow \boxed{y_s - y_0 = \Delta y_s} \Rightarrow y(t)$

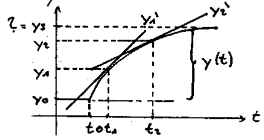
$\Rightarrow \boxed{t = \tau} \Rightarrow y(\tau) = 0{,}63 \cdot y_s \Rightarrow \boxed{\tau_{63} = \frac{y_s}{y_0'} = \frac{a_1}{a_0}}$

oder: $\frac{y(t)}{y_s} = 1 - e^{-t/\tau} \Leftrightarrow 1 - \frac{y(t)}{y_s} = e^{-t/\tau} \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right) = \frac{-t}{\tau}$

$\Rightarrow \boxed{\tau_{63} = \frac{-t}{\ln\left(1 - \frac{\Delta y(t_n)}{\Delta y_s}\right)}}$ jeder beliebige τ-Wert! ⇒ Störungsanfälliger!

b) s.o. ⇒ y_s nicht bekannt

⇒ 2x Steigung messen! ⇒ $y(t) = y_s \cdot (1 - e^{-t/\tau})$



$\Rightarrow \boxed{y'(t) = \frac{y_s}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}}$

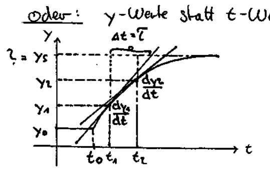
$\Rightarrow y_1' = \frac{y_s}{\tau} \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}} \wedge y_2' = \frac{y_s}{\tau} \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau}}$

$\Rightarrow \frac{y_s}{\tau} = \frac{y_1'}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}$ einsetzen in y_2': $y_2' = \frac{y_1'}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau}}$

$\Leftrightarrow \frac{y_1'}{y_2'} = e^{-\frac{t_1}{\tau}} \cdot e^{\frac{t_2}{\tau}} = e^{\frac{1}{\tau} \cdot (t_2 - t_1)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y_1'}{y_2'}\right) = \frac{1}{\tau}(t_2 - t_1)$

$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{y_1'}{y_2'}\right)}}$

oder: y-Werte statt t-Werte



$y_s = \tau \cdot \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} \Rightarrow \boxed{y_s = \tau \cdot y_0'}$ Spezieller Fall vgl. Übung 1

⇒ allgemein ⇒ $\boxed{y_s = y_n = \tau \cdot \frac{dy_n}{dt}}$

$\Rightarrow \frac{dy_1}{dt} = \frac{y_S - y_1}{\tau} \wedge \frac{dy_2}{dt} = \frac{y_S - y_2}{\tau}$

auf ys freistellen: $y_S = y_1 + \tau\cdot\frac{dy_1}{dt_1} \wedge y_S = y_2 + \tau\cdot\frac{dy_2}{dt_2}$

ys gleichsetzen: $\tau\cdot\left(\frac{dy_1}{dt_1} - \frac{dy_2}{dt_2}\right) = y_2 - y_1 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{y_2 - y_1}{\frac{dy_1}{dt_1} - \frac{dy_2}{dt_2}}}$

II. Für einen exponentiellen Verlauf der Eingangsgröße gilt $\boxed{x(t) = x_m\cdot(1-e^{-t/\tau})}$. Daraus ergibt sich für die Sensor-DGL folgende Darstellung:

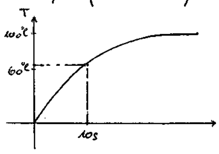
$$\Rightarrow a_1\cdot\frac{dy}{dt} + a_0\cdot y = x_m\cdot\left(1-e^{-t/\tau_x}\right)$$

Geben Sie nun eine nicht lineare Wärmequelle (z.B. der Ofen im Praktikumsversuch Temperatursensoren) der durch einen rechteckigen Leistungssprung P aufgeheizt wird. Sie haben die Aufgabe die Zeitkonstante des Ofens τ_{Ofen} mit Hilfe eines Temperatursensors τ_S zu bestimmen. Gehen Sie davon aus, dass der verwendete Sensor eine Zeitkonstante besitzt, die vergleichbar zur Ofenzeitkonstante ist, z.B.: $\frac{1}{2} < \tau_O/\tau_S < 1$

⇒ Berechnen Sie die exakte Bestimmung der Ofenzeitkonstante τ_{Ofen}!

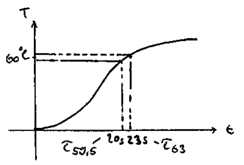
$y(t) = y_S\cdot f(\tau_x, \tau_{Ofen})$ $\quad \tau_x \to 0 \Rightarrow$ z.B. $\boxed{\tau_S = 10s \wedge \tau_{Ofen} = 10s}$

$y(t) = y_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)$ $\quad \Rightarrow \tau_{63} \neq \tau_{Ofen} + \tau_S \Rightarrow \tau_{Ofen} + \tau_S = 20s = \boxed{\tau_{59,5}}$



$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_S\cdot\frac{1}{\tau_x - \underbrace{\tau_S}_{bekannt}}\cdot\left(\overset{gesucht}{\tau_x}\left(1-e^{-t/\tau_x}\right) - \tau_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)\right)}$$

$y(t) = y_S\cdot f(\tau_x, \tau_S)$



Untersuche y(t) an $\boxed{t = \tau_x + \tau_S}$

$$\Rightarrow y(\tau_x+\tau_S) = y_S\cdot\left(\frac{\tau_x}{\tau_x-\tau_S}\cdot\left(1-e^{-\frac{\tau_x+\tau_S}{\tau_x}}\right) - \frac{\tau_S}{\tau_x-\tau_S}\cdot\left(1-e^{-\frac{\tau_x+\tau_S}{\tau_S}}\right)\right)$$

Betrachte das Verhältnis $\boxed{n = \frac{\tau_x}{\tau_S}} \Rightarrow \tau_x = n\cdot\tau_S \quad |+\tau_S$

$\Leftrightarrow \tau_x + \tau_S = (n+1)\cdot\tau_S$

$$\Rightarrow y(\tau_x+\tau_S) = y((n+1)\cdot\tau_S)$$

$$= y_S\cdot\left(\frac{n\cdot\cancel{\tau_S}}{(n-1)\cancel{\tau_S}}\cdot\left(1-e^{-\frac{n+1}{n}\frac{\cancel{\tau_S}}{\cancel{\tau_S}}}\right) - \frac{\cancel{\tau_S}}{(n-1)\cancel{\tau_S}}\cdot\left(1-e^{-\frac{(n+1)\cancel{\tau_S}}{\cancel{\tau_S}}}\right)\right)$$

$$= y_S\cdot\left(\frac{n}{n-1}\cdot\left(1-e^{-\frac{n+1}{n}}\right) - \frac{1}{n-1}\cdot\left(1-e^{-(n+1)}\right)\right) \quad |:\frac{n}{n}$$

$$\Leftrightarrow y(\tau_x+\tau_S) = y_S\cdot\left(\frac{1}{1-1/n}\cdot\left(1-e^{-(1+1/n)}\right) + \frac{1}{1-n}\left(1-e^{-(1+n)}\right)\right)$$

$\Leftrightarrow \boxed{y(\tau_x+\tau_S) = y_S\cdot f(n)}$ oder $\boxed{y(\tau_x+\tau_S) = y_S\cdot\lambda_n}$

Für $\tau_x = 0$, d.h. einem Rechteckeingangssignal ergibt sich aus der obigen Gleichung y(t) natürlich die Ihnen bereits aus Übung 1 bekannte Lösung $y(t) = y_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)$:

a) Zeigen Sie, dass für $\tau_x = 0$, sich aus der obigen Gleichung y(t) die Ihnen bekannte Lösung $y(t) = y_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)$ ergibt, die sich auch als Lösungsfunktion aus der DGL: $a_0\cdot y + a_1\cdot\frac{dy}{dt} = x_m$ ergeben würde.

Laplace-Transformation: $y(t) = y_S\cdot\frac{1}{\tau_x-\tau_S}\left[\tau_x\cdot\left(1-e^{-t/\tau_x}\right) - \tau_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)\right]$

$y(t) = y_S\cdot f(\tau_x, \tau_S)$

Beweis: $\tau_x \to 0$ $\quad y(t) = y_S\cdot\frac{1}{0-\tau_S}\cdot\left[0\cdot\left(1-e^{-t/0}\right) - \tau_S\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)\right]$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)}$$

weiterer Beweis: $\frac{dy}{dt} = \frac{y_S}{\tau_S}\cdot e^{-t/\tau_S}$ (Ableitung)

DGL: $a_1\cdot\frac{dy}{dt} + a_0\cdot y = x_m\cdot\left(1-e^{-t/\tau_x}\right) \quad |-a_0\cdot y \;\; :a_1$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x_m}{a_1}\cdot\left(1-e^{-t/\tau_x}\right) - \frac{a_0}{a_1}y$

dy/dt ∧ y einsetzen: $\frac{y_S}{\tau_S}\cdot e^{-t/\tau_S} = \frac{x_m}{a_1}\cdot\left(1-e^{-t/\tau_x}\right) - \frac{a_0}{a_1}\cdot y_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)$

mit $\tau_S = \frac{a_1}{a_0} \wedge a_0 = \frac{x_m}{y_S} \Rightarrow y_S = \frac{x_m}{a_0} = \frac{x_m}{a_1}\cdot\tau_S$ und $\tau_x = 0$

$\tau_x \to 0$ $\quad \frac{y_S}{\tau_S}\cdot e^{-t/\tau_S} = \frac{x_m}{a_1} - \frac{a_0}{a_1}\cdot y_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)$

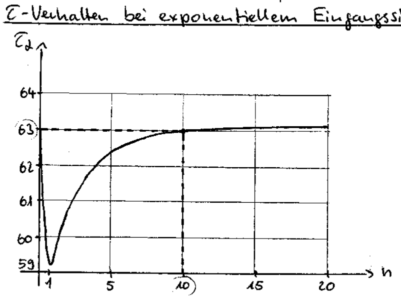
$\Rightarrow \frac{y_S}{\tau_S}\cdot e^{-t/\tau_S} = \frac{y_S}{\tau_S} - \frac{1}{\tau_S}\cdot y_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{y_S}{\tau_S}\cdot e^{-t/\tau_S} = \frac{y_S}{\tau_S}\cdot e^{-t/\tau_S}}$ Beweis somit erfüllt, da rechte und linke Seite gleich sind.

b) Für $\tau_x \neq 0$ wird ganz allgemein an der Stelle $y(t = \tau_{Sensor} + \tau_{Ofen}) = \lambda\cdot y_S$ gelten. Falls Sie λ bestimmen, können Sie an der Stelle τ_λ ablesen und mit $\tau_\lambda = \tau_{Sensor} + \tau_{Ofen}$ den gesuchten Wert τ_{Ofen} bestimmen! Leiten Sie den folgenden Ausdruck für λ her!

$$\Rightarrow \lambda(n) = \frac{1}{1-1/n}\cdot\left(1-e^{-(1+1/n)}\right) + \frac{1}{1-n}\cdot\left(1-e^{-(1+n)}\right)$$

τ-Verhalten bei exponentiellem Eingangssignal:



Plot der λ-Werte über das Verhältnis $n = \frac{\tau_x}{\tau_S}$

$\tau_\lambda = \tau_x + \tau_S$
$= \lambda\cdot y_S$

$$\Rightarrow y(t) = y_S\cdot\frac{1}{\tau_x-\tau_S}\cdot\left[\underbrace{\tau_x\cdot\left(1-e^{-t/\tau_x}\right)}_{Ofen} - \underbrace{\tau_S\cdot\left(1-e^{-t/\tau_S}\right)}_{Sensor}\right]$$

mit $\tau_x + \tau_S = t$

$$y(t = \tau_x+\tau_S) = y_S\cdot\frac{1}{\tau_x-\tau_S}\left[\tau_x\cdot\left(1-e^{-\left(\frac{\tau_x+\tau_S}{\tau_x}\right)}\right) - \tau_S\cdot\left(1-e^{-\left(\frac{\tau_x+\tau_S}{\tau_S}\right)}\right)\right]$$

