

## 2 Kinematik des Massenpunktes



### Lehrziel des Kapitels

- Bewegung des Massenpunktes
- Kinematik, die Geometrie der Bewegung
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem, in krummlinigen Koordinaten und in Polarkoordinaten

$f(x) = \bullet$  • Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  (2. 1)

• Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$  (2. 2)

• Beschleunigungsvektor  $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  (2. 5)

• Kartesisches Koordinatensystem  
 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$  (2. 6)

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$   
 $= v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y + v_z(t)\vec{e}_z$  (2. 7)

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$   
 $= a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y + a_z(t)\vec{e}_z$  (2. 8)

**Beträge der Vektoren**  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ,  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$   
 (2. 9)

• **Krummlinige Koordinaten**

Ortsvektor  $\vec{s} = \rho \vec{e}_\phi$   
 $\dot{\vec{s}} = \vec{v} = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\phi}{dt} = \rho \dot{\phi}$   
 $\frac{\dot{\vec{s}}}{\rho} = \dot{\phi}$  (2. 75)

**Tangentiale Geschwindigkeit**  
 $\vec{v} = v \vec{e}_t = \dot{\vec{s}} = \dot{s} \vec{e}_t$  (2. 77)

**Bahngeschwindigkeit**  
 $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ , (2. 78)

**Beschleunigung**  
 $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{s} \vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{e}_n = \dot{v} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$  (2. 79)

• **Polarkoordinaten**

Ortsvektor  $\vec{r} = r \vec{e}_r$  (2. 86)

Geschwindigkeit  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$  (2. 87)

Bahngeschwindigkeit  $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\phi})^2}$  (2. 87a)

Beschleunigung  $\vec{a} = [\ddot{r} - r \dot{\phi}^2] \vec{e}_r + [2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}] \vec{e}_\phi$  (2. 89)

Die Bewegung des Massenpunktes wird durch die Geometrie der Bewegung, der Kinematik, mit Vektoren,

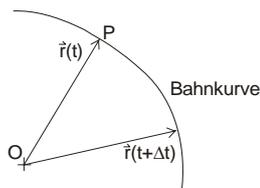


Bild 2. 1 Massenpunkt auf der Bahnkurve

dem Ortsvektor

$\vec{r} = \vec{r}(t)$  (2. 1)

und dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$

$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$  (2. 2)

beschrieben, wobei die Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt gekennzeichnet

wird.

Der Geschwindigkeitsvektor ist durch den Grenzwert der zeitlichen Änderung des Ortsvektors definiert. Die Änderung  $\Delta \vec{r}$  des Ortsvektors im Grenzfalle  $\Delta t \rightarrow 0$  in Richtung der Tangente führt auf die tangential zur Bahnkurve stehende Geschwindigkeit  $\vec{v}$  (mit positivem Vorzeichen in Richtung des Durchlaufsinns des Punktes auf der Bahn).

Ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors gefragt, wird der Quotient des von einem Punkt auf der Bogenlänge  $s$  aus zurückgelegten Weges  $\Delta s$  auf der Bahn pro Zeitintervalls  $\Delta t$  betrachtet. Der Punkt hat zum Zeitpunkt  $\Delta t$  den Weg  $s + \Delta s$  zurückgelegt.

Damit gilt für die Bahngeschwindigkeit  $|\vec{v}|$

$|\vec{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$  (2. 3)

und hat die Dimension  $[\frac{m}{s}]$  oder  $[\frac{km}{h}]$ .

Als Umrechnung gilt

$1 \frac{km}{h} = \frac{1000}{3600} \frac{m}{s} = 0,278 \frac{m}{s}$  oder  $1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$ . (2. 4)

Die Geschwindigkeit hängt ebenfalls von der Zeit  $t$  ab  $\vec{v} = \vec{v}(t)$ . Für die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit wird wieder ein Grenzwert bestimmt, der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  (2. 5)

mit der Dimension  $[\frac{m}{s^2}]$ , z. B. die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Im kartesischen Koordinatensystem mit  $\dot{\vec{e}}_i = 0$  und  $\ddot{\vec{e}}_i = 0$ :

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$  (2. 6)

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y + v_z(t)\vec{e}_z$  (2. 7)

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z = a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y + a_z(t)\vec{e}_z$  (2. 8)

Die Beträge der Vektoren sind

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ,  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$  (2. 9)

### 2. 1 Geradlinige Bewegung

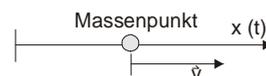


Bild 2. 2 x- Achse fällt mit der Bahn zusammen

Hier ergibt sich der Weg zu

$\vec{r}(t) = x(t) = r$ , (2. 10)

die Geschwindigkeit zu

$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$  (2. 11)

und die Beschleunigung zu

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$  (2. 12)

Eine negative Beschleunigung entspricht einer Verzögerung, dem Abbremsen.

### 2. 2 Ermittlung der Bewegung bei gegebener Beschleunigung

#### 2. 2. 1 Gleichförmige Bewegung $a = 0$

$a = 0 \Rightarrow v = \int_a dt + v_0 = v_0 \Rightarrow x = v_0 t + x_0$  (2. 13)



#### Beispiel

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem
- Gleichförmige Bewegung

Der Mindestabstand zwischen zwei Kraftfahrzeugen soll so groß sein wie die Strecke, die das nachfolgende Fahrzeug innerhalb von  $t_s$  bei seiner jeweiligen Geschwindigkeit zurücklegt; für welche Zeit befindet sich ein PKW der Länge  $l_1$ , das mit konstanter Geschwindigkeit  $v_1$  fährt, mindestens auf der Überholspur, wenn er einen LKW (Länge  $l_2$ , Geschwindigkeit  $v_2$ ) korrekt überholt? Die Zeiten für das Wechseln der Spuren bleiben unberücksichtigt.

gegeben:  $l_1 = 5\text{ m}$ ,  $l_2 = 15\text{ m}$ ,  $v_1 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $v_2 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $t_s = 2\text{ s}$

gesucht: Bestimmung der Länge der Überholstrecke

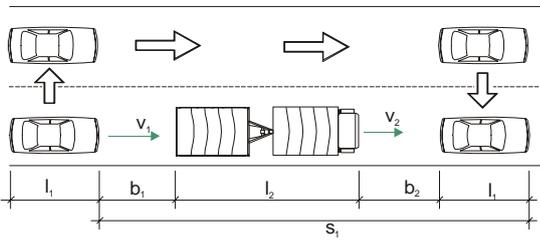


Bild 2.3 Abstände zwischen zwei Kraftfahrzeugen

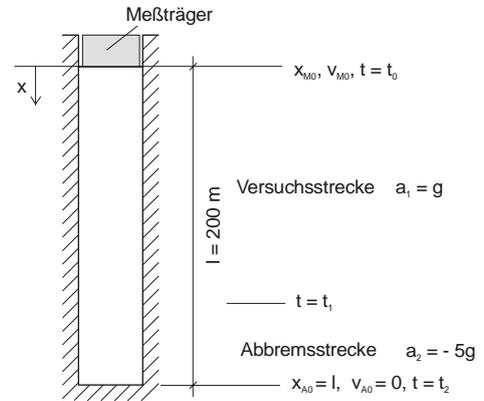


Bild 2.4 Vakuum- Fallschachanlagen zur Simulation schwerelos Zustände

### Lösung

Der Mindestabstand  $b_1$ , bzw.  $b_2$  ist

$$b_1 = v_1 t_s = \frac{120}{3,6} \cdot 2\text{ m} = \frac{200}{3}\text{ m}, \quad b_2 = v_2 t_s = \frac{80}{3,6} \cdot 2\text{ m} = \frac{400}{9}\text{ m}. \quad (2.14)$$

Die relative Überholstrecke ist

$$s_1 = b_1 + l_1 + b_2 + l_2 = 131,11\text{ m} \quad (2.15)$$

Die relative Überholgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v_s = v_1 - v_2 = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{40}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (2.16)$$

Damit ist Überholzeit

$$t_1 = \frac{s_1}{v_s} = \frac{131,11}{40} \cdot 3,6\text{ s} = 11,8\text{ s}, \quad (2.17)$$

und die absolute Überholstrecke

$$x_1 = v_1 t_1 = \frac{120}{3,6} \cdot 11,8\text{ m} = 393,33\text{ m}. \quad (2.18)$$

### 2.2.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung $a = a_0 = \text{const.}$

$$a = a_0 = \text{const.} \Rightarrow v = \int_{(t)} a_0 d\tau = a_0 t + v_0 \quad (2.19)$$

Daraus folgt

$$x = \int_{(t)} (a_0 \tau + v_0) d\tau = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0. \quad (2.20)$$

#### Beispiel

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem
- Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Zur Simulation schwerelos Zustände werden Vakuum- Fallschachanlagen (Tiefe  $l = 200\text{ m}$ ) benutzt.

gegeben:  $l = 200\text{ m}$ ,  $a_2 = -5\text{ g}$

gesucht: Bestimmung der maximalen Versuchszeit  $t_1$  im freien Fall, die zur Verfügung steht, wenn der Versuchskörper nach dem Durchfallen der Messstrecke mit  $a_2$  auf  $v = 0$  abgebrems wird.

### Lösung

Die Bewegungsgleichungen der Messstrecke erfolgen durch Integration

$$a_1 = a_M = g, \quad v_M = g t + v_{M0}, \quad x_M = g \frac{t^2}{2} + v_{M0} t + x_{M0}, \quad (2.21)$$

mit den Anfangsbedingungen ( $t = t_0 = 0$ )

$$x_M(t=0) = x_{M0} = 0, \quad v_M(t=0) = v_{M0} = 0 \quad (2.22)$$

Daraus ergibt sich der Geschwindigkeitsverlauf in der Messstrecke zu

$$v_M = g t \quad (2.23)$$

und der Wegverlauf in der Messstrecke

$$x_M = g \frac{t^2}{2}. \quad (2.24)$$

Die Bewegungsgleichungen der Abbremsstrecke ergeben sich durch Integration

$$a_2 = a_A = -5\text{ g}, \quad v_A = a_2 t + v_{A0}, \quad x_A = a_2 \frac{t^2}{2} + v_{A0} t + x_{A0}, \quad (2.25)$$

mit den Endbedingungen ( $t = t_2$ )

$$v_A(t=t_2) = 0 \Rightarrow v_{A0} = -a_2 t_2 \quad (2.26)$$

$$x_A(t=t_2) = l \Rightarrow x_{A0} = l - a_2 \frac{t_2^2}{2} - (-a_2 t_2) t_2 = l + a_2 \frac{t_2^2}{2} \quad (2.27)$$