Substitution mit $\tau_x = n\cdot\tau_S$

$$\Rightarrow y(t) = y_S\cdot\frac{1}{n\cdot\tau_S-\tau_S}\cdot\left[n\cdot\tau_S\left(1-e^{-\left(\frac{n\cdot\tau_S+\tau_S}{n\cdot\tau_S}\right)}\right) - \tau_S\left(1-e^{-\left(\frac{n\cdot\tau_S+\tau_S}{\tau_S}\right)}\right)\right]$$

$$= y_S\cdot\frac{1}{\cancel{\tau_S}}\cdot\frac{1}{n-1}\left[n\cdot\cancel{\tau_S}\cdot\left(1-e^{-\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{\cancel{\tau_S}}{\cancel{\tau_S}}}\right) - \cancel{\tau_S}\cdot\left(1-e^{-(n+1)\cdot\frac{\cancel{\tau_S}}{\cancel{\tau_S}}}\right)\right]$$

$$= y_S\cdot\left[\frac{n}{n-1}\cdot\left(1-e^{-(1+1/n)}\right) - \frac{1}{n-1}\cdot\left(1-e^{-(n+1)}\right)\right] \quad |:\frac{n}{n}$$

$$= y_S\cdot\left[\frac{1}{1-1/n}\cdot\left(1-e^{-(1+1/n)}\right) + \frac{1}{1-n}\cdot\left(1-e^{-(1+n)}\right)\right]$$

$y(t) = y_S\cdot\lambda_n$

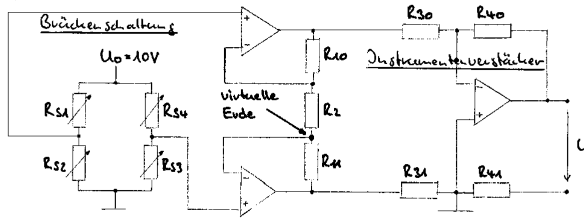
$$\Rightarrow \boxed{\lambda(n) = \frac{1}{1-1/n}\cdot\left(1-e^{-(1+1/n)}\right) + \frac{1}{1-n}\cdot\left(1-e^{-(1+n)}\right)}$$

$$\lambda(n=10) = \frac{1}{1-\frac{1}{10}}\cdot\left(1-e^{-(1+1/10)}\right) + \frac{1}{1-10}\cdot\left(1-e^{-(1+10)}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\lambda(n=10) = 0{,}63 \approx 63\%\text{ des Sättigungsgrades}}$

Übung 3 Gegeben sei folgende Sensorschaltung:

mit $R_{10} = 10k\Omega$; $R_2 = 2k\Omega$; $R_{11} = 10k\Omega$; $R_{30} = 5k\Omega$; $R_{31} = 5k\Omega$; $R_{40} = 10k\Omega$; $R_{41} = 10k\Omega$

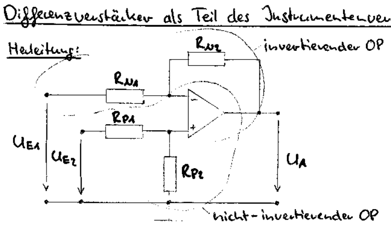


Die 4 resistiven Sensoren RS1 bis RS4 sind in der Brückenschaltung platziert. Die maximale Änderung der Widerstandswerte beträgt $\frac{\Delta R_S}{R_0} = \pm 4\%$

Berechnen Sie die minimale und maximale Ausgangsspannung U_A!

⇒ Differenzverstärker als Teil des Instrumentenverstärkers:

a) Herleitung:



$U_A = ?$

Ansatz: „zeitgleiche Überlagerung" (Superposition) der invertierenden und nicht-invertierenden Verstärkerschaltung

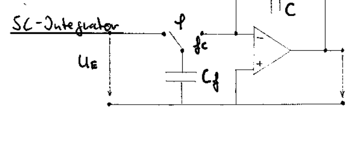
$$\Rightarrow \boxed{U_A = \underbrace{\left(\frac{R_{N1}+R_{N2}}{R_{N1}}\right)}_{\left(1+\frac{R_{N2}}{R_{N1}}\right)}\cdot\underbrace{\left(\frac{R_{P2}}{R_{P1}+R_{P2}}\right)\cdot U_{E2}}_{U_E^+} - \frac{R_{N2}}{R_{N1}}\cdot U_{E1}}$$

Wähle z.B.: $R_{N1} = R_{P1} \wedge R_{N2} = R_{P2}$

$$\Rightarrow U_A = \frac{\cancel{R_{P1}+R_{P2}}}{R_{P1}}\cdot\frac{R_{P2}}{\cancel{R_{P1}+R_{P2}}}\cdot U_{E2} - \frac{R_{P2}}{R_{P1}}\cdot U_{E1}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_A = \frac{R_{P2}}{R_{P1}}\cdot\left(U_{E2}-U_{E1}\right)}$$

b) alternative Rechnung "umständlich", die so nicht in der Klausur gerechnet werden muss



$$U_A(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^t U_E\,dt \quad \Rightarrow \quad 1.\ \tau = R_{äq}\cdot C = \frac{1}{f_C \cdot C_f}\cdot C$$

2. Dies ist eine zeitdiskrete Schaltung. Die Abtastpunkte liegen am Ende der Taktphasen φ vor, d.h. wenn die Kondensatoren aufgeladen sind.

U_E^+ ist durch den Spannungsteiler aus $R_{P1} \wedge R_{P2}$ bestimmt

$$\Rightarrow U_E^+ = \frac{R_{P2}}{R_{P1}+R_{P2}}\cdot U_2 \quad \text{und} \quad U_E^- = U_1 - R_{U1}$$

$$\Rightarrow U_E^- = U_1 - \frac{R_{U1}}{R_{U1}+R_{U2}}\cdot(U_1 - U_A)$$

idealer OPV: $U_E^+ \approx U_E^-$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{R_{P2}}{R_{P1}+R_{P2}}}_{\alpha}\cdot U_2 = U_1 - \underbrace{\frac{R_{U1}}{R_{U1}+R_{U2}}}_{\beta}\cdot(U_1 - U_A)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot U_2 = U_1 - \beta\cdot U_1 + \beta\cdot U_A = U_1\cdot(1-\beta) + \beta\cdot U_A$$

$$\Leftrightarrow \beta\cdot U_A = \alpha\cdot U_2 - (1-\beta)\cdot U_1$$

$$\Leftrightarrow U_A = \frac{\alpha}{\beta}\cdot U_2 - \underbrace{\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\cdot U_1}_{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\cdot U_1}$$

$$\Leftrightarrow U_A = \frac{R_{P2}}{R_{P1}+R_{P2}}\cdot\frac{R_{U1}+R_{U2}}{R_{U1}}\cdot U_2 - \underbrace{\left(\frac{R_{U1}+R_{U2}}{R_{U1}} - 1\right)\cdot U_1}_{\left(1+\frac{R_{U2}}{R_{U1}}-1\right)\cdot U_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_A = \frac{R_{P2}}{R_{P1}+R_{P2}}\cdot\frac{R_{U1}+R_{U2}}{R_{U1}}\cdot U_2 - \frac{R_{U2}}{R_{U1}}\cdot U_1}$$

$\Rightarrow$ gleiches Ergebnis wie bei dem Ansatz der linearen Überlagerung (Superposition)

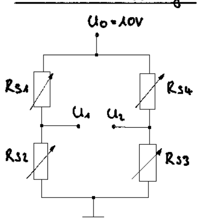
Wähle z.B.: $R_{U2} = n\cdot R_{U1} \wedge R_{P2} = n\cdot R_{P1}$

$$\Rightarrow U_A = \frac{n\cdot R_{P1}}{R_{P1}+n\cdot R_{P1}}\cdot\frac{R_{U1}+n\cdot R_{U1}}{R_{U1}}\cdot U_2 - \frac{n\cdot \cancel{R_{U1}}}{\cancel{R_{U1}}}\cdot U_1$$

$$\Leftrightarrow U_A = \frac{n}{\cancel{1+n}}\cdot\frac{\cancel{1+n}}{1}\cdot U_2 - n\cdot U_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U_A = n\cdot(U_2 - U_1)}$$

Brückenschaltung:



$R_{S1} = R_0 + 4\% = 1{,}04\cdot R_0$

$R_{S2} = R_0 - 4\% = 0{,}96\cdot R_0$

$R_{S3} = R_0 + 4\% = 1{,}04\cdot R_0$

$R_{S4} = R_0 - 4\% = 0{,}96\cdot R_0$

$$U_1 = \frac{R_{S2}}{R_{S2}+R_{S1}}\cdot U_0 = \frac{0{,}96}{1{,}04+0{,}96}\cdot U_0 \Rightarrow U_1 = 0{,}48\cdot U_0 = 4{,}8V$$

$$U_2 = \frac{R_{S3}}{R_{S3}+R_{S4}}\cdot U_0 = \frac{1{,}04}{1{,}04+0{,}96}\cdot U_0 \Rightarrow U_2 = 0{,}52\cdot U_0 = 5{,}2V$$

$$U_{B_{max}} = U_2 - U_1 = (0{,}52 - 0{,}48)\cdot U_0 \Rightarrow U_2 - U_1 = 0{,}04\cdot U_0 = 0{,}4V$$

$$U_A = \frac{R_4}{R_3}\cdot\left(1 + 2\cdot\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot(U_2 - U_1) = \frac{10k\Omega}{5k\Omega}\cdot\left(1 + 2\cdot\frac{10k\Omega}{2k\Omega}\right)\cdot 0{,}4V$$

$$\Rightarrow \boxed{U_A = 8{,}8V}$$

Übung 4 Temperatursensoren

Aufgabe 1: Erläutern Sie den Unterschied zwischen einem Thermistor und einem Thermoresistor!

Ein Thermistor (von engl. thermal resistor) ist ein elektrischer Widerstand, der seinen spezifischen Widerstand unter dem Einfluss der Temperatur ändert. Man unterscheidet dabei zwischen Heißleiter (NTC Thermistor) und Kaltleiter (PTC Thermistor). Mit steigender Temperatur sinkt der Widerstand eines Heißleiters, während der Widerstand eines Kaltleiters steigt.

$\Rightarrow$ Thermoresistor: Halbleiter ; Thermistor: Metall

Aufgabe 2: Wie lauten die drei Kennliniendarstellungen für Temperatursensoren? Geben Sie die Namen und den jeweiligen analytischen Ausdruck an!

Analytische Darstellungsformen von T-Sensor-Kennlinien:

1. $\boxed{R(T) = R_{T0}\cdot\left\{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n (T-T_0)^n\right\}}$ $\Rightarrow$ entsprechend DIN 43760

polynome Darstellung

Bsp.: Pt-Widerstand $R(T) = R(0°C)$

$$\{1 + \underset{a_1}{\alpha T} + \underset{a_2}{\beta T^2} + \underset{a_3}{\gamma T^3} + \dots + a_n T^n\} \quad ; \quad \alpha_1 = \alpha = 4\cdot 10^{-3}\frac{1}{K}$$

$\Rightarrow$ für Platin und weitere Metalle

2. $\boxed{R(T) = R_{T0}\cdot e^{b(T)\cdot(T-T_0)}}$ mit $b(T) = b_0 + \sum_{m=1}^{M} b_m (T-T_0)^m$

exponentielle Darstellung

Bsp.: PTC-Sensor

3. $\boxed{R(T) = R_{T0}\cdot e^{B(T)\cdot(1/T - 1/T_0)}}$ Bsp.: NTC-Sensor

reziproke-exponentielle Darstellung

der Temperaturkoeffizient α_T:

$dR = \alpha_T\cdot R_T\cdot dT \qquad dR \sim dT$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_T = \frac{1}{R_T}\cdot\frac{dR}{dT}} \quad \text{mit} \quad \frac{dR}{dT} = \delta = \alpha_T\cdot R_T$$

Bsp.: $R(T) = R_{T0}\cdot(1 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3 + \dots)$

$R(T) = R_0\cdot(1 + \alpha T) = R_0 + \alpha\cdot R_0\cdot T$

$\alpha_T = \frac{1}{R_T}\cdot\frac{dR}{dT} \stackrel{!}{=} \alpha$ nur in diesem Bsp. gilt $\alpha = \alpha_T$

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 3{,}908\cdot 10^{-3}\frac{1}{K}\\ \beta &= -0{,}58\cdot 10^{-6}\frac{1}{K^2}\\ \gamma &= 0 \quad \text{für } T > 0°C\end{aligned}\right\}\text{Platin}$$

allg.: $\alpha_T = \frac{1}{R_T}\cdot\frac{dR}{dT}$

$\frac{dR}{dT} = R_{T0}\cdot(\alpha + 2\beta T + 3\gamma T^2)$

$\alpha_T = \alpha + 2\beta T + 3\gamma T^2$

Aufgabe 3: a) Erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Formelzeichen im Ohmschen Gesetz in der Darstellung $\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{E}$!