Daraus folgt Geschwindigkeitsverlauf in der Abbremsstrecke

$$v_A = a_2 t - a_2 t_2 \quad (2.28)$$

und Wegverlauf in der Abbremsstrecke

$$x_A = a_2 \frac{t^2}{2} - a_2 t_2 t + a_2 \frac{t_2^2}{2} + l. \quad (2.29)$$

Mit den Übergangsbedingungen

$$v_M(t=t_1) = v_A(t=t_1) \quad (2.30)$$

folgt

$$g t_1 = a_2 t_1 - a_2 t_2 \quad (2.31)$$

$$t_2 = (a_2 - g) \frac{t_1}{a_2} \quad (2.32)$$

und mit

$$x_M(t=t_1) = x_A(t=t_1) \quad (2.33)$$

folgt

$$g \frac{t_1^2}{2} = a_2 \frac{t_1^2}{2} - a_2 t_2 t_1 + a_2 \frac{t_2^2}{2} + l \\ = a_2 \frac{t_1^2}{2} - a_2 (a_2 - g) \frac{t_1}{a_2} t_1 + a_2 \left( \frac{a_2 - g}{a_2} \right)^2 \frac{1}{2} t_1^2 + l. \quad (2.34)$$

Nach  $t_1$  aufgelöst

$$\frac{t_1^2}{2} \left[ g - a_2 + 2(a_2 - g) - \frac{(a_2 - g)^2}{a_2} \right] = l \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2la_2}{g(a_2 - g)}} = 3,71\text{ s} \quad (2.35)$$

### 2.2.3 Zeitabhängige Beschleunigung $a = a(t)$

Aus der unbestimmten Integration folgt der Geschwindigkeitszeit- und Wegzeitverlauf

$$a = a(t) \Rightarrow v = \int_{(t)}^{\tau} a(\tau) d\tau + v_0 \Rightarrow x = \int_{(t)}^{\tau} v(\tau) d\tau + x_0 \quad (2.36)$$

**Beispiel**

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem
- Zeitabhängige Beschleunigung

Ein Kraftfahrzeug erreicht beim Beschleunigen aus dem Stand ( $v_0(t_0=0) = 0$ ) nach  $t_e$  seine Höchstgeschwindigkeit von  $v_e$ .

gegeben:  $v_e = 162 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $t_e = 45 \text{ s}$

gesucht: Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Beschleunigung  $a(t)$  linear mit der Zeit  $t$  von einem Anfangswert  $a_0 = a(t_0=0)$  abnimmt, ist die Strecke zu berechnen, nach der das Fahrzeug  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  erreicht hat.

**Lösung**

Der Beschleunigungszeitverlauf ist

$$a(t) = a_0 - \alpha t, \quad (2.37)$$

bei Höchstgeschwindigkeit ist  $a(t = t_e) = 0$  und  $\alpha = \frac{a_0}{t_e}$ , dann ergibt sich die Beschleunigung zu

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{t_e}\right). \quad (2.38)$$

Nach Integration ergibt sich die Geschwindigkeit mit  $v_0 = 0$

$$v(t) = \int_{(t)}^{\tau} a(\tau) d\tau + v_0 = \int_{t_0=0}^t a_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_e}\right) d\tau = a_0 t \left(1 - \frac{t}{2t_e}\right) \quad (2.39)$$

Aus der Geschwindigkeit  $v_e$ , bei Beschleunigungsende folgt

$$v_e = v(t = t_e) = a_0 \frac{t_e}{2} \Rightarrow a_0 = 2 \frac{v_e}{t_e} = 2 \frac{162}{3,6 \cdot 45} = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad (2.40)$$

Die Beschleunigungszeit  $t_{100}$  zum Beschleunigen auf  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  folgt aus (2.39)

$$v_{100} = v(t=t_{100}) = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = a_0 t_{100} \left(1 - \frac{t_{100}}{2t_e}\right). \quad (2.41)$$

Damit ist

$$t_{100}^2 - 2 t_e t_{100} + 2 \frac{v_{100}}{a_0} t_e = 0, \quad (2.42)$$

$$t_{100} = t_e \pm \sqrt{t_e^2 - 2 \frac{v_{100}}{a_0} t_e}. \quad (2.43)$$

Nur das negative Vorzeichen gilt, da  $t_{100} < t_e$  sein muß

$$t_{100} = t_e \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v_{100}}{v_e}}\right) = 17,16 \text{ s} \quad (2.44)$$

Damit ist der Wegzeitverlauf mit  $x_0 = 0$

$$x(t) = \int_{(t)}^{\tau} v(\tau) d\tau + x_0 = \int_{t_0}^t a_0 \left(\tau - \frac{\tau^2}{2t_e}\right) d\tau = a_0 \frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{t}{3t_e}\right), \quad (2.45)$$

und die Beschleunigungsstrecke auf  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$x(t=t_{100}) = x_{100} = a_0 \frac{t_{100}^2}{2} \left(1 - \frac{t_{100}}{3t_e}\right) = 257,04 \text{ m}. \quad (2.46)$$

### 2.2.4 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung $a = a(v)$

Aus einer geschwindigkeitsabhängigen Beschleunigung läßt sich durch Trennung der Variablen nach der Zeit integrieren

$$a(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow t = \int_{v_0}^v \frac{d\eta}{a(\eta)} + t_0 = f(v), \quad (2.47)$$

mit der Umkehrfunktion folgt

$$v = F(t). \quad (2.48)$$

Mit der Kettenregel kann weiter der Weg berechnet werden

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow dx = \frac{v}{a} dv, \quad (2.49)$$

dann folgt

$$x = \int_{v_0}^v \frac{v d\eta}{a(\eta)} + x_0 \Rightarrow x = \int_{v_0}^v F(t) dt + x_0 \quad (2.50)$$

**Beispiel**

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem
- Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

Die Beschleunigung eines freifallenden Körpers unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes läßt sich näherungsweise aus der Formel  $a(v) = g - \alpha v^2$  berechnen. Die Konstante  $\alpha$  hängt unter anderem vom Gewicht, den Abmessungen des fallenden Körpers und von der Dichte der Luft ab.

gegeben:  $g, \alpha$

gesucht: Bestimmung der Fallgeschwindigkeit  $v(t)$  eines freifallenden Körpers, der zur Zeit  $t = 0$  losgelassen wird.

**Lösung**

$$a(v) = g - \alpha v^2 = \alpha \left(\frac{g}{\alpha} - v^2\right) \quad (2.51)$$

mit  $\beta^2 = \frac{g}{\alpha}$  und  $|\eta| < \beta$

$$t = \int_{v_0}^v \frac{d\eta}{a(\eta)} + t_0 = \int_0^v \frac{d\eta}{\alpha \left(\frac{g}{\alpha} - \eta^2\right)}, \quad (2.52)$$

Mit der Lösung aus einer Formelsammlung<sup>2.1</sup> folgt für Integrale mit  $a^2 \pm x^2$

$$t = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + \eta}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - \eta} \right| \Big|_0^v = \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} \right| = \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} \right|. \quad (2.53)$$

Die Auflösung nach  $v$  ergibt

$$2 \sqrt{g\alpha} t = \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} \right| \Rightarrow e^{2\sqrt{g\alpha} t} = \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v}. \quad (2.54)$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{e^{2\sqrt{g\alpha} t} - 1}{e^{2\sqrt{g\alpha} t} + 1}. \quad (2.55)$$

Die Kontrolle erfolgt mit zwei Grenzbetrachtungen für die Geschwindigkeit bei  $t = 0$

$$v(t=0) = 0 \quad (2.56)$$

und für die Geschwindigkeit bei  $t \rightarrow \infty$

$$v(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}. \quad (2.57)$$

### 2.2.5 Wegabhängige Beschleunigung $a = a(x)$

Die wegabhängige Beschleunigung läßt sich nach Umformung mit der Kettenregel

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow a dx = v dv \quad (2.58)$$

und nach Integration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit schreiben

<sup>2.1</sup> I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, Taschenbuch der Mathematik, Taschenbuch- Harri Deutsch, Ffm, 2000

$$\frac{1}{2} v^2 = \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi + \frac{1}{2} v_0^2. \quad (2.59)$$

Aus  $v = \frac{dx}{dt}$  folgt

$$dt = \frac{dx}{v} \quad (2.60)$$

und nach Integration folgt aus der Umkehrfunktion  $x = G(t)$  die Zeit

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2f(\xi)}} + t_0 = g(x) \quad (2.61)$$

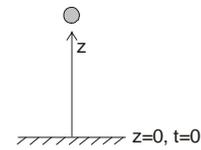


Bild 2.6 Senkrechter Wurf

Nach der Integration ergibt sich die Geschwindigkeit

$$v = -g t + v_0 \quad (2.69)$$

und mit  $z_0 = 0$  der Weg

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t. \quad (2.70)$$

Dann ist die Steigzeit bei  $v = 0$  am Umkehrpunkt

$$T = \frac{v_0}{g}, \quad (2.71)$$

die Wurfzeit

$$T_{\text{ges}} = 2 T = 2 \frac{v_0}{g}, \quad (2.72)$$

die Steighöhe

$$H = -g \frac{T^2}{2} + v_0 T = -g \frac{v_0^2}{2g^2} + v_0 \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (2.73)$$

und die Geschwindigkeit beim Freien Fall

$$v_0 = \sqrt{2gH}. \quad (2.74)$$

Tabelle 2.1 Verwandtschaft zwischen dem freien Fall und dem senkrechten Wurf

| Freier Fall   | Senkrechter Wurf  |
|---|---|
| Körper kommt mit der Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gH}$ auf | Körper wird mit $v_0$ abgeworfen und erreicht die Höhe $H = \frac{v_0^2}{2g}$ |

## 2.3 Bewegung auf gekrümmter Bahn

Bisher galt das kartesische Koordinatensystem mit  $\dot{\vec{e}}_i = 0$  und  $\ddot{\vec{e}}_i = 0$

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z \quad (2.6)$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \vec{e}_x + v_y(t) \vec{e}_y + v_z(t) \vec{e}_z \quad (2.7)$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \vec{e}_x + a_y(t) \vec{e}_y + a_z(t) \vec{e}_z. \quad (2.8)$$

Bei der Bewegung auf einer gekrümmten Bahn bietet sich die Verwendung krummliniger Koordinaten an.

### Herleitung

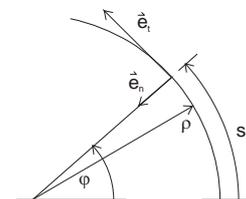


Bild 2.7 Krummliniger Koordinaten mit der Bogenlänge  $s$ , dem Krümmungsradius  $\rho$ , dem Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die Bahn  $\vec{e}_t$ , dem Einheitsvektor in Richtung der Hauptnormalen der Bahn  $\vec{e}_n$

Die Bewegung auf gekrümmter Bahn mit den Richtungen der Einheitsvektoren ergeben bei der Ableitung nach der Zeit nach der Produktregel

$$ds = \rho d\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{s} = v = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho \dot{\varphi} \quad \frac{\dot{s}}{\rho} = \dot{\varphi} \quad (2.75)$$

Im Gegensatz zur Ableitung der Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem ergibt sich hier als Ableitung der Eigenvektoren nach der Zeit

$$\dot{\vec{e}}_t = \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} \vec{e}_n = \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{e}_n = \frac{v}{\rho} \vec{e}_n = \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{e}_n. \quad (2.76)$$

Die tangentielle Geschwindigkeit ergibt sich damit zu

$$\vec{v} = v \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t, \quad (2.77)$$

die Bahngeschwindigkeit

**Beispiel**

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem
- Wegabhängige Beschleunigung

Die Beschleunigung  $a$  des Kolbens ist proportional dem jeweiligen Gasdruck  $a = c_0 p$ . Für den Gasdruck gilt die Abhängigkeit  $pV = \text{const.} = C$  ( $V$  Gasvolumen)

gegeben:  $a = c_0 p$ ,  $pV = \text{const.} = C$

gesucht: Bestimmung der Kolbengeschwindigkeit  $v$  in einem Zylinder bei expandierender Gasfüllung.