$\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}}_{el}\cdot\underline{E}$

$[j] = \frac{I}{A}$

$\underline{j}$: Stromdichtevektor $\left[\frac{A}{m^2} \text{ oder } \frac{A}{cm^2}\right]$

$\underline{\underline{\sigma}}_{el}$: Leitfähigkeits-Tensor $[1/\Omega cm]$

$\underline{E}$: elektrischer Feldstärkevektor $[V/m]$

$$\begin{pmatrix} j_x\\ j_y\\ j_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{pmatrix}$$

b) Erläutern Sie für die Materialien Metalle und HL, wie und welche Größen von der Temperatur abhängen!

Metalle: $\boxed{\sigma_{ij} = e\cdot\mu\cdot n}$

e: Elementarladung $[e = As]$ $e = 1{,}6022\cdot 10^{-19}C$

μ: Beweglichkeit (Permiabilität) $[Vs/Am]$

n: Ladungsträgerdichte $[A/V^2s^2]$

Temp.-Sensor: $\mu = \mu(T)$; $n = n(T) = const.$ für Metalle

HL: $\boxed{\sigma_{ij} = e\cdot\{\mu_n\cdot n_n + \mu_p\cdot n_p\}}$

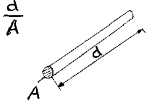
c) Zeigen Sie, wie aus $j = \sigma\cdot E$ die Darstellung $U = R\cdot I$ hergeleitet wird!

1D-Fall: $j_x = \sigma_{el}\cdot E_x$ mit $E_x = \frac{U}{d} \wedge j_x = \frac{I}{A}$

$$\Rightarrow \frac{I}{A} = \sigma_{el}\cdot\frac{U}{d} \Leftrightarrow U = \underbrace{\frac{1}{\sigma_{el}}\cdot\frac{d}{A}}_{R}\cdot I$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U = R\cdot I} \quad \Rightarrow R = \frac{1}{\sigma_{el}}\cdot\frac{d}{A}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \int\frac{d}{A}}$$



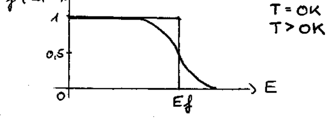
$R \sim d \wedge R \sim \frac{1}{A}$

$\Rightarrow R \sim \frac{d}{A}$

Aufgabe 4: a) Wie lautet die Fermifunktion $f(E,T)$?

$$\boxed{f(E,T) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_f}{k_B\cdot T}}}}$$

b) Zeichnen Sie die Fermifunktion für $T = 0K \wedge T > 0K$!



c) Was besagt die Fermifunktion $f(E,T)$ für Energiezustände E die 1. kleiner und 2. größer als E_f sind bei $T = 0K$ und bei $T > 0K$?

$$T=0K \begin{cases} E < E_F \Rightarrow \text{Besetzungswahrscheinlichkeit} = 1\\ E > E_F \Rightarrow \text{Besetzungswahrscheinlichkeit} = 0\end{cases}$$

$$T>0K \begin{cases} E \ll E_F \Rightarrow f(E,T) = 1\\ E \gg E_F \Rightarrow f(E,T) = 0\\ E = E_F \Rightarrow f(E,T) = 0{,}5\end{cases}$$

d) Warum liegt $T = 0K$ bei einem dotierten n-HL ($N_0 = 10^{15}cm^{-2}$) das Ferminiveau zwischen Leitungsband E_C und Donatorband E_D und nicht bei $E = E_g/2$? Wo etwa liegt auf der Energieachse das Ferminiveau bei Raumtemperatur?

Anwendung der Schrödinger-Gleichung 1926:

$$\boxed{\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial}{\partial r^2}+V(r,t)\right)}\Psi(r,t) = i\cdot\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\cdot\Psi(r,t)}$$

$\hat{H}\cdot\Psi = i\cdot\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\cdot\Psi$ stationäre Gl. $\hat{H}\cdot\Psi = E\cdot\Psi$

$\Rightarrow$ E_F für Metalle: $\boxed{E_F = \frac{h^2}{2m}\left(3\pi^2\cdot\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}} \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$

E_F für HL: $\boxed{E_F = \frac{E_C-E_V}{2}+\frac{k_B}{2}\cdot T\cdot\ln\left(\frac{N_{eff}^V}{N_{eff}^C}\right)}$

$\Rightarrow$ für $T = 0K$ $\boxed{E_F = \frac{E_C-E_V}{2}}$

Aufgabe 5: Bei NTC-Thermistoren ist der Zusammenhang zwischen Widerstand ϱ und der Temperatur T gegeben durch: $\varrho(T) = A\cdot e^{(B/T)}$
Zeigen Sie, dass daraus die Beziehung: $R(T) = R_N\cdot e^{B\cdot(1/T-1/T_N)}$ folgt!

$R(T) = R(T\to\infty)\,e^{B/T}$

$R(T_N) = R(T\to\infty)\,e^{B/T_N}$ T_N: 20°C - 25°C Nenntemperatur

$\Rightarrow \frac{R(T)}{R(T_N)} = \frac{e^{B/T}}{e^{B/T_N}} \Rightarrow \boxed{R(T) = R(T_N)\cdot e^{B\cdot(1/T-1/T_N)}}$ Arbeitskennlinie (T in K)!

Aufgabe 6: Ein NTC-Perlenthermistor hat einen Nennwiderstand $R_N = 500k\Omega$ bei $T_N = 20°C$. Sein B-Wert beträgt 4200K. Berechnen Sie den Widerstand des Thermistors bei $T = 300°C$!

$R(T=(300+273)K) = 500\cdot10^3\Omega\cdot e^{4200K\cdot\left(\frac{1}{573}-\frac{1}{293}\right)\frac{1}{K}}$

$\boxed{R(T=573K) = 454{,}1\Omega}$

Aufgabe 7: Ein NTC-Thermistor hat einen Nennwiderstand $R_N = 170k\Omega$ bei $T_N = 25°C$. Sein B-Wert beträgt 4500K.

a) Berechnen Sie den Widerstand des Thermistors bei $T = 100°C$!

$R(T=373K) = 170\cdot10^3\Omega\cdot e^{4500K\cdot(1/373-1/298)\frac{1}{K}}$

$\boxed{R(T=373K) = 8161{,}8\Omega}$

b) Berechnen Sie $\alpha(T)$ für $T = 25°C, 100°C, 200°C$ und $300°C$

$\boxed{\alpha_T = \frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\alpha_{25°C} = -0{,}05K^{-1} \mathrel{\widehat{=}} -5\%/K\\ \alpha_{100°C} = -3{,}23\%/K\\ \alpha_{200°C} = -2{,}01\%/K\\ \alpha_{300°C} = -1{,}37\%/K\end{array}}$

Aufgabe 8: Ein NTC-Thermistor mit $B = 4000K$ hat bei 70°C einen Widerstand $R(T=70°C) = 100\Omega$. Wie groß ist R_N bei $T_N = 20°C$?

$R(T) = R_N\cdot e^{B(1/T-1/T_N)}$

$\Leftrightarrow R_N = R(T)\cdot e^{-B(1/T-1/T_N)} = 100\Omega\cdot e^{-4000K\cdot\left(\frac{1}{343}-\frac{1}{293}\right)\frac{1}{K}} = 100\Omega\cdot e^{1{,}99}$

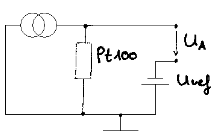
$\Leftrightarrow \boxed{R_N = 731{,}6\Omega}$

Aufgabe 9: Eine Temperaturmessung soll mit Hilfe eines Pt-100 (Platinmeßwiderstand) durchgeführt werden.

a) Geben Sie eine einfache lineare Schaltung an, die eine Ausgangsspannung in mV liefert, der eine Temperatur in °C entspricht!

$\Rightarrow$ einfache lineare Schaltung ohne aktive Bauelemente (z.B. OPV):

Pt100 $\Rightarrow$ bei 0°C einen Widerstand von 100Ω!



b) Dimensionieren Sie die Schaltung!

$\Delta U_R = I\cdot(R_T-R_0) = I\cdot\Delta R$

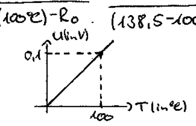
R_T: Platinwiderstand bei T
R_0: Platinwiderstand bei 0°C

$I = \frac{\Delta U_R}{R_T-R_0}$

$\Rightarrow$ für 100°C folgt für I: $I = \frac{100mV}{R_T(100°C)-R_0} = \frac{100mV}{(138{,}5-100)\Omega} = 2{,}597mA$

$\Rightarrow$ für Messspannung:

$U_A(T) = U_{R_T}-U_{ref} = I\cdot R_T-U_{ref}$



für 0°C soll gelten: $I\cdot R_T(0°C)-U_{ref} = 0$

$\Leftrightarrow 2{,}597mA\cdot100\Omega = 259mV = U_{ref}$

Lösung: $I = 2{,}597mA$ Stromquelle
$U_{ref} = 259mV$

$\Rightarrow \boxed{U_A(T) = 2{,}597mA\cdot R_T-259{,}7mV}$

c) Schätzen Sie für die angegebenen Zahlenwerte die absoluten Meßfehler ab, die sich aufgrund der Linearisierung in der Meßschaltung ergeben!

Messtemperatur in °C	-100	0	100	200
Pt-Widerstand in Ω	60,25	100	138,5	175,84

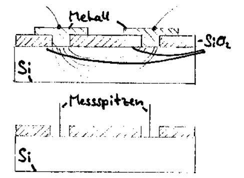
$U_A(T=0°C) = 0mV$
$U_A(T=100°C) = 2{,}597mA\cdot138{,}5\Omega-259{,}7mV = 99{,}98mV$
$U_A(T=200°C) = 196{,}96mV$
$U_A(T=-100°C) = -103{,}23mV$

Fehlerbetrachtung:

Messtemperatur in °C	-100	0	100	200
absoluter Messfehler ε in °C	-3,2	0	-0,02	-3,04

Aufgabe 10: Berechnen Sie den relativen und den prozentualen Fehler, der bei Temperaturmessungen nach dem „Spreading-Resistance"-Prinzip auftritt, wenn halbkugelförmige Metallkontakte gegen flächenhafte Kreiskontakte mit gleichem Durchmesser ersetzt werden! Der Abstand zwischen den beiden Messkontakten ist in beiden Fällen gleich groß und bezogen auf die Dicke des Halbleiterchips sehr klein.

Spreading-Resistance-T-Sensor:



$\Rightarrow$ Kontaktfläche

$\Rightarrow$ Halbkugelkontakte

$R_{SR} = +\int_{r_0}^{\infty}\frac{\varrho}{1/2\,O_K}dr = +\int_{r_0}^{\infty}\frac{\varrho}{2\pi\cdot r^2}dr = \frac{\varrho}{2\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty} = \frac{\varrho}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\infty}-\left(-\frac{1}{r_0}\right)\right)$

$\Rightarrow \boxed{R_{SR} = \frac{\varrho}{2\pi\cdot r_0}}$ für 1 Spitze!

r_0: Spitzenradius
O_K: Oberfläche $\Rightarrow \boxed{\text{Kugel} = 4\pi\cdot r^2}$

$2\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varrho}{r_0} \Rightarrow \boxed{R_{SR} = \frac{\varrho}{\pi\cdot r_0}}$ für 2 Spitzen!