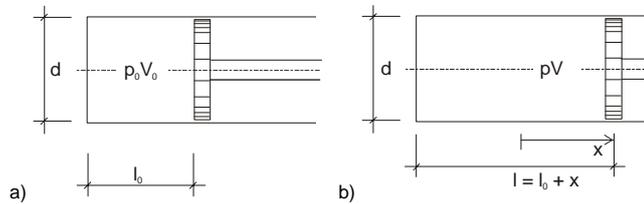


Bild 2.5 Kolben im Zylinder bei expandierender Gasfüllung; a) Kolben im Ausgangszustand  $t = 0$ ; b) Kolben zum Zeitpunkt  $t$

**Lösung**

Der Ausgangszustand zur Zeit  $t=0$  wird wie folgt beschrieben

$$p_0, V_0, l_0, v_0 = 0. \quad (2.62)$$

Das Gasgesetz lautet

$$p_0 V_0 = p_0 \frac{\pi d^2}{4} l_0 = C \quad (2.63)$$

$$\text{mit } V_0 = \frac{\pi d^2}{4} l_0, V = \frac{\pi d^2}{4} (l_0 + x) \text{ folgt}$$

$$pV = p \frac{\pi d^2}{4} (l_0 + x) = C \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \frac{l_0}{l_0 + x}. \quad (2.64)$$

Mit  $a_0 = a(x=0)$  ergibt sich

$$a = c_0 p = c_0 p_0 \frac{l_0}{l_0 + x} = a_0 \frac{1}{1 + \frac{x}{l_0}} \quad (2.65)$$

Die Kolbengeschwindigkeit ist

$$\frac{1}{2} v^2 = \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi + \frac{1}{2} v_0^2 = \int_0^x \frac{a_0}{1 + \frac{\xi}{l_0}} d\xi = l_0 a_0 \ln\left(1 + \frac{x}{l_0}\right), \quad (2.66)$$

daraus folgt

$$v(x) = \sqrt{2l_0 a_0 \ln\left(1 + \frac{x}{l_0}\right)}. \quad (2.67)$$

## 2.2.6 Sonderfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

### Senkrechter Wurf

$$a = -g = -9,81 = \text{const.} \quad (2.68)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad (2.78)$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + v \dot{\vec{e}}_t = \dot{v} \vec{s} + \dot{s} \vec{e}_t + \dot{s} \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{e}_n. \quad (2.79)$$

Die Beschleunigung wirkt in zwei Richtungen, die durch die zwei Komponenten unterschieden werden, die tangentiale Bahnbeschleunigung

$$a_t = \dot{v} \quad (2.80)$$

und die Normal- oder Zentripetalbeschleunigung

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.81)$$

### Sonderfall der ebenen Bewegung

Jetzt werden nochmals neue krummlinige Koordinaten, die Polarkoordinaten, eingeführt. Der Einheitsvektor  $\vec{e}_r$  wirkt in Richtung  $\vec{r}$ , der Einheitsvektor  $\vec{e}_\varphi$  wirkt senkrecht zu  $\vec{r}$ . Sie eignen sich besonders bei kreisförmigen Bahnkurven.

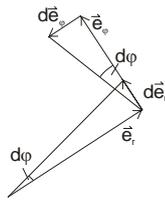


Bild 2. 8 Ebene Bewegung in Polarkoordinaten allgemein

Im Gegensatz zur Ableitung der Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem ergibt sich auch hier Ableitungen der Eigenvektoren nach der Zeit

$$d \vec{e}_r = |e_r| d\varphi \vec{e}_\varphi = d\varphi \vec{e}_\varphi \quad (2.82)$$

und

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d \vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad (2.83)$$

$$d \vec{e}_\varphi = |e_\varphi| d\varphi (-\vec{e}_r) = -d\varphi \vec{e}_r \quad (2.84)$$

und

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d \vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_r = -\dot{\varphi} \vec{e}_r. \quad (2.85)$$

Damit ergeben sich die folgenden Größen nach Differentiation mit Hilfe der Produktregel

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (2.86)$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (2.87)$$

mit der Bahngeschwindigkeit

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2} \quad (2.87a)$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi = [\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2] \vec{e}_r + [2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}] \vec{e}_\varphi \quad (2.88)$$

mit  $\dot{\varphi} = \omega$

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r \omega^2] \vec{e}_r + [2\dot{r} \omega + r \dot{\omega}] \vec{e}_\varphi \quad (2.89)$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung setzen sich also jeweils aus einer radialen und einer zirkularen Komponente zusammen.

### Anwendung der Zentralbewegung: die zirkulare Komponente der Beschleunigung a wird Null

$$(2 \dot{r} \omega + r \dot{\omega}) \vec{e}_\varphi = 0 \Rightarrow r^2 \omega = \text{const.} \quad (2.90)$$

### Beweis

$$\frac{d}{dt}(r \omega) = 0 \Rightarrow \dot{r} \omega + r \dot{\omega} + r \omega = 0 \quad | : r \quad (2.91)$$

Daraus folgt

$$2 \dot{r} \omega + r \dot{\omega} = 0 \quad (2.92)$$

Die Beschleunigung dieser ebenen Bewegung ist stets zentral gerichtet.

## 2. KEPLERSches Gesetz

"Bei der Zentralbewegung überstreicht der Ortsvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen."

### Sonderfall der Kreisbewegung

Bedingung ist der konstante Radius

$$\rho = r = \text{const.} \Rightarrow \dot{\rho} = \dot{r} = 0 \quad (2.93)$$

mit der Normalgeschwindigkeit  $v$ , der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \omega$  und der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \alpha$  folgt der Weg

$$s = r \varphi(t), \quad (2.94)$$

die Geschwindigkeit

$$v = r \dot{\varphi} = r \omega, \quad (2.95)$$

die Tangentialbeschleunigung

$$a_t = r \ddot{\varphi} = r \dot{\omega} = r \alpha, \quad (2.96)$$

und die Normalbeschleunigung

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r \omega^2. \quad (2.97)$$

### Beispiel

- Bewegung des Massenpunktes auf gekrümmter Bahn
- Bewegung im krummlinigen Koordinaten
- Bewegung auf einer Kreisbahn

Zwei Massenpunkte  $P_1$  und  $P_2$  beginnen ihre Bewegung auf einer Kreisbahn im Punkt A in entgegengesetzter Richtung. Der Punkt  $P_1$  bewegt sich gleichmäßig beschleunigt ( $a_{1t} = \text{const.}$ ) aus seiner Ruhelage in A, der Punkt  $P_2$  dagegen mit vorgegebener konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$ .

gegeben:  $r, a_{1t} = \text{const.}, \omega_2$

gesucht: Bestimmung der tangentialen Beschleunigung  $a_{1t}$ , damit sich beide Massenpunkte wieder in B treffen, der Winkelgeschwindigkeit von  $P_1$  in B und der Normalbeschleunigungen von  $P_1$  und  $P_2$  in B

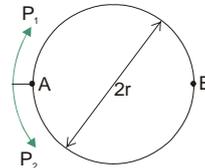


Bild 2. 9 Zwei Massenpunkte  $P_1$  und  $P_2$  auf einer Kreisbahn

### Lösung

Mit (2. 94), (2. 95), (2. 96) und (2. 97) und den Anfangsbedingungen zur Zeit  $t_A = 0$  für Punkt  $P_1$

$$s_{10} = v_{10} = 0 \quad (2.98)$$

und Punkt  $P_2$

$$s_{20} = 0, v_{20} = r \omega_2 = \text{const.} \quad (2.99)$$

folgen die Geschwindigkeiten von Punkt  $P_1$  und Punkt  $P_2$

$$v_1(t) = a_{1t} t + v_{10} = a_{1t} t \quad (2.100)$$

$$v_2(t) = v_{20} = r \omega_2 \quad (2.101)$$

und die Bogenlängen von Punkt  $P_1$  und Punkt  $P_2$

$$s_1(t) = \frac{a_{1t}}{2} t^2 + s_{10} = \frac{a_{1t}}{2} t^2 \quad (2.102)$$

$$s_2(t) = r \omega_2 t + s_{20} = r \omega_2 t. \quad (2.103)$$

Die Bedingung für das Zusammentreffen an der Stelle B ist

$$s_1(t = t_B) = \pi r = \frac{a_{1t}}{2} t_B^2 \quad (2.104)$$

$$s_2(t = t_B) = \pi r = r \omega_2 t_B. \quad (2.105)$$

Daraus folgt die Tangentialbeschleunigung für Punkt  $P_1$

$$t_B = \frac{\pi}{\omega_2} \Rightarrow a_{1t} = \frac{2\pi r}{t_B^2} = \frac{2\omega_2^2 r}{\pi} \quad (2.106)$$

Die Winkelgeschwindigkeit von Punkt P<sub>1</sub> in B folgt aus der Bahngeschwindigkeit

$$v_1(t) = a_{1t} t = r \omega_1 \Rightarrow \omega_1(t) = \frac{a_{1t}}{r} t$$

$$\Rightarrow \omega_1(t = t_B) = \frac{a_{1t}}{r} t_B = \frac{2\omega_2^2 r}{\pi r} \frac{\pi}{\omega_2} = 2 \omega_2. \quad (2.107)$$

Damit lauten die Normalbeschleunigungen in B mit von Punkt P<sub>1</sub> und Punkt P<sub>2</sub>

$$a_{1n}(t) = r \omega_1^2 \Rightarrow a_{1n}(t = t_B) = 4 r \omega_2^2, \quad (2.108)$$

$$a_{2n}(t) = r \omega_2^2 \Rightarrow a_{2n}(t = t_B) = r \omega_2^2. \quad (2.109)$$



### Beispiel

- Bewegung des Massenpunktes auf gekrümmter Bahn
- Bewegung im Polarkoordinaten
- Bewegung auf einer Kreisbahn

Ein Schwungrad (Durchmesser d) wird aus der Ruhelage gleichmäßig beschleunigt und hat nach t<sub>1</sub> eine Drehzahl n erreicht.

gegeben: d, t<sub>1</sub>, n

gesucht: Bestimmung der Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}_0$  des Rades und der Anzahl der Umdrehungen N, die das Rad in der Zeit t<sub>1</sub> macht. Bestimmung der Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einem Punkt des Umfanges zur Zeit t<sub>2</sub> (0 < t<sub>2</sub> < t<sub>1</sub>) nach dem Anlaufen