Flächenkontakte:

a) 2r a) $R_{SR} = \int_{r_0}^{\infty}\frac{\varrho}{4r^2}dr = \frac{\varrho}{4\cdot r_0}$ für 2 Flächen: $R_{SR} = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\varrho}{r_0} \Rightarrow \boxed{R_{SR} = \frac{\varrho}{2\cdot r_0}}$

b) 2r b) $R_{SR} = \int_{r_0}^{\infty}\frac{\varrho}{\pi\cdot r^2}dr = \frac{\varrho}{\pi\cdot r_0}$ für 2 Flächen: $\Rightarrow \boxed{R_{SR} = \frac{2\varrho}{\pi\cdot r_0}}$

"relativer Fehler":

$\delta = \frac{R_{M2}-R_{M1}}{R_{M2}} = \frac{\frac{\varrho}{r_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)}{\frac{\varrho}{r_0}\cdot\frac{1}{2}} = 1-\frac{2}{\pi} = 0{,}363 \Rightarrow \boxed{\delta = 36{,}3\%}$

$\boxed{\delta = \frac{\frac{\varrho}{r_0}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}\right)}{\frac{\varrho}{r_0}\cdot\frac{2}{\pi}} = 0{,}5 = 50\%}$ Systematische Bedingungsf.

Aufgabe 11: Erläutern Sie ausführlich die Temperaturabhängigkeit des Stromes bei pn-Übergängen! Zeichnen Sie qualitativ die I-U-Kennlinie für 2 unterschiedliche Temperaturen!

Dioden/Transistoren als T-Sensoren:

I. $\frac{\partial}{\partial \underline{r}}\times\underline{E} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial \underline{r}}\cdot\phi = \underline{E}$

II. $\frac{\partial}{\partial \underline{r}}\cdot\underline{E} = \frac{\varrho(\underline{r})}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}$, ε

ϕ: magnetischer Fluss $[Vs = Wb]$ (Spannungspotential)

$\underline{E}$: elektrische Feldstärke $[V/m]$

$\varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r$: Durchlässigkeit $[As/Vm]$ (Permittivität)

$\varrho(\underline{r})$: Ladungsverteilung

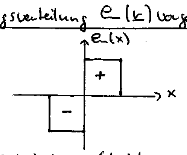
aus 2 × DGL 1. Ordnung $\Rightarrow$ 1 × DGL 2. Ordnung:

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial^2\underline{r}}\cdot\phi = -\frac{\varrho(\underline{r})}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}}$

Poison-Gl.

Ladungen sind Quellen des E-Feldes

Ladungsverteilung $\varrho(\underline{r})$ vorgegeben $\Rightarrow$ ϕ berechnen z.B. pn-Übergang:



+: p-Dotierung

-: n-Dotierung

im thermischen Gleichgewicht gilt:

$\boxed{j_D + j_E = 0}$ j_D: Diffusionsstromdichte

j_E: Feldstromdichte

Mit diesen beiden Überlegungen folgt:

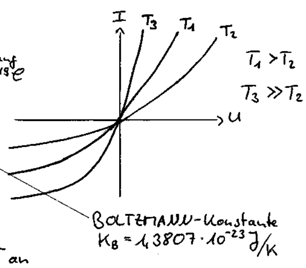
$\boxed{I(U) = I_0(T)\cdot\left\{e^{\frac{e\cdot U}{k_B\cdot T}}-1\right\}}$ Elementarladung $e = 1{,}6022\cdot10^{-19}C$

Diodenkennlinie

$T_1 > T_2 \lor T_2 > T_1$?

$T_2 > T_1$ ist falsch! obwohl bezüglich $e^{\frac{e\cdot U}{k_B\cdot T}}$-Betrachtung es so herauskommt

Ursache: $I_0(T)$ wächst sehr stark mit T an



$T_1 > T_2$

$T_3 \gg T_2$

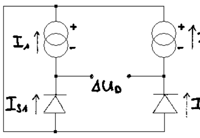
BOLTZMANN-Konstante $k_B = 1{,}3807\cdot10^{-23}J/K$

Aufgabe 12: Mit Hilfe zweier parallel geschalteter pn-Dioden D_1 und D_2 (gleicher Typ!) soll die Temperatur T gemessen werden.

a) Geben Sie die Meßschaltung an!

Schaltung mit 2 Dioden in Durchlassrichtung:

b) Berechnen Sie die Empfindlichkeit der Meßanordnung für ein Diodenstromverhältnis von $\frac{I_1}{I_2}=10$.



$$\boxed{\Delta U_D = \frac{k_B \cdot T}{e} \cdot \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)}$$

⇒ baugleiche Dioden $A_1 = A_2$, aber $I_1 \neq I_2$!

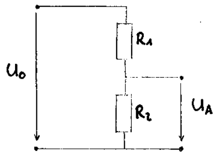
⇒ Empfindlichkeit:

$$\boxed{\frac{\Delta U_D}{T} = \frac{k_B}{e} \cdot \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)} \Rightarrow \frac{\Delta U_D}{T} = \frac{1{,}3807 \cdot 10^{-23}\,JK^{-1}}{1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C} \cdot \ln(10) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta U_D}{T} = 0{,}198\,\frac{mV}{K}}$$

Aufgabe 13: Welche Möglichkeiten zur aktiven Linearisierung von Temperatursensoren sind Ihnen bekannt? Erläutern Sie Ihre Beispiele!

I. Passive Linearisierung:

1.

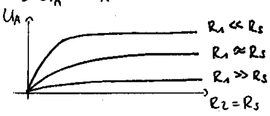


⇒ Spannungsteiler: $U_A = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot U_0$

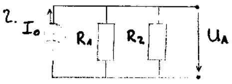
sei $R_S = R_S\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow R_1 = R_S$

z.B. für $R_2 \ll R_1 = R_S \Rightarrow \boxed{U_A = \frac{R_2}{R_S(1/x)} \cdot U_0}$

$\Rightarrow U_A \sim x^1$



2.

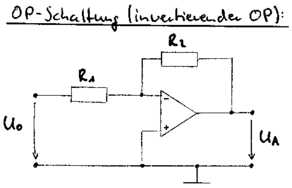


$\Rightarrow U_A = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}$ z.B. für $R_1 \ll R_2$

sei $R_1 = R_S(x) \Rightarrow U_A = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot \cancel{R_2}}{\cancel{R_2}} = I_0 \cdot R_1$

$\Rightarrow \boxed{U_A = I_0 \cdot R_S(x)}$

3. OP-Schaltung (invertierender OP):



$\Rightarrow U_A = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_0$

sei $R_S = R_S(x) \Rightarrow R_2 = R_S$

sei $R_S = R_S(1/x) \Rightarrow R_1 = R_S$

$\Rightarrow \boxed{U_A = -\frac{R_S(x)}{R_S(1/x)} \cdot U_0}$

II. Aktive Linearisierung:

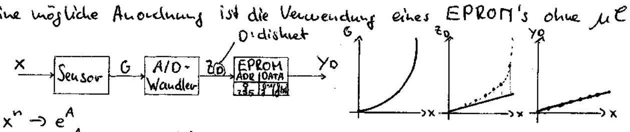
$G_S = f(x)$: Sensorausgang ; $y = k \cdot x$

x: Sensoreingang
k: gewählte Empfindlichkeit
y: gewünschte Funktion

Ansatz: Eine Schaltanordnung finden, die die Umkehrfunktion von G_S bildet.

$\Rightarrow y = k \cdot f^{-1}(G_S) = k \cdot f^{-1}(f(x))$

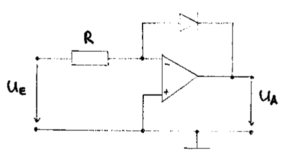
Eine mögliche Anordnung ist die Verwendung eines EPROM's ohne µC.



$x^n \to e^A$

$y = \ln \cdot e^A \Rightarrow n \cdot \log(x)$

Weitere Möglichkeiten: ⇒ OP-Schaltung (Logarithmierer Verstärker):



$\Rightarrow I_E = \frac{U_E}{R} = -I_A = -I_0 = -I_0 \cdot e^{\frac{e \cdot U_A}{k_B \cdot T}}$

$\frac{U_E}{R} = -I_0 \cdot e^{\frac{e \cdot U_A}{k_B \cdot T}} \Rightarrow \ln\left(\frac{U_E}{R \cdot I_0}\right) = -\frac{e \cdot U_A}{k_B \cdot T}$

$\Rightarrow \boxed{U_A = -\frac{k_B \cdot T}{e} \cdot \ln\left(\frac{U_E}{R \cdot I_0}\right) \;;\; U_A \sim \ln U_E}$

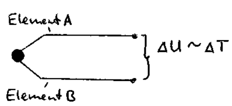
Linearisierung durch Logarithmusbildung

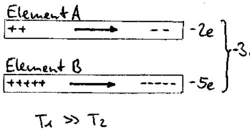
Aufgabe 14: Erläutern Sie die Funktionsweise eines Thermoelementes! Welche Empfindlichkeiten liegen bei Thermoelementen vor? Welche Einsatzbereiche kennen Sie?

Funktionsweise:

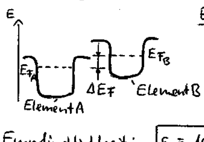
$\boxed{HEISS}$ $\xrightarrow[\text{Elektronenstrom}]{\text{Wärmestrom}}$ $\boxed{KALT}$

⇒ Elektronentransport = Wärme!





$T_1 \gg T_2$



Energie: $E = e \cdot U \Rightarrow U = \frac{E}{e}$

$\Delta E_F \sim T$ mit $E_F \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{\Delta E_F(T)}{e}}$

Empfindlichkeit: $\boxed{\varepsilon = 10 \ldots 80\,\frac{\mu V}{K}}$

Einsatzbereiche: Temp.-Messung, Strahlungsmessung, Energiewandlung, Feuerungsanlagen

Aufgabe 15: Für welche Einsatzzwecke eignen sich Quarztemperatursensoren? (Schwingquarze)

⇒ Hauptsächlich in der gesamten Elektro- und Nachrichtentechnik, in praktisch allen Sendeanlagen zu finden, seltener in Empfängern, als Taktgeber in Computern und bei Mikrokontrollern sowie in Frequenzzählern und digitalen Signalgeneratoren. Ebenso eignen sich Quarze zur Realisierung von Filtern.

Klausur 07.02.2006

(1) Zeitverhalten

a) Geben Sie die DGL zur Bestimmung der Funktion der Ofentemperatur T(t) an und berechnen die Lösungsfunktion T(t).