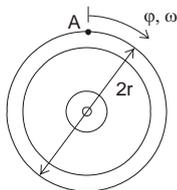


Bild 2.10 Schwungrad



### Lösung

Die Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}_0$  des Rades ist

$$\dot{\omega}_0 = \text{const.} = \frac{\omega_1}{t_1}, \quad (2.110)$$

mit  $\omega_1 = \frac{2\pi n}{60}$  und der Drehzahl  $n = \frac{1}{\text{min}}$  folgt

$$\dot{\omega}_0 = \frac{2\pi n}{60 t_1}. \quad (2.111)$$

Die Umdrehungen N in der Zeit t<sub>1</sub> sind

$$\omega = \dot{\omega}_0 t = \frac{2\pi n}{60 t_1} t \Rightarrow \varphi = \int_0^t \omega d\tau = \dot{\omega}_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow N = \frac{\varphi(t_1)}{2\pi} = \frac{1}{4} \frac{\dot{\omega}_0 t_1^2}{\pi} \quad (2.112)$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zur Zeit t<sub>2</sub> (0 < t<sub>2</sub> < t<sub>1</sub>) sind

$$v = r \omega = r \dot{\omega}_0 t \quad (2.113)$$

Zum Zeitpunkt t<sub>2</sub> sind sie

$$v(t_2) = r \dot{\omega}_0 t_2, \quad (2.114)$$

$$a_\varphi = a_\varphi(t_2) = r \dot{\omega}_0 = r \dot{\omega}_0 = \text{const.}, \quad (2.115)$$

$$a_r(t_2) = -r (\dot{\omega}_0 t_2)^2 \quad (2.116)$$

Daraus folgt

$$a(t_2) = a_{\text{ges}} = \sqrt{a_\varphi^2 + a_r^2} = r \dot{\omega}_0 \sqrt{1 + t_2^4}. \quad (2.117)$$



### Aufgabe 2.1

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem

Ein Personenzug (Geschwindigkeit v<sub>P</sub>) fährt von Station A über B und C nach D. Zwischen zwei Stationen wird die Bewegung als gleichförmig angenommen. In B und C hat der Zug jeweils Aufenthalt (t<sub>Auf</sub>). Während seines Aufenthaltes auf Station C soll der Zug einen von A nach D durchfahrenden D-Zug (Geschwindigkeit v<sub>D</sub>) vorbeilassen.

gegeben: v<sub>P</sub> = 72  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ , v<sub>D</sub> = 108  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $\overline{AB}$  = 12 km,  $\overline{BC}$  = 24 km,  $\overline{CD}$  = 18 km, t<sub>Auf</sub> = 10 min

gesucht: Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit des Personenzuges zwischen den Stationen A und D. Wann muß der D-Zug in A abfahren, damit er den Personenzug nach 5 min Aufenthalt in C passiert? Wie viele Minuten trifft der D-Zug vor dem Personenzug in D ein? Der gesamte Ablauf ist in einem s-t, bzw. v-t-Diagramm darzustellen.

Lösung: v<sub>mittel, P</sub> = 49,85  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ , Δt\*<sub>D</sub> = 10 min



### Aufgabe 2.2

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Ein Fahrzeug bewegt sich gemäß dem skizzierten Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm.

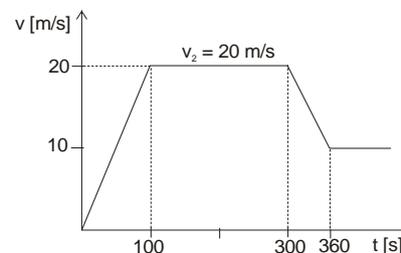


Bild 2.12 Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm

gegeben: v<sub>2</sub> = 20  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , v<sub>3</sub> = 10  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , t<sub>1</sub> = 100 s, t<sub>3</sub> = 60 s

gesucht: Man berechne die auftretenden Beschleunigungen, den in 6 min zurückgelegten Weg und zeichne die Diagramme s(t), a(t), v(s) und a(s).

Lösung: a<sub>1</sub> =  $\frac{1}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , a<sub>2</sub> = 0, a<sub>3</sub> =  $-\frac{1}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , s<sub>ges</sub> = 5900 m



### Aufgabe 2.3

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Auf der Beschleunigungsspur einer Autobahnauffahrt fährt ein PKW mit der Geschwindigkeit v<sub>1</sub>. Auf gleicher Höhe fährt ein LKW mit konstanter Geschwindigkeit v<sub>2</sub>.

gegeben: v<sub>1</sub> = 60  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ , v<sub>2</sub> = 80  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ , l = 200 m

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung a = const. des Pkws, wenn er am Ende der Beschleunigungsspur (l = 200 m) 20 m vor dem LKW auf die Autobahn überwechseln will.

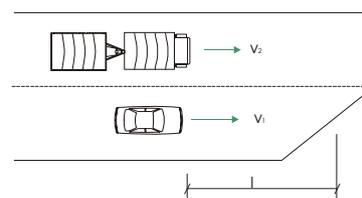


Bild 2.16 PKW auf der Beschleunigungsspur einer Autobahnauffahrt

Lösung: a = 1,98  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

**Aufgabe 2.4**

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Auf einer horizontalen Ebene fährt ein Wagen mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_{W0}$ . Wenn der Wagen in A ist, wird in der Höhe  $h$  über B ein Körper abgeworfen.

gegeben:  $l, h, v_{W0}$

gesucht: Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit  $v_{K0}$  des Körpers, wenn er in die Mitte des Wagens fallen soll.

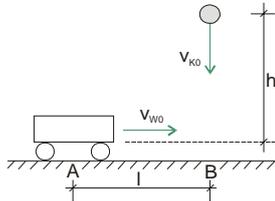


Bild 2.18 Wagen auf einer horizontalen Ebene

Lösung:  $v_{K0} = v_{W0} \frac{h}{l} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{g l^2}{h v_{W0}^2}\right)$

**Aufgabe 2.5**

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Die Besatzung eines Freiballons, der mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  steigt, will die augenblickliche Höhe  $h_0$  bestimmen. Zu diesem Zweck lässt sie einen Messkörper aus der Gondel fallen, der beim Aufschlag auf der Erdoberfläche explodiert. Nach der Zeit  $t_0$  nimmt die Besatzung die Detonation wahr.

gegeben:  $v_0 = 5 \frac{m}{s}$ , Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ ,  $t_0 = 10$  s, Schallgeschwindigkeit  $c = 333 \frac{m}{s}$

gesucht: Bestimmung der Höhe  $h_0$  und Darstellung in einem Weg- Zeit- Schaubild

Lösung:  $h_0 = 337,9$  m

**Aufgabe 2.6**

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Ein LKW hebt über ein dehnstarrs Seil (Länge  $2H$ ), das über eine masselose, kleine Rolle geführt wird, ein Gewicht an. Der LKW fährt aus dem Stand mit konstanter Beschleunigung  $a_0$  los. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  fallen die Punkte A, B und C zusammen.

gegeben:  $H$ , die Länge des Seils soll so lang sein, dass sie den Bewegungsablauf nicht beeinflusst,  $a_0$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit  $v_G(t)$  und der Beschleunigung  $a_G(t)$  des Gewichts mit der Kontrolle durch eine Grenzbetrachtung. Wie groß ist  $v_G(y)$ , bzw.  $a_G(y)$ ?

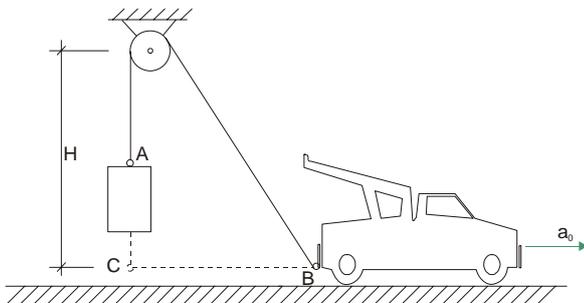


Bild 2.21 LKW hebt über ein dehnstarrs Seil ein Gewicht an

Lösung:  $v_G(t) = \frac{1}{2} \frac{a_0^2 t^3}{\sqrt{H^2 + \frac{1}{4} a_0^2 t^4}}$ ,  $a_G(t) = \frac{a_0^2 t^2 (12H^2 + a_0^2 t^4)}{\sqrt{(4H^2 + a_0^2 t^4)^3}}$

$v_G(y) = \frac{\sqrt{64y^3 a_0^6 (y + 2H)^3}}{\sqrt{y(4H^2 + a_0^2)(y + 2H)}}$ ,  $a_G(y) = \frac{a_0 \sqrt{y(y + 2H)(3H^2 + y^2 + 2yH)}}{2(H + y)^3}$

**Aufgabe 2.7**

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung in Polarkoordinaten

Ein Punkt bewegt sich auf einer ebenen Kurve  $r(\varphi)$ . Auf ihr dreht er sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \omega$ . Die Geschwindigkeit des Punktes in radialer Richtung ist  $v_0 = \text{const.}$

gegeben:  $r(\varphi), \dot{\varphi} = \omega; v_0 = \text{const.}$

gesucht: Bestimmung der Bahngeschwindigkeit  $v(t)$  des Punktes P, der Radial-  $a_r(t)$  und Zirkularbeschleunigung  $a_\varphi(t)$  von P, der Gleichung der Kurve  $r(\varphi)$  mit den Anfangsbedingungen  $\varphi(t = 0) = 0$  und  $r(t = 0) = 0$ .

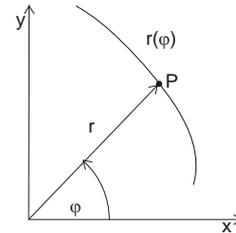


Bild 2.23 Punkt auf einer ebenen Kurve r

Lösung:  $v = v_0 \sqrt{1 + t^2 \omega^2}$ ,  $a_r = -\omega^2 v_0 t$ ,  $a_\varphi = 2\omega v_0$ ,  $r = \frac{v_0}{\omega} \varphi$

**Aufgabe 2.8**

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung in Polarkoordinaten

In einer Ebene bewegt sich ein Punkt P mit der konstanten Bahngeschwindigkeit  $v_0$  längs der Bahnkurve  $r(\varphi) = b e^\varphi$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei  $r = b$ .

gegeben:  $r(\varphi) = b e^\varphi, r(0) = b$

gesucht: Man ermittle die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  und in Abhängigkeit von  $t$  sowie die Radialgeschwindigkeit  $\dot{r}$ .

Lösung:  $\dot{\varphi}(\varphi) = \frac{v_0 \sqrt{2}}{2b e^\varphi}$ ,  $\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{\left(t + \sqrt{2} \frac{b}{v_0}\right)}$ ,  $\dot{r} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$

**Aufgabe 2.9**

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im Polarkoordinaten

Ein Punkt P bewegt sich im Polarkoordinatensystem  $r, \varphi$ .

gegeben: Radialgeschwindigkeit  $\dot{r} = c = \text{const.}$ , Radialbeschleunigung  $a_r = -a = \text{const.}$ , Anfangsbedingungen  $r(0) = 0, \varphi(0) = 0$

gesucht: Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}(t)$ , der Bahnkurve  $r(\varphi)$  und der Zirkularbeschleunigung  $a_\varphi(t)$

Lösung:  $\dot{\varphi}(t) = \frac{\sqrt{a}}{c t}$ ,  $r(\varphi) = \frac{1}{4} \frac{c^2}{a} \varphi^2$ ,  $a_\varphi(t) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{c a}{t}}$

**Aufgabe 2.10**

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im Bogenkoordinaten

Ein Punkt P bewegt sich entlang einer Kreisbahn. Sein Weg, gerechnet vom festen Punkt A aus, beträgt  $s$ .

gegeben: Radius  $r$ , Weg  $s = c t^2$

gesucht: Bestimmung der x- und y- Komponente der Geschwindigkeit  $v(t)$ , die Geschwindigkeit  $v_B$  in Punkt B und die Tangential- und Normalbeschleunigung an einer Stelle  $s$ .