„Praxis-Arbeits-DGL" für > 95 % aller Sensoren $\boxed{a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x(t)}$

⇒ lineare DGL - 1. Ordnung

Vorweg: $\boxed{y(t) = y_S \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ ⇒ Annahme: $x(t) = \text{konst.} = x_h$

⇒ Lösung der DGL - 1. Ordnung

• wenn $t \to \infty$ (Idealfall) $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \;;\; y = y_S$

⇒ einsetzen $\cancel{a_1 \cdot 0} + a_0 \cdot y_S = x_h \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{x_h}{y_S}}$

• wenn $t \to 0$ (Realfall) $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = y_0'$ (Anfangssteigung) ; $y = 0$

⇒ einsetzen $a_1 \cdot y_0' + \cancel{a_0 \cdot 0} = x_h \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{x_h}{y_0'}}$

x_h gleichsetzen $\Rightarrow a_0 \cdot y_S = a_1 \cdot y_0' \Leftrightarrow \boxed{y_S = \frac{a_1}{a_0} \cdot y_0'}$ Sättigungswert

mit $\boxed{\tau = \frac{a_1}{a_0}}$

$\Rightarrow \boxed{y_S = \tau \cdot y_0' \quad \tau = \frac{y_S}{y_0'}}$

$y(t=\tau) = y_S \cdot (1 - e^{-1}) = 0{,}63 \cdot y_S$ (Sättigungswert bis zu 63 % erreicht)

⇒ Separationsansatz: $\boxed{\frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = dt}$

$a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x_h \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x_h}{a_1} - \frac{a_0 \cdot y}{a_1} \Leftrightarrow dt = \frac{a_1}{x_h - a_0 \cdot y} \cdot dy \quad | \cdot (-a_0)$

$\Leftrightarrow -\int \frac{a_1 \cdot a_0}{x_h - a_0 \cdot y} \cdot dy = -a_0 \int 1 \cdot dt \Leftrightarrow a_1 \cdot \ln|x_h - a_0 \cdot y| + \underbrace{\gamma_1}_{\text{konstante}} = -a_0 \cdot t + \underbrace{\gamma_2}_{\text{konstante}}$

mit $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma \Rightarrow \ln(x_h - a_0 \cdot y) + \gamma = -\frac{a_0}{a_1} \cdot t \Leftrightarrow \ln|x_h - a_0 \cdot y| = -\frac{a_0}{a_1} \cdot t + \gamma^*$

$\Leftrightarrow x_h - a_0 \cdot y = e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot \underbrace{e^{\gamma^*}}_{A} \Leftrightarrow x_h - a_0 \cdot y = e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \cdot A$

Anfangsbedingungen: $t \to 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x_h = A \cdot e^0 \Leftrightarrow x_h = A$

auf y freistellen: $x_h - a_0 \cdot y = x_h \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t} \Leftrightarrow a_0 \cdot y = x_h - x_h \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t}$

$\Leftrightarrow y = y(t) = \frac{x_h}{a_0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} \cdot t}\right) \Leftrightarrow y(t) = y_S \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

In diesem Fall: $\boxed{T(t) = T_S \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ mit } \tau = \frac{a_1}{a_0} \text{ und } T_S = \frac{P_h}{a_0}}$

b) Geben Sie die DGL zur Bestimmung der Funktion U(t) des Sensorsignals an. Geben Sie ferner die Lösungsfunktion U(t) der DGL vollständig an.

DGL für Sensor: $\boxed{a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = x(t) = x_m \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_x}\right)}$

allg.: ⇒ für einen exponentiellen Verlauf des Eingangssignals!

für diesen Fall: $\Rightarrow \boxed{a_1 \cdot \frac{dU}{dt} + a_0 \cdot U = T(t) = T_S \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_x}\right)}$

Lösungsfunktion: allg.: $\boxed{y(t) = y_S \cdot \frac{1}{\tau_x - \tau_S} \cdot \left(\tau_x \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_x}\right) - \tau_S \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_S}\right)\right)}$

für diesen Fall: $\Rightarrow \boxed{U(t) = U_S \cdot \frac{1}{\tau_x - \tau_S} \left(\tau_x \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_x}\right) - \tau_S \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_S}\right)\right)}$

$\tau_x = \tau_{Ofen} \;;\; \tau_S = \tau_{Sensor}$

c) Zeigen Sie, wie die Zeitkonstante des Ofens mit Hilfe des Temperatursensorsignals berechnet werden kann, indem Sie einen Ausdruck für den ersten stehenden Plot herleiten. Gehen Sie davon aus, dass Ihr verwendeter Sensor eine Zeitkonstante τ_{Sensor} besitzt, die vergleichbar zur Ofenzeitkonstante τ_{Ofen} sei, d.h.: $0{,}98 < \tau_{Ofen}/\tau_{Sensor} < 1{,}02$.

$\boxed{\tau = \tau_x + \tau_S} \Rightarrow \boxed{y(t) = y_S \cdot \frac{1}{\underbrace{\tau_x - \tau_S}_{\text{bekannt}}} \cdot \left(\underbrace{\tau_x}_{\text{gesucht}}\left(1 - e^{-t/\tau_x}\right) - \tau_S \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_S}\right)\right)}$

$\Rightarrow y(t) = y_S \cdot f(\tau_x, \tau_S)$

$y(t)$ an $t = \tau_x + \tau_S$

$\Rightarrow y(\tau_x + \tau_S) = y_S \cdot \left(\frac{\tau_x}{\tau_x - \tau_S} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau_x + \tau_S}{\tau_x}}\right) - \frac{\tau_S}{\tau_x - \tau_S} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau_x + \tau_S}{\tau_S}}\right)\right)$

Verhältnis

mit $\boxed{n = \frac{\tau_x}{\tau_S}} \Rightarrow \tau_x = n \cdot \tau_S \quad | + \tau_S \Leftrightarrow \tau_x + \tau_S = (n+1) \cdot \tau_S$

$\Rightarrow y(\tau_x + \tau_S) = y((n+1) \cdot \tau_S) \Leftrightarrow$

$= y_S \cdot \left(\frac{n \cdot \cancel{\tau_S}}{(n-1) \cdot \cancel{\tau_S}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\cancel{\tau_S}}{\cancel{\tau_S}}}\right) - \frac{\cancel{\tau_S}}{(n-1) \cdot \cancel{\tau_S}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{(n+1) \cdot \cancel{\tau_S}}{\cancel{\tau_S}}}\right)\right) \Leftrightarrow$

$= y_S \cdot \left(\frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{n+1}{n}}\right) - \frac{1}{n-1} \cdot \left(1 - e^{-(n+1)}\right)\right) \quad | : \frac{n}{n} \Leftrightarrow$

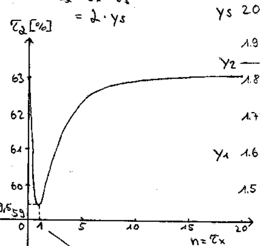
$= \underbrace{y_S \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot \left(1 - e^{-\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right) + \frac{1}{1-n}\left(1 - e^{-(1+n)}\right)\right)}_{d_n} \Leftrightarrow \boxed{y(\tau_x + \tau_S) = y_S \cdot f(n)}$

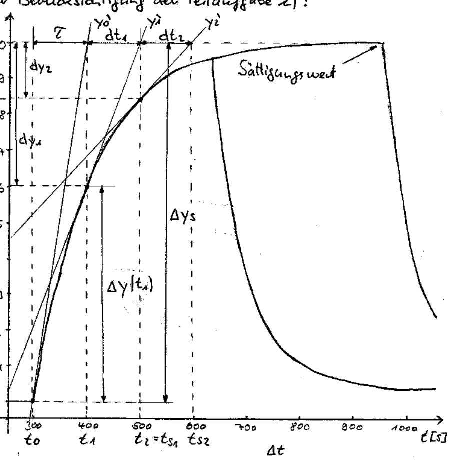
oder

$\Rightarrow \boxed{y(\tau_x + \tau_S) = y_S \cdot d_n}$

d) Ermitteln Sie für den neben stehenden Temperatur-Sensor-Signalverlauf die Zeitkonstante des Ofens unter Berücksichtigung der Teilaufgabe c)!

$\tau_3 = \tau_x + \tau_s = 2 \cdot y_s$





$\Rightarrow 0{,}98 < \frac{\tau_x}{\tau_s} < 1{,}02$

$\tau_x = \tau_{Ofen}$
$\tau_s = \tau_{Sensor}$

I. y_s bekannt!

abgelesen: $t_0 = 300\,s$; $y_0 = 1\,V$; $\tau = 100\,s$ $\Rightarrow t = \tau = (400-300)\,s = 100\,s$
$t_1 = 400\,s$; $y_1 = 1{,}61\,V$

$y(t) = \Delta y(t_1) = (1{,}61 - 1)\,V = 0{,}61\,V$

$y_s = \Delta y_s = y_s - y_0 = (2-1)\,V = 1\,V$

$\boxed{\tau_s = -\frac{t}{\ln\left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)}}$

einsetzen: $\tau_s = -\frac{100\,s}{\ln\left(1 - \frac{0{,}61\,V}{1\,V}\right)} \Rightarrow \boxed{\tau_s = 106{,}2\,s}$

II. y_s nicht bekannt!

abgelesen: $t_1 = 400\,s$; $y_1 = 1{,}61\,V$; $dt_1 = dt_2 = \tau = 100\,s$
$t_2 = 500\,s$; $y_2 = 1{,}85\,V$

$\Rightarrow y_1' = \frac{dy_1}{dt_1} = \frac{y_s - y_1}{t_{s1} - t_1} = \frac{(2-1{,}61)\,V}{(500-400)\,s} = 0{,}0039\,\frac{V}{s}$

$\boxed{\tau_s = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{y_1'}{y_2'}\right)}}$

$\Rightarrow y_2' = \frac{dy_2}{dt_2} = \frac{y_s - y_2}{t_{s2} - t_2} = \frac{(2-1{,}85)\,V}{(600-500)\,s} = 0{,}0015\,\frac{V}{s}$

einsetzen: $\tau_s = \frac{100\,s}{\ln\left(\frac{0{,}0039\,V/s}{0{,}0015\,V/s}\right)} \Rightarrow \boxed{\tau_s = 104{,}7\,s}$

*Ofenkonstante $\tau_x = \tau_{Ofen}$: $\tau_{63} \neq \tau_x + \tau_s$, weil $n \neq 1$! $\Rightarrow \boxed{\tau_x + \tau_s = 209{,}4\,s = \tau_{59{,}5}}$

$n = \frac{\tau_x}{\tau_s} \Rightarrow \tau_x = n \cdot \tau_s = 0{,}99 \cdot 104{,}7\,s = 103{,}7\,s \wedge \tau_x = 1{,}01 \cdot 104{,}7\,s = 105{,}7\,s$

$\Rightarrow \boxed{103{,}7\,s \leq \tau_{Ofen} \leq 105{,}7\,s}$

(2) Sensor-Schaltungstechnik

$\Rightarrow$ Differenzverstärker (Seite 8)!

a) Leiten Sie zunächst einen Ausdruck für U_A des Differenzverstärkers her und leiten zusätzlich aus dieser Gleichung eine 2. und 3. Gleichung für die beiden Spezialfälle (1) $R_{V1} = R_{P1} \wedge R_{V2} = R_{P2}$; (2) $R_{V2} = n \cdot R_{V1} \wedge R_{P2} = n \cdot R_{P1}$ her.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Lösung (Seite 8 und 9)!}}$

b) In der Schaltung befinde sich nun ein Sensor mit dem Widerstand R_s (resitiv). Geben Sie U_A als Funktion von R_s an. Benutzen Sie dazu die Ergebnisse aus a).
(1) $R_{P2} = n \cdot R_{P1}$; (2) n-Werte > 10

$\Rightarrow \boxed{U_A = \left(\frac{R_V + R_S}{R_V}\right) \cdot \left(\frac{R_{P2}}{R_{P1} + R_{P2}}\right) \cdot U_2 - \frac{R_S}{R_V} \cdot U_1}$

(1): $\Rightarrow U_A = \left(\frac{R_V + R_S}{R_V}\right) \cdot \left(\frac{n \cdot R_{P1}}{R_{P1} + n \cdot R_{P1}}\right) \cdot U_2 - \frac{R_S}{R_V} \cdot U_1$

$\Rightarrow \boxed{U_A = \left(1 + \frac{R_S}{R_V}\right) \cdot \frac{n}{1+n} \cdot U_2 - \frac{R_S}{R_V} \cdot U_1}$

(2): $\Rightarrow U_A = \left(1 + \frac{R_S}{R_V}\right) \cdot \overbrace{\cancel{\frac{n}{1+n}}}^{\approx 1} \cdot U_2 - \frac{R_S}{R_V} \cdot U_1 \Rightarrow \boxed{U_A = U_2 + \frac{R_S}{R_V} \cdot (U_2 - U_1)}$

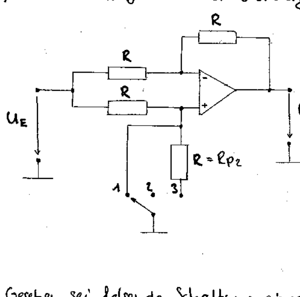
c) Berechnen Sie mit der Gleichung aus b) U_A für (1) $U_1 = U_2 = 10V \wedge R_{P2} \to \infty$; (2) $U_1 \neq U_2$; (3) $U_2 = 0V \wedge U_1 \neq 0V$

(1): $\Rightarrow U_A = U_2 + \frac{R_S}{R_V} \cdot (U_2 - U_1) = 10V + \frac{R_S}{R_V} \cdot \overbrace{\cancel{(10-10)}}^{0} V \Rightarrow \boxed{U_A = 10V}$

(2): $\Rightarrow \boxed{U_A = U_2 + \frac{R_S}{R_V} \cdot (U_2 - U_1)}$

(3): $\Rightarrow U_A = 0V + \frac{R_S}{R_V} \cdot (0V - U_1) \Rightarrow \boxed{U_A = -\frac{R_S}{R_V} \cdot U_1}$

d) Geben Sie U_A für 3 Schalterstellungen S_1, S_2 und S_3 an!