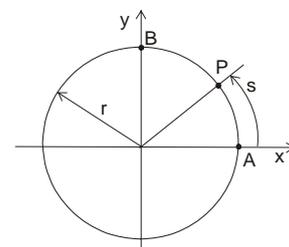


Bild 2.25 Punkt P auf einer Kreisbahn

Lösung:  $v_x = -2ct \sin \frac{ct^2}{r}$ ,  $v_y = 2ct \cos \frac{ct^2}{r}$ ,  $v_B = \sqrt{2\pi r c}$ ,  $a_t = 2c$ ,  $a_n = \frac{4c}{r}$

### 3 Kinetik des Massenpunktes



#### Lehrziel des Kapitels

- Kräfte auf den Massenpunkt
- Verknüpfung der Kinetik mit der Kinematik
- Definition der NEWTONsche Gesetze
- Anwendung der NEWTONsche Gesetze auf den Massenpunkt

$f(x) = \bullet$

#### 1. NEWTONsches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (3.2)$$

#### 2. NEWTONsches Gesetz

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} \quad (3.3)$$

#### 3. NEWTONsches Gesetz

actio = reactio

Die Kinematik definiert den Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Massenpunktes.

Allerdings wirken auch Kräfte auf den Massenpunkt. Dazu werden die Kräfte mit den kinematischen Größen verknüpft werden. Diese Verknüpfung wird durch die Kinetik definiert.

Der Massenpunkt ist dabei eine Näherung. Für viele Bewegungsabläufe reicht diese Näherung vollkommen aus: zum Beispiel die Untersuchung der Bahn einer Mondrakete. Das gilt immer, wenn der zurückgelegte Weg im Verhältnis zur bewegten Masse wesentlich größer ist (Masse « Weg). Soll aber das Landemanöver simuliert werden, ist die Näherung durch einen Massenpunkt nicht mehr zulässig. Dann wird die Rakete als Kontinuum betrachtet.

### 3.1 Die NEWTONschen Gesetze

#### 1. NEWTONsches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.1)$$

"Die zeitliche Ableitung des Impulses ist gleich der Resultierenden der auf den Massenpunkt wirkenden Kräfte!"

mit dem Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad (3.2)$$

#### 2. NEWTONsches Gesetz

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} \quad (3.3)$$

Die Masse ist während des gesamten Bewegungsablaufes konstant. Da die Masse  $m$  ein Skalar ist, hat die Beschleunigung  $\vec{a}$  immer dieselbe Richtung wie die Kraft  $\vec{F}$ .

Dimension der Kraft:  $\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N} = 1 \text{ Newton}$

#### Bemerkung

Das 2. NEWTONsche Gesetz ist im 1. NEWTONschen Gesetz enthalten.

#### Einschränkungen

- Gilt nur im ruhenden Bezugssystem. Die Erde wird im allgemeinen als ruhendes Bezugssystem angenommen.
- Es gilt Geschwindigkeit des Massenpunktes  $v \ll$  Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Trifft dies nicht zu, gilt die Relativitätstheorie.
- In der Nähe der Erde gilt: Beschleunigung  $g$  in Richtung des Erdmittelpunktes. Damit gilt das Gewicht  $G = m g$ .

#### 3. NEWTONsches Gesetz

actio = reactio

Das Wechselwirkungsgesetz gilt auch für den Massenpunkt und Systeme von Massenpunkten.

Die NEWTONsche Gesetze haben einen axiomatischen Charakter, das heißt die Aussagen werden vielfachen Beobachtungen entnommen und durch Erfahrungen bestätigt

Alle anderen Aussagen über die Kräfte (Statik, Festigkeitslehre) bleiben erhalten.

Auch in der Kinetik hat ein Massenpunkt im dreidimensionalen Bezugssystem sechs Freiheitsgrade: drei Translationen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ - Richtung, drei Rotationen

um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ - Achse. In einer freien Bewegung ist keiner dieser Freiheitsgrade eines Massenpunktes behindert.

Ein Massenpunkt im ebenen System hat drei Freiheitsgrade: zwei Translationen  $x$ - und  $y$ - Richtung, eine Rotation um die  $z$ - Achse

Im technischen Bereich ergeben sich die Fragestellungen:

- Wie groß sind die Kräfte, die für den Ablauf der Bewegung notwendig sind?
- Wie verläuft eine Bewegung bei vorgegebenen Kräften?



Im Folgenden werden alle Vektorpfeile weggelassen, da die Gleichungen in den Koordinatenrichtungen angegeben werden!

Aus dem 2. NEWTONschen Gesetz erhalten wir den Zusammenhang  $\vec{F} = m \vec{a}$ , also die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Kraft. Durch zweifache Integration ergibt sich die Geschwindigkeit und der Weg.

#### Beispiel

- Ein Massenpunkt wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit und einem Anfangswinkel abgeworfen
- Bestimmung der Geschwindigkeit und des Weges des Massenpunktes über die NEWTONschen Bewegungsgleichungen und anschließender Integration

Die Masse  $m$  wird zur Zeit  $t = 0$  und dem Winkel  $\alpha$  zur  $x$ - Achse mit der Geschwindigkeit  $v_0$  abgeworfen. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Als einzige Kraft wirkt das Gewicht  $G = m g$  in negativer  $z$ - Richtung.

gegeben:  $m, \alpha, v_0$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit und des Weges des Massenpunktes

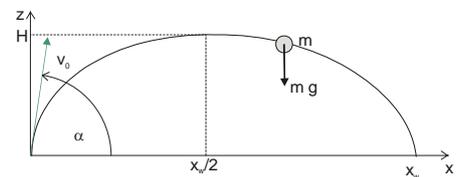


Bild 3. 1 Schiefer Wurf im kartesischen Koordinatensystem



#### Lösung

Die NEWTONschen Bewegungsgleichungen für alle drei Richtungen lauten:

$$\rightarrow: m \ddot{x} = 0 \quad \bullet: m \ddot{y} = 0 \quad \uparrow: m \ddot{z} = -G \quad | : m \quad (3.4)$$

Die Integration liefert

$$\dot{x} = C_1 \quad \dot{y} = C_3 \quad \dot{z} = -g t + C_5 \quad (3.5)$$

$$x = C_1 t + C_2 \quad y = C_3 t + C_4 \quad z = -g \frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6 \quad (3.6)$$

Aus der zweimaligen Integration ergeben sich  $3 \cdot 2$  Konstanten, die über die Anfangsbedingungen bestimmt werden können

#### Randbedingungen

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \quad (3.7)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \Rightarrow C_1 = v_0 \cos \alpha \quad (3.8)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0, \quad (3.9)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (3.10)$$

$$\dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha \Rightarrow C_5 = v_0 \sin \alpha, \quad (3.11)$$

$$z(0) = 0 \Rightarrow C_6 = 0 \quad (3.12)$$

Damit ergeben sich die Geschwindigkeiten und die Wege betragsmäßig zu

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha \quad \dot{y} = 0 \quad \dot{z} = -g t + v_0 \sin \alpha \quad (3.13)$$

$$x = v_0 \cos \alpha t \quad y = 0 \quad z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha t \quad (3.14)$$

Eine Elimination der Zeit führt zur Bahngleichung der "Wurfparabel"

$$z = x \tan \alpha - g \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (3.15)$$

Daraus folgt die Wurfweite  $x_w$  mit  $z(x = x_w) = 0$

$$x_w = \tan \alpha \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (3.16)$$

Wegen der Winkelbeziehung

$$\sin^2 \alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (3.17)$$

ergeben sich zwei Winkel für gleiche Wurfweiten bei gleicher Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$ , den Flach- und Steilwurf mit dem Winkel

$$\alpha \text{ und } \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha. \quad (3.18)$$

Die maximale Wurfweite wird für  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  erreicht bei

$$x_{w\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad (3.19)$$

Die Wurfzeit ergibt sich zu

$$t_w = \frac{x_w}{v_0 \cos \alpha} = 2 \frac{v_0}{g} \sin \alpha. \quad (3.20)$$

Beim längeren Weg des Steilwurfs ( $\alpha'$ ) ist die Wurfzeit größer!

Die Wurfhöhe ergibt sich aus der Bedingung  $\frac{dz}{dx} = 0$  zu

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha. \quad (3.21)$$



### Beispiel

- Ein Massenpunkt wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit und einem Anfangswinkel abgeworfen
- Bestimmung der Geschwindigkeit und des Weges des Massenpunktes über die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen und anschließender Integration

### Bemerkung

Der "Schiefe Wurf" ist nur dann symmetrisch, wenn die Abwurfhöhe gleich der Auftreffhöhe ist. Er ist nicht symmetrisch, wenn er von einer anderen Höhe abgeworfen wird. Deshalb müssen die allgemeinen Formeln angewandt werden.



### Beispiel

- Ein Massenpunkt wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit und einem Anfangswinkel abgeworfen
- Der Luftwiderstand wird berücksichtigt.
- Bestimmung der Geschwindigkeit und des Weges des Massenpunktes über die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen und anschließender Integration

Eine Masse  $m$  werde zur Zeit  $t = 0$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in horizontaler Richtung abgeschossen. Unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes  $W$  in horizontaler Richtung ist der Aufschlagpunkt  $B$  zu bestimmen. Der Luftwiderstand in vertikaler Richtung kann vernachlässigt werden, da die Höhe  $h$  im Verhältnis zum Weg  $x_B$  und damit auch die Fallgeschwindigkeit  $v = \dot{y}$  sehr klein ist.

gegeben:  $h, g, v_0, \alpha = 0, W = W_0 v^2$

gesucht: Bestimmung des Weges  $x_B$

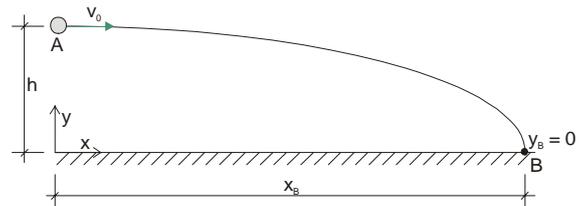


Bild 3.3 Masse  $m$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in horizontaler Richtung



### Lösung

### NEWTONSche Bewegungsgleichungen

$$\rightarrow: \quad m \ddot{x} = -W = -W_0 \dot{x}^2 \quad (3.25)$$

$$\uparrow: \quad m \ddot{y} = -mg \quad (3.26)$$

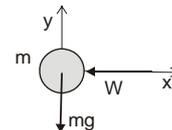


Bild 3.4 Schnittbild am Flugkörper

Die Integration der Gleichung (3.25) ergibt

$$-W_0 \dot{x}^2 = m \ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dt} \quad (3.27)$$

mit  $\frac{1}{C_0} = \frac{m}{W_0}$  folgt

$$dt = -\frac{m}{W_0} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{1}{C_0} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} \Rightarrow \int_{t_0=0}^t d\tau = -\frac{1}{C_0} \int_{x_0}^x \frac{d\eta}{\eta^2} \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{C_0} \frac{1}{\eta} \Big|_{x_0}^x = \frac{1}{C_0} \left[ \frac{1}{\dot{x}} - \frac{1}{\dot{x}_0} \right],$$

nach  $x$  umgestellt und integriert folgt der Weg

$$x(t) = \int_{t_0=0}^t \frac{d\tau}{C_0 \tau + \frac{1}{\dot{x}_0}} + x_0 = \frac{1}{C_0} \ln(C_0 \dot{x}_0 t + 1) + x_0. \quad (3.29)$$

Integration der Gleichung (3.26) ergibt

$$\dot{y}(t) = -gt + \dot{y}_0 \Rightarrow y(t) = -g \frac{t^2}{2} + \dot{y}_0 t + y_0 \quad (3.30)$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = v_0 \quad (3.31)$$

$$x(t=0) = x_0 = 0 \quad (3.32)$$

$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0 = 0 \quad (3.33)$$

Ein Tennisball  $m$  wird zur Zeit  $t = 0$  und dem Winkel  $\alpha = 0$  zur  $x$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $v_0$  aus der Ballwurfmaschine abgeschossen. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Als einzige Kraft wirkt  $G$  in negativer  $z$ -Richtung.

gegeben:  $H, g, v_0, \alpha = 0$

gesucht: Bestimmung der Wurfweite  $L$ , der Wurfzeit  $t_w$  und der Geschwindigkeit am Auftreffpunkt  $A$ ?

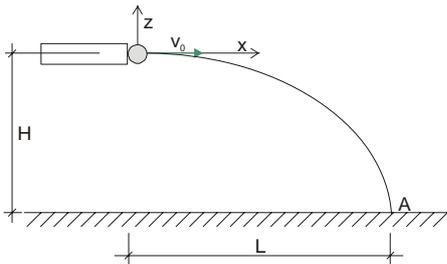


Bild 3.2 Tennisball mit der Geschwindigkeit  $v_0$  aus der Ballwurfmaschine



### Lösung

#### Auftreffpunkt $A(x = L, y = -H)$

In die Wurfparabel (3.15) eingesetzt ergibt

$$H = L \tan \alpha - g \frac{L^2}{2v_0^2} \Rightarrow L^2 = 2 \frac{v_0^2}{g} H \Rightarrow L = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (3.22)$$

In (3.20) eingesetzt, ergibt die Wurfzeit

$$t_w = \frac{L}{v_0 \cos 0} = \frac{L}{v_0} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (3.23)$$

#### Geschwindigkeit am Auftreffpunkt

$$\dot{x} = v_0, \dot{z} = -gt \Rightarrow v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_0^2 + (-g)^2 \frac{2H}{g}} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \quad (3.24)$$

Die Größe der Auftreffgeschwindigkeit ist nicht mehr vom Winkel  $\alpha$  abhängig.

$$y(t=0) = y_0 = h \quad (3.34)$$

folgt

$$\dot{y}(t) = -g t, \quad (3.35)$$

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + h \quad (3.36)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{C_0 t + \frac{1}{v_0}}, \quad (3.37)$$

$$x(t) = \frac{1}{C_0} \ln(C_0 v_0 t + 1) \quad (3.38)$$

Bedingung am Aufschlagpunkt  $y_B(t=t_B) = 0$  ist

$$y_B = -g \frac{t_B^2}{2} + h \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.39)$$

folgt mit (3.39) in (3.38)

$$x_B = x(t=t_B) = \frac{1}{C_0} \ln(C_0 v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} + 1), \quad y_B = 0 \quad (3.40)$$

Der Grenzwert  $C_0 \rightarrow 0$  für einen verschwindenden Luftwiderstand liefert einen Kontrollwert

$$x_B = \lim_{C_0 \rightarrow 0} \frac{\ln(C_0 v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} + 1)}{C_0} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.41)$$

Das entspricht dem Schiefen Wurf ohne Luftwiderstand.

**Beispiel**

- Berechnung der Beschleunigung des Kolbens aus den Kräften auf einen Kolben

Die Kolbenbeschleunigung in einem Zylinder bei expandierender Gasfüllung ist zu berechnen. Der Gasdruck wird durch das Gesetz  $p V = \text{const.} = C$  beschrieben ( $V$  Volumen,  $p$  Gasdruck).

gegeben:  $p V = \text{const.} = C$

gesucht: Bestimmung der Kolbenbeschleunigung  $a$

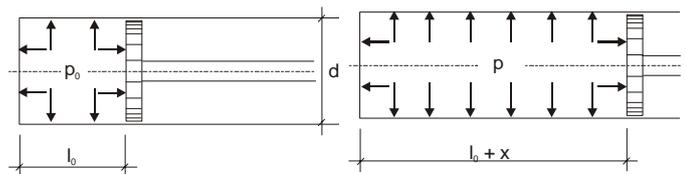


Bild 3. 5 Kolben in einem Zylinder bei expandierender Gasfüllung

**Lösung**

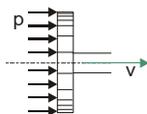


Bild 3. 6 Schnittbild am Kolben

Die Druckkraft auf den Kolben ist

$$F = p \pi \frac{d^2}{4}. \quad (3.42)$$

Das Volumen der Gasfüllung ergibt sich zu

$$V = \pi \frac{d^2}{4} (l_0 + x) \quad (3.43)$$

Das Gasgesetz mit  $V_0 = V(x=0)$  lautet

$$p V = p_0 V_0 = C \quad (3.44)$$

Daraus folgt der Gasdruck

$$p = p_0 \frac{V_0}{V} = p_0 \frac{l_0}{l_0 + x} \quad (3.45)$$

**NEWTONsches Bewegungsgleichung**

$$\rightarrow: m a = F = p \pi \frac{d^2}{4} = p_0 \frac{l_0}{l_0 + x} \pi \frac{d^2}{4} \quad (3.46)$$

Damit ergibt sich die Beschleunigung des Kolbens zu

$$a = \pi \frac{d^2}{4} \frac{p_0}{m} \frac{l_0}{l_0 + x} = a_0 \frac{1}{1 + \frac{x}{l_0}} \quad (3.47)$$

Die Anfangsbeschleunigung des Kolbens ist

$$a_0 = \pi \frac{d^2}{4} \frac{p_0}{m} \quad (3.48)$$

### 3. 2 Geführte Bewegung

#### 3. 2. 1 Schiefe Ebene

**Beispiel**

- Masse auf einer schiefen Ebene
- Berechnung der Beschleunigung aus dem NEWTONschen Gesetz
- Wirkung der COULOMBSchen Reibung
- Berechnung der Geschwindigkeit und des Weges

Ein Körper der Masse  $m$  rutscht auf einer schiefen Ebene mit COULOMBScher Reibung (Reibungskoeffizient  $\mu$ ).

gegeben:  $m, \alpha, \mu$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  und des Weges  $x$  des Massenpunktes

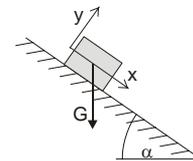


Bild 3. 7 Körper auf einer schiefen Ebene

**Lösung**

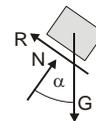


Bild 3. 8 Schnittbild am Massenpunkt

Die Reibkraft zeigt nach oben, weil die Bewegung nach unten gerichtet ist.

**NEWTONsche Bewegungsgleichungen**

$$\searrow: m \ddot{x} = G \sin \alpha - R \quad (3.49)$$

$$\nearrow: m \ddot{y} = -G \cos \alpha + N \quad (3.50)$$

**Führungsbedingung**

$$y = 0 \quad (3.51)$$

in (3.50) folgt

$$0 = -G \cos \alpha + N \Rightarrow N = G \cos \alpha \quad (3.52)$$

Die Kraft  $N$  entspricht hier der Führungskraft, die die Masse auf der Ebene "hält".

**Reibungsgesetz**

$$R = \mu N \quad (3.53)$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$x(0) = x_0, \quad (3.54)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (3.55)$$

$$y(0) = 0, \quad (3.56)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (3.57)$$

aus (3.52) in (3.53) folgt

$$R = \mu G \cos \alpha \quad (3.58)$$

in (3.49)

$$m \ddot{x} = G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (3.59)$$

mit dem Gewicht  $G = mg$

$$\ddot{x} = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \text{const.} \quad (3.60)$$

Nach zweifacher Integration folgt dann die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = v(t) = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t + v_0 \quad (3.61)$$

und der Weg

$$x(t) = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \quad (3.62)$$

### 3.2.2 Gekrümmte Bahn

Entsprechend kann auch eine reibungsfreie geführte Bewegung auf einer gekrümmten Bahn berechnet werden.

**Beispiel**

- Masse auf einer gekrümmten Kreisbahn
- Berechnung der Beschleunigung aus dem NEWTONschen Gesetz in Polarkoordinaten
- Geführte Bewegung ohne Abhebesicherung
- Berechnung der Winkelgeschwindigkeit durch Trennung der Variablen
- Berechnung des Weges über eine Näherung

Ein Körper der Masse  $m$  rutscht auf einer gekrümmten Bahn (Kreis mit dem Radius  $b$ ) ohne Reibung.

gegeben:  $m, b$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit  $\dot{x}$  und des Weges  $x$  des Massenpunktes

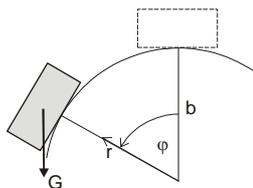


Bild 3.9 Gekrümmte Bahn

**Lösung**

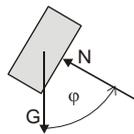


Bild 3.10 Schnittbild

Mit dem Kreis als Sonderfall der gekrümmten Bahn  $\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$  und  $G = m g$  ergeben sich die

#### NEWTONsche Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten

$$\nearrow: m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = m (-r \dot{\varphi}^2) = N - m g \cos \varphi \quad (3.63)$$

$$\swarrow: m (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) = m (r \ddot{\varphi}) = m g \sin \varphi \quad (3.64)$$

mit der Führungsbedingung  $r = \text{const.} = b$  ergibt sich

$$-m (b \dot{\varphi}^2) = N - m g \cos \varphi \quad (3.65)$$

$$m (b \ddot{\varphi}) = m g \sin \varphi \quad (3.66)$$

(3.66) entspricht einer wegababhängigen Beschleunigung

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \omega = \frac{g}{b} \sin \varphi. \quad (3.67)$$

Die Winkelgeschwindigkeit erhält man nach Trennung der Variablen

$$\omega d\omega = \frac{g}{b} \sin \varphi d\varphi. \quad (3.68)$$

und der Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \quad (3.69)$$

$$r(0) = b \Rightarrow \dot{r}(0) = 0 \quad (3.70)$$

Daraus folgt

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = \frac{g}{b} \int_{\varphi=0}^{\varphi} \sin \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = \frac{g}{b} (1 - \cos \varphi) = 2 \frac{g}{b} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (3.71)$$

und die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \dot{\varphi} = \omega_0 \sqrt{1 + 4 \frac{g}{b \omega_0^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (3.72)$$

Die auf die Ebene wirkende Normalkraft  $N = N(\varphi)$  erhält man mit (3.69) in (3.56)

$$N = -m b \dot{\varphi}^2 + m g \cos \varphi = -m b \omega_0^2 + m g (3 \cos \varphi - 2) \quad (3.73)$$

Der Körper ist aber nur einseitig geführt. Er ist somit nicht gegen Abheben von der Unterlage gesichert. Für  $N = 0$  lässt sich nun die Abhebestelle berechnen.