S_1: $R_{P2} \to 0$: $U_A = \left(\frac{R+R}{R}\right) \cdot \overbrace{\cancel{\left(\frac{R_{P2}}{R + R_{P2}}\right)}}^{0} \cdot U_E - \overbrace{\cancel{\frac{R}{R}}}^{=1} \cdot U_E$

$\Rightarrow \boxed{U_A = -U_E}$

S_2: $R_{P2} \to \infty$: $U_A = \left(\frac{2R}{R}\right) \cdot \overbrace{\cancel{\left(\frac{R_{P2}}{R + R_{P2}}\right)}}^{\approx 1} \cdot U_E - \overbrace{\cancel{\frac{R}{R}}}^{=1} \cdot U_E$

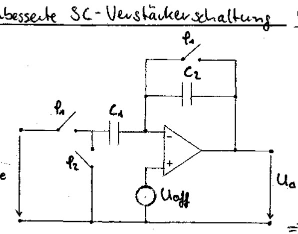
$\Leftrightarrow U_A = 2U_E - U_E \Rightarrow \boxed{U_A = U_E}$

S_3: $R_{P2} = R$: $U_A = \left(\cancel{\frac{2R}{R}}\right) \cdot \left(\cancel{\frac{R}{2R}}\right) \cdot U_E - \overbrace{\cancel{\frac{R}{R}}}^{=1} \cdot U_E$

$\Leftrightarrow U_A = U_E - U_E \Rightarrow \boxed{U_A = 0V}$

e) Gegeben sei folgende Schaltung eines SC-Verstärkers. Berechnen Sie dessen Verstärkung und erörtern Sie die Funktionsweise!

Verbesserte SC-Verstärkerschaltung



Berechnungsansatz:

$U_a(t_2) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_e(t_1) + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \cdot U_{off}(t_2)$

$U_a(t_1) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_e(t_1) + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \cdot U_{off}(t_1)$

$\Leftrightarrow = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot U_e(t_1) + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \cdot U_{off}(t_1)$

t_1 ist geschlossen, d.h. $Z_2 = 0$

$U_a(t_1) = +U_{off}$

$\Rightarrow U_a(t_2) = -\frac{C_1}{C_2}\left\{U_e(t_1) + U_{off}(t_1)\right\} + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) U_{off}(t_2)$

$U_a(t_2) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_e(t_1) - \frac{C_1}{C_2} \cdot U_{off}(t_1) + U_{off}(t_2) + \frac{C_1}{C_2} \cdot U_{off}(t_2)$

$= -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_e(t_1) + U_{off} + \frac{C_1}{C_2}\left\{U_{off}(t_2) - U_{off}(t_1)\right\}$

$\Rightarrow U_a(t_2) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_e(t_1) + U_{off}(t_2)$ U_{off} wird nicht verstärkt

(3) Temperatursensoren

a) NTC-Thermistor $\Rightarrow R_N = 160\,k\Omega$ bei $T_N = 20°C$; $B = 4500\,K$
(1) Ermitteln Sie die zugehörige Gleichung $R(T)$ für den NTC-Sensor.
(2) Berechnen Sie den Widerstand des Thermistors bei $T = 400°C$!
(3) Ermitteln Sie eine allgemeine Gleichung für $\alpha(T)$ und ermitteln danach den Wert bzw. Gleichung $\alpha(T)$ für den NTC-Sensor.
(4) Berechnen Sie $\alpha(T)$ für $T = 25°C, 100°C, 200°C$ sowie $300°C$.

(1) $\Rightarrow$ Seite 10 Aufgabe 2 $\wedge$ Seite 13 Aufgabe 5

(2) $\Rightarrow \boxed{R(T) = R(T_N) \cdot e^{B \cdot (1/T - 1/T_N)}} \Rightarrow R(T = 400°C) = 160 \cdot 10^3\,\Omega \cdot e^{4500K\left(\frac{1}{673} - \frac{1}{293}\right)\frac{1}{K}}$

$\Rightarrow 0°C \mathrel{\hat{=}} 273{,}15\,K$! $\Rightarrow \boxed{R(T = 400°C) = 27{,}4\,\Omega}$

(3) $\Rightarrow$ Seite 11 Temperaturkoeffizient

$\boxed{\alpha_T = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2}} \Rightarrow \alpha_{400°C} = -\frac{4500\,K}{(673\,K)^2} \Rightarrow \boxed{\alpha_{400°C} = -0{,}0099\,K^{-1} = -0{,}99\,\%/K}$

(4) $\Rightarrow$
$\alpha_{25°C} = -5{,}06\,\%/K$
$\alpha_{100°C} = -3{,}23\,\%/K$
$\alpha_{200°C} = -2{,}01\,\%/K$
$\alpha_{300°C} = -1{,}37\,\%/K$

b) Mit Hilfe zweier parallel geschalteter pn-Dioden D_1 und D_2 (gleicher Typ!) soll die Temperatur T gemessen werden.

Lösung: Seite 17 Aufgabe 12

$I_1 = I_{01} \cdot e^{\frac{e \cdot U_{01}}{k_B \cdot T}}$ $I_2 = I_{02} \cdot e^{\frac{e \cdot U_{02}}{k_B \cdot T}}$

$U_{01} = \frac{k_B \cdot T}{e} \cdot \ln\left(\frac{I_1}{I_{01}}\right)$ $U_{02} = \frac{k_B \cdot T}{e} \cdot \ln\left(\frac{I_2}{I_{02}}\right)$

$\Rightarrow \Delta U_D = U_{01} - U_{02} = \frac{k_B \cdot T}{e} \ln\left\{\frac{I_1 \cdot I_{02}}{I_2 \cdot I_{01}}\right\}$

baugleiche Dioden: $\Rightarrow \frac{I_{02}}{I_{01}}$ kürzt sich raus, aber $\frac{I_1}{I_2} \neq 1$ zwingend erforderlich!

$\Rightarrow$ 2 Stromquellen!

baugleiche Dioden mit unterschiedlichen Querschnittsflächen: $I_{01} \sim A_1$, $I_{02} \sim A_2$

$\Rightarrow$ dann ist $I_1 = I_2$ erlaubt! $\Rightarrow A_1 \neq A_2$

$\Rightarrow \boxed{\Delta U_D = \frac{k_B \cdot T}{e} \cdot \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}$

wenn $A_1 = A_2$ muss $I_1 \neq I_2$ sein! $\Rightarrow \boxed{\Delta U_D = \frac{k_B \cdot T}{e} \cdot \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)}$

Empfindlichkeit:

$\boxed{\frac{\Delta U_D}{T} = \frac{k_B}{e} \cdot \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right)} \Rightarrow \frac{\Delta U_D}{T} = \frac{1{,}3807 \cdot 10^{-23}\,JK^{-1}}{1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C} \cdot \ln(8) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta U_D}{T} = 0{,}179\,\frac{mV}{K}}$

c) Funktionsweise eines Thermoelementes! Welche Empfindlichkeiten liegen bei Thermoelementen vor? Welche Einsatzbereiche kennen Sie?

Lösung: Seite 18 Aufgabe 14

Klausur 22.03.2005

(1) Fragen

a) Erörtern Sie die Funktionsweise eines A/D-Wandlers nach dem FLASH-Converter-Prinzip und eines A/D-Wandlers nach dem Prinzip der sukzessiven Approximation!

Flash-Converter: Basis ist der OP als Komparator. Referenzspannung mit 2^n Widerständen wird in kleine Stufen eingeteilt ($\Rightarrow$ Auflösung). An jedem dieser Widerstände hängt ein Komparator, der die Eingangsspannung mit der jeweiligen Teilreferenzspannung vergleicht. Mittels einer Kodierlogik wird ein Bitmuster erstellt. Für jede Spannungsstufe wird ein Komparator benötigt. ($\Rightarrow$ aufwendig) ($\Rightarrow 2^n - 1$ Komparatoren). Sehr schnelles Verfahren.

$\boxed{\text{Auflösung} = \frac{\text{Bereich}}{2^n}}$

sukzessive Approximation: Vom SAR (sukz. Approximationsregister) werden Bitfolgen an den D/A-Wandler geschickt. Dieser wandelt die Bitfolge in Abhängigkeit der Referenzspannung in eine Spannung um. Diese Spannung wird an den Komparator geschickt. Der Komparator vergleicht die Spannung mit der angelegten Spannung. Daraufhin wird die Bitfolge im SAR geändert und der Vorgang erneut durchlaufen. Die Bitfolgeänderung erfolgt nach folgendem Prinzip: Das höchstwertige Bit „1" sonst wird es auf „0" gesetzt und wird dann bis zum Ende nicht mehr geändert. Dann wird der Vorgang mit dem 2. Bit durchgeführt usw.. Durch dieses Verfahren wird immer die Mitte des noch zu durchsuchenden Bereichs ausgewählt $\Rightarrow$ schrittweise Näherung.

b) µ-Controller $\Rightarrow$ Rechtecksignal, $f = 10\,kHz$, zufrieden stellend abspeichern und reproduzieren; gesicherte Frequenzaussage

$\Rightarrow$ a) zufrieden stellend...: 10fach

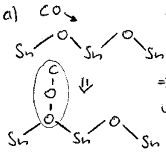
b) gesicherte Frequenzaussage: 2fach

c) Sie haben ein sehr schwaches Nutzsignal (vgl. DFT-Praktikum) von etwa 50mV Amplitude, das von einem sehr starken statistisch gleichverteiltem Rauschen (Rauschamplitude 10V) überlagert ist. Erörtern Sie ob, und was von dem Nutzsignal mit welcher Methode messbar ist!

1. Fouriertransformation 2. Differenzieren 3. Mittelwert bilden
Als erstes muss man eine DFT durchführen. Von der DFT bildet man einen Mittelwert über einige Zyklen. Bei zu vielen Zyklen entsteht der Nachteil, dass sich bei Änderung des Nutzsignals der Ausschlag in der DFT sich nur sehr langsam bewegt. Bei zu wenigen Zyklen ist der Unterschied vom DFT-Signals vom Rauschen zu dem des Nutzsignals zu gering. Man kann es dann nicht mit Sicherheit identifizieren. Im Anschluss kann man noch eine Ableitung der DFT bilden. Das ein z.B. einzelne Frequenzen noch mal hervorhebt. Der Rauschpegel ist nämlich nahezu konstant. Wenn das immer noch nicht reicht kann dieses dann nochmal mit einem Faktor multiplizieren um das ganze noch weiter auseinander zu ziehen.

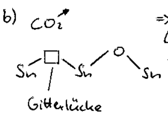
d) Erläutern Sie im „atomistischen Bild" und im „Energiebild" die Funktionsweise von Metalloxid-Gassensoren! Welche Effekte führen zur Signalerzeugung und warum? Welche Effekte führen zur Signalsättigung?

„Atomistisches Bild":

a) 

⇒ oberste Atomlage eines SnO_2-Gitters

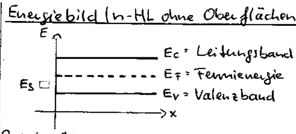
⇒ Adsorption von CO und Bildung von CO_2

b) 

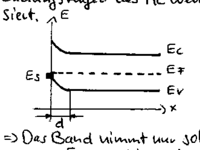
⇒ Desorption von CO_2. Ladungsträger werden frei → Erhöhung el. Leitfähigkeit

⇒ Es verbleibt eine Gitterlücke □. Zuvor lokalisierte Ladungsträger werden „frei" und erhöhen die el. Leitfähigkeit.
⇒ Die Anzahl der auf der Oberfläche befindlichen Moleküle (die Dipole bilden) ist so hoch, dass die Dipol-Dipol-Abstoßung größer ist als die Bindungskraft der Dipole zur Halbleiteroberfläche.
→ Die max. Bedeckung ist erreicht (Sättigungszustand).

Energiebild (n-HL ohne Oberflächenzustände):



Bei der Adsorption eines reaktiven Gases, z.B. eines Akzeptors wie O_2 (NO_2) → $2O^{--}$ (NO_2^-), bilden sich energetische Oberflächenzustände E_S (s: surface), die bei der Besetzung eine Bandverbiegung verursachen. Gleichzeitig bildet sich im HL eine Verarmungsrandschicht, d.h. eine Zone die an n-Ladungsträgern verarmt ist, weil die Ladungsträger den Oberflächenzustand E_S (d.h. das Akzeptorgas) besetzen. Die Tiefe d der Verarmungszone wird von der Anzahl der Akzeptorgasmoleküle bestimmt. Die max. Anzahl der absorbierten Gasmoleküle wird von der energetischen Lage des zur Gasart gehörigen Oberflächenzustandes bestimmt. Die Bandverbiegung nimmt mit zunehmender Anzahl der adsorbierten Moleküle solange zu, bis $E_{S\,max} = E_F$ ist. Gleichzeitig nimmt die Tiefe d der Verarmungszone zu, so dass die Leitfähigkeit des n-HL mit zunehmender Adsorption des Akzeptorgases abnimmt. Freie Ladungsträger des HL werden gebunden, d.h. lokalisiert.



⇒ Das Band nimmt nur solange zu, bis E_S das Niveau von E_F erreicht, weil die Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$ für Zustände $E > E_F \to 0$ strebt.

Klausur 15.03.2005

(1) Fragen

a) Mit welchen grundlegenden Gleichungen kann das el. Widerstandsverhalten von Materialien unter dem Einfluss unterschiedlicher Einwirkgrößen, die sensorisch erfasst werden sollen (Druck, Temperatur, Stoffart und -Konzentrationen usw.), beschrieben werden?

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{el.}(T, P, \varepsilon, \ldots) = e \cdot n \cdot (T, P, \varepsilon, \ldots) \cdot \mu(T, P, \varepsilon, \ldots)}$$

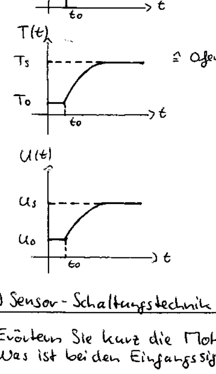
f) Sie haben ein unbekanntes Gasgemisch von den Gasen Wasserstoff H_2, Methan CH_4 und Kohlenmonoxid CO und Stickstoffmonoxid NO vorliegen:
Wie viele Gassensoren müssen Sie min. in einem Sensor-Array verwenden, um die 4 unbekannten Gaskonzentrationen aus den Signalen berechnen zu können und wie viele Sensoren würden ausreichen, um eine qualitative Gasanalyse durchzuführen?

⇒ qualitativ: 2 Sensoren quantitativ: Anzahl der Gase = Anzahl der Sensoren
hier ⇒ 4 Sensoren

(2) Zeitverhalten

Gegeben sei eine nichtlineare Wärmequelle die durch einen rechteckigen konstanten Leistungssprung $P_{100\%}$ ein Volumen aufheizt (z.B. den Ofen im Praktikumsversuch „Temperatursensoren").

a) Zeichnen Sie untereinander den zeitlichen Verlauf der Leistung $P(t)$, der Ofentemperatur $T(t)$ und der Sensorspannung $U(t)$.



≙ Ofentemperatur

(3) Sensor-Schaltungstechnik

i) Erörtern Sie kurz die Motivation und das Konzept der SC-Schaltungsmethode! Was ist bei den Eingangssignalen zu beachten?

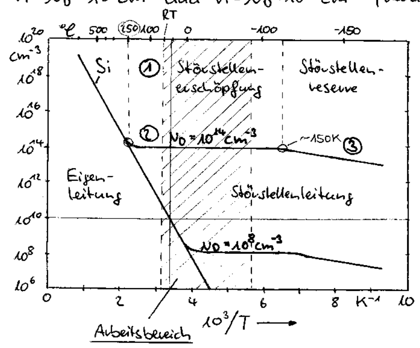
Motivation zur Entwicklung der SC-Technik:
In der Schaltungstechnik werden die Eigenschaften der Schaltungsfunktion häufig von RC-Gliedern bestimmt.

Problem: Zum Teil treten sehr große Fehler in IC-Schaltungen aufgrund der multiplikativen Wirkung von R und C auf!
Fazit: Die integrierten elektronischen Bauelemente in IC's haben eine sehr geringe absolute Genauigkeit (d.h. Fehler im 30%-Bereich). Sie besitzen aber eine exzellente Paarungsgenauigkeit (matching). ⇒ Für IC's und MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) ist ein konventionelles Schaltungsdesign nicht brauchbar!
Lösungskonzept: Die Schaltung wird so ausgelegt, dass die Genauigkeit der Schaltung nur durch das Verhältnis der Bauelementwerte bestimmt wird, also nur von der Paarungsgenauigkeit (matching) abhängt! Die SC-Technik ermöglicht die Nachbildung von Widerständen durch Schalter und Kondensatoren. Die Genauigkeit der Schaltung wird so nur durch das matching und die Taktfrequenz bestimmt. Ferner entfällt die Ohm'sche Belastung der Verstärkerschaltung durch die Widerstände. Bei den Eingangssignalen ist zu beachten, dass die Eingangssignale nur die halbe Abtastfrequenz haben dürfen. Es ist also das Abtasttheorem zu beachten.

(4) Temperatursensoren

a) Tragen Sie in sinnvoller Weise die Ladungsträgerkonzentration eines n-HL über $\frac{1}{T}$ für zwei verschiedene Dotierungen auf und erörtern den Verlauf!

⇒ Temperaturabhängigkeit der Elektronenkonzentration in Silizium Si für $n = N_D = 10^8 cm^{-3}$ und $n = N_D = 10^{14} cm^{-3}$ (vereinfacht)



⇒ Bei einer höheren Elektronenkonzentration $N_D = 10^{14} cm^{-3}$ liegt der HL Silizium bei 250°C im Bereich der Eigenleitung.
Mit der Elektronenkonzentration von $N_D = 10^8 cm^{-3}$ liegt der HL Silizium im Bereich der Störstellenleitung.
⇒ Die höhere Konzentration ist auf jeden Fall besser!

① Intrinsischer Bereich

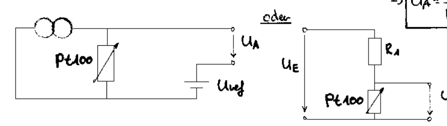
② Sättigungsbereich

③ Erschöpfungsbereich

c) Eine Temperaturmessung soll mit Hilfe eines Pt-100 (Platinmesswiderstand wie im Praktikum verwendet) durchgeführt werden.

$$\Rightarrow \boxed{U_A = \frac{R_{Pt100}}{R_1 + R_{Pt100}} U_E}$$

lineare Schaltung:



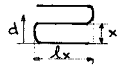
Dimensionierung: $R_{Pt100}(0°C) = 100\Omega$; $U_E = 10V$

$$\Rightarrow U_A = U_E \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{Pt100}}}$$

⇒ R_1 sollte eine ähnliche Größenordnung haben wie R_{Pt100}, deshalb wähle $R_1 = 100\Omega$

$$\Rightarrow U_A(0°C) = \frac{1}{2} U_E$$

Pt-Mäander: geg: Breite $d = 10\mu m$; Schichtwiderstand $R_S = 0{,}04 \frac{\Omega}{\square}$; 1 Windung $l_x = 0{,}5mm$; Abstand von Windung zu Windung ⇒ $x = 10\mu m$



ges: l des Pt-Mäanders; wieviele Windungen; Chipfläche A_{chip} in mm^2

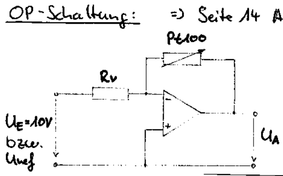
$$\frac{100\Omega}{0{,}04\frac{\Omega}{\square}} = 2500\square \text{ bei } d = 10\mu m \Rightarrow l = 2500\square \cdot 10\mu m$$

$$\Rightarrow \boxed{l = 25mm}$$

Windungszahl $n = \frac{25mm}{0{,}5mm}$ ⇒ $\boxed{n = 50}$

Fläche $A_{chip} = 0{,}5mm \cdot 10\mu m$ ⇒ $\boxed{A_{chip} = 5 \cdot 10^{-3} mm}$

OP-Schaltung: ⇒ Seite 14 Aufgabe 9



geg: $U_A(0°C) = 0V \wedge U_A(100°C) = -100mV$
$U_E = const = 10V$ bei $T = 100°C$; $R_{Pt100} = 138{,}5\Omega$

$\Delta U_R = I \cdot (R_T - R_0) = I \cdot \Delta R$ R_T: Pt-Widerstand bei T

$I = \frac{\Delta U_R}{R_T - R_0}$ ⇒ für $T = 100°C$ R_0: Pt-Widerstand bei 0°C (100Ω)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{U_A}{U_E} = -\frac{R_{Pt100}}{R_V}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{100mV}{R_T(100°C - R_0)} = \frac{100mV}{(138{,}5 - 100)\Omega} \Rightarrow I = 2{,}597mA$$

Messspannung: ⇒ $\boxed{U_A(T) = U_{RT} - U_{ref} = I \cdot R_T - U_{ref}}$

für 0°C gilt:

$$\Rightarrow I \cdot R_T(0°C) - U_{ref} = 0 \Rightarrow U_{ref} = 2{,}597mA \cdot 100\Omega \Rightarrow \boxed{U_{ref} = 259mV}$$

allg.: ⇒ $U_A(T) = 2{,}597mA \cdot R_T - 259{,}7mV$

$$\Rightarrow U_A(100°C) = 2{,}597mA \cdot 138{,}5\Omega - 259{,}7mV \Rightarrow \boxed{U_A(100°C) = 99{,}98mV}$$

Klausur 30.09.2004

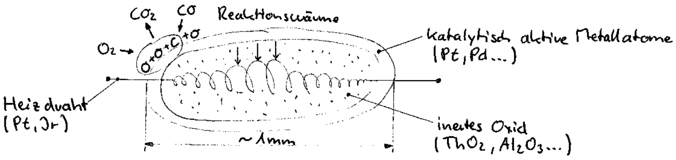
(1) Fragen

f) Wie funktioniert ein Pellistor? Wofür wird er bevorzugt eingesetzt?

Pellistor (Wärmetönungssensor):

- Eindraht-Sensor (innerer Platindraht heizt das Sensormaterial)
- wenn Gas anwesend, dann Reaktionswärme = Temperaturerhöhung, diese ist messbar über Pt-Draht Widerstand

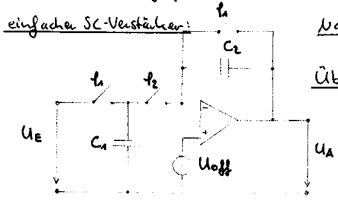
- alternativ Sensorregelung über konstante Temperatur, dann abnehmende Heizleistung $P = U \cdot I$ proportional zur Gaskonzentration
- Funktionsprinzip: Das anwesende Gas reagiert mit der Pellistoroberfläche. Die dabei entstehende Reaktionswärme führt zu einer Temperaturerhöhung ($\Delta T \sim n$). Die Oberflächenkonzentration sind z.T. identisch mit denen auf der HL-Sensoroberfläche, d.h. gleiche Oberflächenphysik aber unterschiedliche physikalischen Auswertungen der Effekte (Reaktionswärme, Ladungsträgeränderung).
- Anwendung: z.B. Gasanalyse, Erdgasdetektion



(3) SC-Schaltungstechnik

b) Skizzieren Sie die Schaltung eines einfachen SC-Verstärkers! Leiten Sie einen analytischen Ausdruck für die Verstärkung her! Berücksichtigen Sie dabei die Nichtlinearitäten und internen Rauschquellen des OPV mit Hilfe einer zusätzlichen Spannungsquelle!

einfacher SC-Verstärker:



Nachteil: U_{off} wird ebenfalls mit dem $\frac{C_1}{C_2}$-Verhältnis mitverstärkt!