Um den Weg zu berechnen, muß ein zweites Mal integriert werden. Diese Integration führt bei dieser geschwindigkeitsabhängigen Beschleunigung zu einer Lösung in  $t$ , die nur noch näherungsweise gelöst werden kann

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varphi) \Rightarrow dt = \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}$$

$$\Rightarrow t = \int_{\varphi=0}^{\varphi} \frac{d\bar{\varphi}}{\omega(\bar{\varphi})} = \frac{1}{\omega_0} \int_{\varphi=0}^{\varphi} \frac{d\bar{\varphi}}{\sqrt{1 + 4 \frac{g}{b \omega_0^2} \sin^2 \frac{\bar{\varphi}}{2}}} \quad (3.74)$$

Durch eine Reihenentwicklung des Integrals erhält man eine Näherungslösung für die Zeit

$$t = \frac{1}{\omega_0} \left( \varphi - \frac{g}{6b\omega_0^2} \varphi^3 + \dots \right) \quad (3.75)$$

und nach einiger Rechnung mit Hilfe der Umkehrfunktion den Winkel  $\varphi$ .

### 3.3 Energiesatz

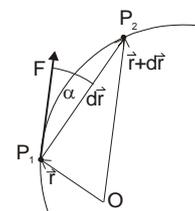


Bild 3.11 Integration zwischen zwei Bahnpunkten  $P_1$  und  $P_2$

$$\frac{d(mv)}{dt} dr = F dr \quad (3.76)$$

mit  $dr = v dt$

$$\int_{v_1}^{v_2} m \bar{v} d\bar{v} = m \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \int_{r_1}^{r_2} F dr \quad (3.77)$$

Wird das 1. NEWTONsche Gesetz mit  $dr$  skalar multipliziert, erhält man eine skalare Größe, die der Arbeit  $W$  und der kinetischen Energie  $T$  entspricht.

#### Arbeitssatz

$$T_1 - T_0 = W \quad (3.78)$$

"Die Arbeit, welche die Kräfte zwischen zwei Bahnpunkten leisten, ist gleich der Änderung der kinetischen Energie."

Dimension der Energie: Kraft mal Weg [Nm = J]

oder der Energieerhaltungssatz

### Energieerhaltungssatz

$$T_0 + W_0 = T_1 + W_1 \quad (3.79)$$

"Die Summe der Energie an zwei verschiedenen Punkt bleibt erhalten."

Am Massenpunkt greifen eingeprengte Kräfte  $F^{(e)}$ , zum Beispiel die Gewichtskraft  $G$ , und Reaktions- oder Zwangskräfte  $F^{(z)}$  an, zum Beispiel die Normalkraft  $N$ . Die Reaktionskräfte  $F^{(z)}$  greifen stets senkrecht zur Bahn an und leisten daher keine Arbeit. Die eingeprengten Kräfte leisten die Arbeit

$$W = \int \vec{F}^{(e)} d\vec{r} \quad (3.80)$$



### Beispiel

- Anwendung des Energieerhaltungssatzes mit Reibungsverlust

Im Punkt  $P_0$  wird ein Körper auf einer rauhen, schiefen Ebene mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  abgeschickt.

gegeben:  $v_0, \alpha$

gesucht: Bestimmung der Strecke  $l$ , an der der Körper zum Stillstand kommt.

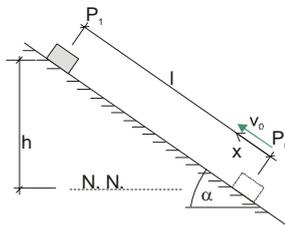


Bild 3.12 Körper auf einer rauhen, schiefen Ebene



### Lösung

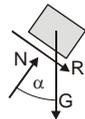


Bild 3.13 Schnittbild am Körper

### Energieerhaltungssatz mit Reibungsverlust

$$T_0 + W_0 = T_1 + W_1 + W_R \quad (3.81)$$

mit der potentiellen Energie im Punkt  $P_0$ , mit dem Nullniveau (N. N.) in  $P_0$

$$W_0 = 0 \quad (3.82)$$

mit der kinetischen Energie im Punkt  $P_0$

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3.83)$$

mit der potentiellen Energie im Punkt  $P_1$

$$W_1 = m g h = m g l \sin \alpha \quad (3.84)$$

mit der kinetischen Energie im Punkt  $P_1$ , aus der Bedingung, dass der Körper zum Stillstand kommt

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 0 \quad (3.85)$$

und der Reibungsarbeit

$$W_R = R l = \mu N l = \mu m g l \cos \alpha \quad (3.86)$$

Die Reibung verringert die Geschwindigkeit  $v_1$ . Die Führungskraft  $N$  leistet keine Arbeit.

(3.82) ÷ (3.86) in (3.81) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 &= 0 + m g l \sin \alpha + \mu m g l \cos \alpha \\ \Rightarrow v_0^2 &= 2 g l (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Daraus folgt die Strecke

$$l = \frac{v_0^2}{2 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \quad (3.88)$$



### Beispiel

- Anwendung des Energieerhaltungssatzes

Ein mathematisches Pendel ist durch einen Massenpunkt  $m$  an einem masselosen, dehnstarren Seil mit der Pendellänge  $l$  definiert.

gegeben:  $m, l$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit der Pendelmasse ist mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes  $T(\varphi) + W(\varphi) = T_0 + W_0$  in Abhängigkeit vom Maximalausschlag  $\varphi_0$  des Pendels.

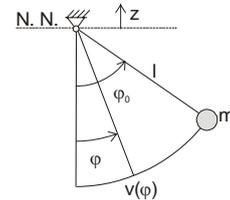


Bild 3.14 Mathematisches Pendel



### Lösung

Die kinetische Energie ergibt sich bei N. N. in der Pendelaufhängung an der Stelle  $\varphi$

$$T(\varphi) = m \frac{v(\varphi)^2}{2} \quad (3.89)$$

wegen  $v(\varphi_0) = v_0 = 0$  ist

$$T_0(\varphi_0) = T(\varphi_0) = m \frac{v_0^2}{2} = 0 \quad (3.90)$$

Die potentielle Energie ist

$$W(\varphi) = -m g l \cos \varphi \quad (3.91)$$

$$W_0(\varphi_0) = -m g l \cos \varphi_0 \quad (3.92)$$

Die potentielle Energie wird in beiden Fällen negativ, weil die positive  $z$ -Richtung vom Nullniveau aus nach oben zeigt.

In (3.79) folgt

$$\begin{aligned} m \frac{v(\varphi)^2}{2} - m g l \cos \varphi &= -m g l \cos \varphi_0 \\ \Rightarrow v(\varphi)^2 &= 2 g l (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Die Maximalgeschwindigkeit erhält man bei  $\cos \varphi = 1$

$$v_{\max} = \sqrt{2 g l (1 - \cos \varphi_0)} = \sqrt{4 g l \sin^2 \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)} = 2 \sqrt{g l} \sin \frac{\varphi_0}{2} \quad (3.94)$$

Für kleine Ausschläge  $\sin \varphi_0 \approx \varphi_0$  gilt näherungsweise

$$v_{\max} = 2 \sqrt{g l} \frac{\varphi_0}{2} \quad (3.95)$$

### 3.3.1 Die wichtigsten Kraftpotentiale

#### Gravitationspotential an der Erdoberfläche

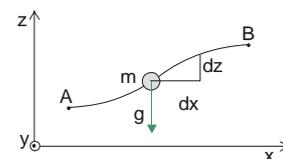


Bild 3.15 Gravitationspotential an der Erdoberfläche

Es gilt

$$F = G = m g = m g e_z \quad (3.95)$$

Das zwischen den Punkten A und B gebildete Integral

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -m g \int_A^B e_z \frac{dr}{dz} dz = -m g (z_B - z_A) \quad (3.96)$$

ist wegunabhängig!

Mit der willkürlichen Festlegung  $z_A = 0$ , zum Beispiel an der Erdoberfläche, ergibt sich

$$W = m g z. \quad (3. 97)$$

Die gespeicherte Energie nimmt also mit der Höhe  $z$  zu. Beim Herabfallen wird die potentielle Energie in kinetische Energie umgesetzt.

### Das elastische Potential

Eine elastische Feder wird mittels der äußeren Kraft  $F$  um den Betrag  $x$  verlängert. Die in der Feder gespeicherte Energie wird in Bewegungsenergie umgewandelt.

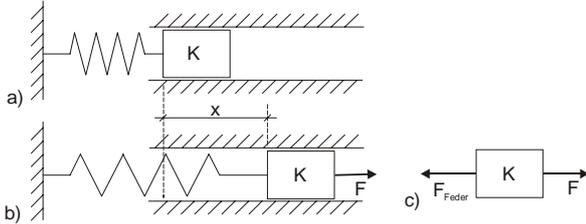


Bild 3. 16 Elastische Feder mit einer Kraft  $F$ ; a) Ruhelage; b) ausgelenkte Lage; c) Schnittbild

Die zu einer von der ungespannten Lage aus zählenden Längenänderung erforderliche Arbeit wird als Formänderungsenergie gespeichert

$$W_{\text{Feder}} = \int_0^x F(\bar{x})_{\text{Feder}} d\bar{x} = c \frac{x^2}{2} \quad (3. 98)$$

mit der Federsteifigkeit  $c$  und dem linearen Zusammenhang folgt

$$F_{\text{Feder}} = c x = F \quad (3. 99)$$

### Formänderungsenergie in der Elastizitätstheorie

Zur Berechnung der inneren Energien, zum Beispiel für den Zugstab, folgt nach Kapitel 11

$$\Pi = \int_0^l \Pi^* dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx. \quad (3. 100)$$

## 3. 4 Leistung

Es gilt

$$P = \frac{dW}{dt} = F v = M \omega \quad (3. 101)$$

Leistung ist die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit oder eine Kraft mal einer Geschwindigkeit.

Dimension der Leistung:  $W = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s}$

Gebräuchliche Umrechnungsformen sind: 1 PS = 0,735 kW, 1 kW = 1,36 PS.

Der Wirkungsgrad von Systemen ist

$$\eta = \frac{\text{herausgeholtte Leistung}}{\text{hereingesteckte Leistung}} = \frac{P_{\text{heraus}}}{P_{\text{hinein}}}, \quad (3. 102)$$

wobei  $\eta$  wegen der auftretenden Verluste, zum Beispiel der Reibung an den Lagern etc. immer kleiner 1 wird.