Überlagerungssatz (Superposition):

$$U_A(t_2) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_E(t_1) + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \cdot U_{off}(t_2)$$

Berechnung der Verstärkung ohne Superpos.:

a) zunächst ohne U_{off} zu berücksichtigen $\int_{U_A(0)}^{U_A(t)} 1 dU_A = \frac{1}{R_1 \cdot C_2} \cdot \int_0^{t'} U_E(t) dt$

$\Leftrightarrow U_A(t) - U_A(0) = \frac{1}{R_1 \cdot C_2} \cdot U_E \cdot t'$, weil $U_E = $ konst.

$\Rightarrow$ Verstärkung: $\boxed{v = \frac{U_A}{U_E} = -\frac{t'}{R_1 \cdot C_2} = -\frac{t'}{\tau} = -\frac{C_1}{C_2} \cdot f \cdot t' = -\frac{C_1}{C_2}}$ mit $f \cdot t' = 1$

$\Leftrightarrow f \cdot t' = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{T} \cdot t' = 1 \Rightarrow t' = T \quad U_A(t') = -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_E$ (invertierender OP)

b) mit Berücksichtigung von U_{off} $\int_{U_A(0)}^{U_A(t)} dU_A = -\frac{1}{R_1 \cdot C_2} \cdot \int_0^{t'} (U_E - U_{off}) dt + U_{off}$

$\Leftrightarrow \int_{U_A(0)}^{U_A(t)} dU_A - U_{off} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_2} \int_0^{t'} (U_E - U_{off}) dt \Leftrightarrow U_A(t) - U_A(0) - U_{off} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_2} (U_E - U_{off}) \cdot t'$

$\Leftrightarrow \frac{U_A - U_{off}}{U_E - U_{off}} = -\frac{t'}{R_1 \cdot C_2} = \frac{t'}{\tau} = -\frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow U_A - U_{off} = -\frac{C_1}{C_2} (U_E - U_{off})$

$\Leftrightarrow U_A(t) = -\frac{C_1}{C_2} (U_E - U_{off}) + U_{off} \Leftrightarrow U_A(t) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot U_E + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \cdot U_{off}$

c) Verbesserte SC-Verstärker-Schaltung:

Lösung Seite 5!

(4) Temperatursensoren

c) „Digitale" Auflösung: geg: $T_{max} = 60°C$; (1) $U_A = 10V$ mit 10 Bit A/D Bereich 0-10V

ges: bessere Auflösung ΔT (2) $U_B = 0{,}4V$ direkt mit 16 Bit A/D Bereich 0-10V

(1) 10 Bit: $\Delta U = \frac{10V}{2^{10}-1} = 9{,}78 \frac{mV}{Step}$

$1 \cdot 10V = 10V$

$\Rightarrow 1 = \frac{10V}{10V}$! $\Delta T = \frac{60°C \cdot 1}{2^{10}-1} \Rightarrow \boxed{\Delta T = 0{,}059 \frac{°C}{Step}}$

(2) 16 Bit: $\Delta U = \frac{0{,}4V}{2^{16}-1} = 6{,}1 \frac{\mu V}{Step}$

$25 \cdot 0{,}4V = 10V$

$\Rightarrow 25 = \frac{10V}{0{,}4V}$! $\Delta T = \frac{60°C \cdot 25}{2^{16}-1} \Rightarrow \boxed{\Delta T = 0{,}023 \frac{°C}{Step}}$ $\Rightarrow$ bessere Auflösung!

d) „Analoge" Auflösung: geg: $T_{max} = 60°C$; (1) $U_A = 10V$ mit Handmultimeter Bereich 0-10V (3 Nachkommastellen genau)

ges: Auflösung ΔT und Vergleich mit c) (2) $U_B = 0{,}4V$ direkt mit Handmultimeter; Bereich 0-1000mV auf 0,1 mV genau

(1) 0-10V $\Rightarrow$ 1mV genau $\Rightarrow$ 10.000 Steps, weil $U_A = 10V$

$\Rightarrow 10.000 = \frac{10V}{1mV}$!

$\Delta T = \frac{60°C}{10.000 \text{ Steps}} \Rightarrow \boxed{\Delta T = 0{,}006 \frac{°C}{Step}}$

(2) 0-1.000mV $\Rightarrow$ 0,1mV genau $\Rightarrow$ 4000 Steps, weil $U_B = 0{,}4V$

$\Rightarrow 4000 = \frac{0{,}4V}{0{,}1mV}$!

$\Delta T = \frac{60°C}{4000 \text{ Steps}} \Rightarrow \boxed{\Delta T = 0{,}015 \frac{°C}{Step}}$

$\Rightarrow$ Die „analoge" Auflösung mit dem Handmultimeter ist in beiden Fällen (1), (2) besser als die Werte der „digitalen" Auflösung mit dem A/D-Wandler.

b) Dimensionieren Sie R1 - R7 mit möglichst wenig (min = 2 R-Werte) unterschiedlichen Widerstandswerten so, dass bei erreichen von T_{max} die Ausgangsspannung $U_A = 10V$ beträgt!

Brückenschaltung siehe Seite 8

Instrumentenverstärker:

Ausgangsspannung des Differenzverstärkers dieser Schaltung

$$\Rightarrow U_A = \frac{R_4}{R_3} (U_2' - U_1')$$

U_1' und U_2' sind die Ausgangsspannungen der Impedanzwandler OPV1, OPV2

I. Sei nun $U_2 = 0 \wedge U_1 \neq 0 \Rightarrow$ OPV1 arbeitet als nicht invertierender V.

$$\Rightarrow U_1' = U_1 \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Die mit dem invertierenden Eingang von OPV2 verbundene Seite von R_1 liegt wegen $U_2 = 0$ an virtueller Erde an. Wegen $U_E^+ = U_E^-$ gilt bei OPV1 $U_E = U_1$; $I_E = \frac{U_1}{R_1}$; I_E fließt durch den Gegenkoppelwiderstand R_2 von OPV2

$$\Rightarrow U_2' = -R_2 \cdot I_E = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_1$$

$$U_A = \frac{R_4}{R_3} (U_2' - U_1') = \frac{R_4}{R_3} \left(-\frac{R_2}{R_1} \cdot U_1 \cdot U_1 - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_1\right) \Leftrightarrow \boxed{U_A = -\frac{R_4}{R_3} \left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot U_1}$$

II. Sei nun $U_1 = 0 \wedge U_2 \neq 0 \Rightarrow U_A = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot U_2$

$\Rightarrow$ I. und II. Betrachtung liefert $\boxed{U_A = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right) (U_2 - U_1)}$

bzw. $R_4 = R_6 \wedge R_5 = R_7$

(6) Zusatzaufgabe (Wärmestrahlung):

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Planckschen Gleichung das Wiensche Verschiebungsgesetz: $\lambda_{max} \cdot T = $ konst. $= 2898 \mu m K$

$$\Rightarrow \boxed{L_{e,\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \frac{2h \cdot c^2}{\lambda^5 \Omega_0} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1} d\lambda} \Rightarrow \text{Ableitung!}$$

Planck'sche Strahlungsgleichung

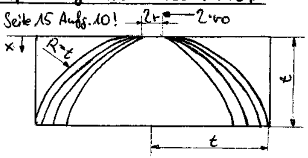
b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Planckschen Gleichung das Stefan-Boltzmann-Gesetz: emittierte Strahlleistung $P_e \sim \sigma \cdot A \cdot T^4$

$\sigma = $ Stefan Boltzmann-Konstante $= 5{,}6703 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$

$\Rightarrow$ Integration!

2 Spreading-Resistance-Prinzip:

$\Rightarrow$ Seite 15 Aufg. 10!



Herleitung über 1. Maxwell-Gleichung der E-Statik:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \times \underline{E} = 0 \Leftrightarrow \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \phi(\underline{r})$$

$$\Rightarrow \delta\phi(r) = -\int \underline{E} d\underline{r} = U$$

Hier nur eine Dimension relevant (x-Richtung)

$\Rightarrow U = -\int_{r_0}^{t} E dr \quad t$: Probendicke

$E = ?$ Verwende 2. Maxwellgleichung: $\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \underline{E} = \frac{\varrho(r)}{\varepsilon} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

$\varrho(r)$: Ladungsdichte $\frac{\text{Anzahl}}{\text{Volumen}}$ Ladung: $q = \int \varrho(r) d^3r = \varrho \cdot V$

Wende Gauß'schen Integralsatz an: $\Rightarrow \iiint_V \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \underline{E}(r) d^3r = \oiint_A \underline{E}(\underline{r}) d^2r$

$\frac{q}{\varepsilon} = \oiint E(r) d^2r = E \oiint 1 d^2r = E \cdot 4\pi \cdot r^2$

$\boxed{E = \frac{q}{4\pi \varepsilon \cdot r^2}}$ für Ladung in einer Kugel, Wir haben aber nur eine Halbkugel $\Rightarrow$ nur die halbe Oberfläche

$\boxed{E = \frac{q}{2\pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon} = \varrho \cdot j = \varrho \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r^2}}$ $\boxed{V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$ $\boxed{A_{Kugel} = \frac{dV}{dr} = 4\pi \cdot r^2}$

$U = -\int_{r_0}^{t} \frac{q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} dr = \frac{q}{2\pi \cdot \varepsilon} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{t}\right] \xrightarrow{t \gg r_0} \frac{q}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot r_0} \quad \Rightarrow U = -\int_{r_0}^{t} \frac{\varrho}{2\pi \cdot r^2} dr \cdot I$

$U = R_{SR} \cdot I \quad \Rightarrow R_{SR} = -\int_{r_0}^{t} \frac{\varrho}{2\pi \cdot r^2} dr = \frac{\varrho}{2\pi} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{t}\right] \quad \boxed{R_{SR} = \frac{\varrho}{2\pi \cdot r_0}} \; t \gg r_0$

geg: $r = 10 \mu m = 1 \cdot 10^{-3} cm$; $t = 250 \mu m = 25 \cdot 10^{-3} cm$; $\varrho = 6{,}5 \Omega cm$

ges: Widerstandswert R_{SR}

$R_{SR} = \frac{\varrho}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{t}\right) \Rightarrow \boxed{R_{SR} = 0{,}993 k\Omega}$

Ergänzungen:

HL-Temp.-Sensor nach dem Spreading-Resistance Prinzip:

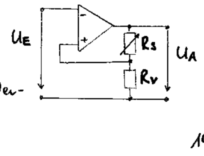
Vorteil: Widerstand ist unabhängig von der Substratdicke t

$\Delta U = -\int_0^x E dr \quad E(r) = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot r^2} \quad U = -\int_{d/2}^{t} \frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot r^2} dr = \frac{\varrho \cdot I}{2\pi \cdot r} \left[\frac{1}{d/2} - \frac{1}{t}\right]$

$\Rightarrow R = \frac{\varrho}{2 \cdot \pi} \left[\frac{1}{d/2} - \frac{1}{t}\right]_{t \gg d/2} = \frac{\varrho}{\pi \cdot d}$

OP (nicht-invertierend):

$\boxed{U_A = \left(1 + \frac{R_S}{R_V}\right) \cdot U_E}$ Herkunft: aus Spannungsteiler-Betrachtung folgt:



$U_E^- = \frac{R_V}{R_V + R_S} \cdot U_A$

$U_E^+ = U_E = U_E^-$ weil $\Delta U \approx 0$

Vorteil: ebenfalls lineare Verstärkung bezogen auf R_S - V ist stets ≥ 1

$U_A = \left(1 + \frac{R_S}{R_V}\right) \cdot U_E$