## 3. 5 Impulssatz

Nach Integration des 1. NEWTONschen Gesetzes  $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$  (3. 2) folgt

$$m v - m v_0 = \int_{t_0}^t F dt. \quad (3. 103)$$

In der Regel ist die Stoßzeit

$$\Delta t = t - t_0 \quad (3. 104)$$

sehr klein und  $m(v - v_0)$  endlich groß. Daher muß die Stoßkraft

$$\hat{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} F dt \quad (3. 105)$$

sehr groß sein. Daher können also alle anderen äußeren eingepprägten Kräfte, zum Beispiel das Gewicht, vernachlässigt werden. Der genaue Verlauf der Stoßkraft über die Zeit bleibt unbekannt.

Damit folgt der Impulssatz

$$m v - m v_0 = \hat{F}. \quad (3. 106)$$

Weitere Formen des Stoßes werden im Kapitel 4 und Kapitel 5 behandelt.



### Beispiel

- Anwendung des 2. NEWTONschen Gesetzes zur Bestimmung des konstanten Schubes
- Anwendung des 1. NEWTONschen Gesetzes
- Zeitveränderliche Masse des Systems
- Berechnung der Geschwindigkeit der Rakete bei konstantem Massendurchsatz

Das Raketentriebwerk einer einstufigen Rakete (Startmasse  $m_0$ ), davon 80% Treibstoff ( $m_T / m_0 = 0,8$ ) erzeugt einen konstanten Schub  $S$ , der die Rakete mit einer Anfangsbeschleunigung  $a_0$  entgegen der Richtung der Erdbeschleunigung aus der Ruhelage bewegt.

gegeben:  $m_0 = 1000$  kg,  $m_T / m_0 = 0,8$ ,  $a_0 = 0,2$  g,  $v_0 = 0$ ,  $t_S = 2$  min

gesucht: Bestimmung der Brennschlussgeschwindigkeit der Rakete, wenn bei konstantem Massendurchsatz  $\mu$  (verbrauchter Treibstoff/ Sekunde) der Treibstoff nach  $t_S$  verbraucht ist

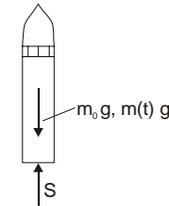


Bild 3. 17 Raketentriebwerk einer einstufigen Rakete



### Lösung

#### 2. NEWTONsches Gesetz

Für die Startmasse gilt

$$\uparrow: \quad m_0 a_0 = S - m_0 g \quad (3. 107)$$

Daraus läßt sich der konstante Schub berechnen

$$S = m_0 (a_0 + g) \quad (3. 108)$$

#### Impulssatz

$$\uparrow: \quad F = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = S - m(t) g \quad (3. 109)$$

Nach Integration mit  $v_0 = 0$

$$m(t) v(t) - m_0 v_0 = m(t) v(t) = \int_0^t (S - m(\tau) g) d\tau \quad (3. 110)$$

mit der Treibstoffmasse  $m_T = \mu t_S$  ergibt sich der Massendurchsatz

$$\mu = \frac{m_T}{t_S} \quad (3. 111)$$

mit (3. 108) und (3. 111) in (3. 110) und mit der veränderlichen Masse

$$m(t) = m_0 - \mu t = m_0 \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t\right) \quad (3. 112)$$

folgt

$$m(t) v(t) = \int_0^t \left( (m_0 (a_0 + g) - (m_0 - \mu \tau) g) \right) d\tau \quad (3. 113)$$

Nach Integration über  $t$

$$m(t) v(t) = t m_0 \left[ (a_0 + g - g) + \frac{\mu g}{m_0} \frac{t}{2} \right] \quad (3. 114)$$

mit konstantem Massendurchsatz folgt

$$\frac{\mu}{m_0} = \frac{m_T}{m_0 t_S} \quad (3. 115)$$

aufgelöst nach  $v(t)$  mit (3. 115) in (3. 114)

$$v(t) = \frac{m_0(a_0 + \frac{1}{2} \frac{\mu g}{m_0} t)}{m_0(1 - \frac{\mu t}{m_0})} = \frac{a_0 + \frac{1}{2} g \frac{m_T}{m_0} \frac{t}{t_s}}{1 - \frac{m_T}{m_0} \frac{t}{t_s}} \quad (3. 116)$$

Die Brennschlussgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v(t = t_s) = 3531,6 \frac{m}{sec} \approx 12700 \frac{km}{h} \quad (3. 117)$$

### 3. 6 Momentensatz

Wie in der Statik wird das Kraftmoment  $M^0$  als Vektorprodukt, Kraft mal Hebelarm  $M^0 = r \times F$  definiert. In der Kinetik wird das Impulsmoment oder der Drall ( $L^{(0)}$  Drehimpuls oder Drallvektor) als Vektorprodukt, Impuls x Hebelarm definiert

$$L^0 = r \times p = r \times (m v) \quad (3. 118)$$

Die Herleitung des Momentensatzes erfolgt mit dem 2. NEWTONSches Gesetz

$$m a = F \quad (3. 3)$$

von links mit dem Ortsvektor  $r$  multipliziert

$$r \times m \frac{dv}{dt} = \frac{r \times F}{M^{(0)} \text{Momentenvektor}} \quad (3. 119)$$

und umgestellt und die Produktregel angewandt

$$\frac{d}{dt} (r \times (m v)) = \dot{r} \times m v + r \times m \frac{dv}{dt} = \frac{r \times F}{M^{(0)} \text{Momentenvektor}} \quad (3. 120)$$

Mit  $\dot{r} = v$  wird das Vektorprodukt wegen  $(v \times v) = 0$  zu Null.

$$r \times m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} ( \underbrace{r \times m v}_{L^{(0)} \text{Drallvektor}} ) = \frac{d}{dt} L^{(0)} = M^{(0)} \quad (3. 121)$$

#### Momentensatz (Drehimpulssatz, Drallsatz)

"Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses in Bezug auf einen beliebigen raumfesten Punkt 0 ist gleich dem Moment der am Massenpunkt angreifenden Kraft bezüglich desselben Punktes 0."

Wenn  $M^{(0)} = 0$  bleibt der Drehimpuls unverändert, die Drehimpulserhaltung ist

$$L^{(0)} = r \times m v = \text{const.} \quad (3. 121)$$

#### Sonderfall: Flächensatz

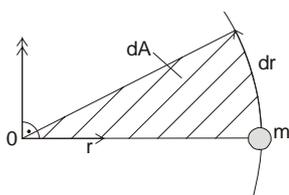


Bild 3. 18 Überstrichene Fläche dA

$$M^{(0)} = 0 \quad (3. 122)$$

$$L^{(0)} = r \times m r = \text{const.} \quad (3. 123)$$

Im Zeitabschnitt dt überstreicht der Ortsvektor  $r$  die Fläche

$$dA = \frac{1}{2} |r \times dr| = \frac{1}{2} (r \times dr) = \frac{1}{2} (r \times \frac{dr}{dt} dt) = \frac{1}{2} (r \times v dt) \quad (3. 124)$$

Damit ergibt sich eine vektorielle Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} (r \times v) \quad (3. 125)$$

in  $L^{(0)} = r \times m v$  eingesetzt

$$L^{(0)} = 2 m \frac{dA}{dt} \quad (3. 126)$$

Der Drall ist also proportional der Flächengeschwindigkeit.

#### Aufgabe 3. 1

- Anwendung der NEWTONSchen Bewegungsgleichungen in x- und y- Richtung
- Schwingungsdifferentialgleichung mit Lösungen

Auf den Massenpunkt  $m$  wirkt eine Kraft  $F$  in Richtung auf das Zentrum  $Z$  die proportional zum Abstand  $r$  ist. Zur Zeit  $t = 0$  befindet sich die Masse im Punkt  $P_0$  und hat dort die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x = v_0$  und  $v_y = 0$

gegeben:  $r_0, F = k r, v_0, \alpha$

gesucht: Bestimmung der Bahnkurve  $x(t)$  und  $y(t)$ , auf der sich der Massenpunkt bewegt.

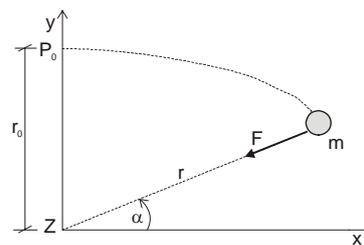


Bild 3. 19 Massenpunkt  $m$  mit einer Kraft  $F$  in Richtung  $Z$

Lösung:  $x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t, y = r_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$

#### Aufgabe 3. 2

- Anwendung der NEWTONSchen Bewegungsgleichungen in x- und y- Richtung und auf einer Kreisbahn
- Schiefe Ebene mit Reibung
- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Berechnung des Normaldrucks

Eine Masse  $m$  wird ohne Anfangsgeschwindigkeit in  $P_0$  losgelassen. Sie bewegt sich unter Einwirkung der Schwerkraft zunächst auf einer rauhen, schiefen Ebene (Reibungskoeffizient  $\mu$ , Neigung  $\beta$ , Länge  $l$ ) und anschließend auf einer glatten Kreisbahn (Radius  $r$ ). Die schiefe Ebene schließt im  $P_1$  tangential an die Kreisbahn an.

gegeben:  $m, \mu, \beta, l, r$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit der Masse in  $P_3$ , der Komponenten des Beschleunigungsvektors im  $P_2$  und der Normalkraft  $N$  zwischen Masse und Bahn im  $P_2$

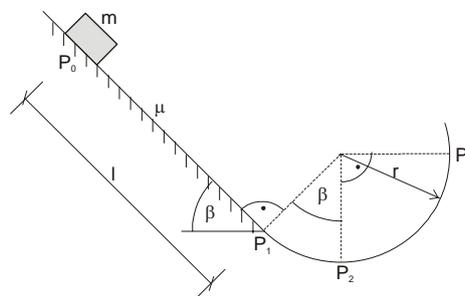


Bild 3. 20 Masse  $m$  auf einer rauhen, schiefen Ebene mit anschließender glatter Kreisbahn

Lösung:  $v_3 = \sqrt{2g(-r \cos \beta + (\sin \beta - \mu \cos \beta))}$ ,  $a_n = 2g(1 - \cos \beta + \frac{1}{r}(\sin \beta - \mu \cos \beta))$ ,

$a_t = 0, N = 2mg(-\cos \beta + \frac{1}{r}(\sin \beta - \mu \cos \beta)) + 3mg$

#### Aufgabe 3. 3

- Anwendung der NEWTONSchen Bewegungsgleichungen auf einer Kreisbahn
- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Unterschied einer geführten Bewegung und einer mit einem Drehpunkt verbundenen Masse

Ein Massenpunkt  $m$  gleitet (Bild 3. 24 a) auf einer Kreisbahn (Radius  $l$ ) reibungsfrei, bzw. (Bild 3. 24 b) ist durch eine starre, masselose Stange (Länge  $l$ ) mit  $O$  verbunden.

gegeben:  $m, l, \beta = 60^\circ$

gesucht: Bestimmung der kleinsten Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  der Masse  $m$ , damit sie von der Anfangslage A die Lage B erreicht.

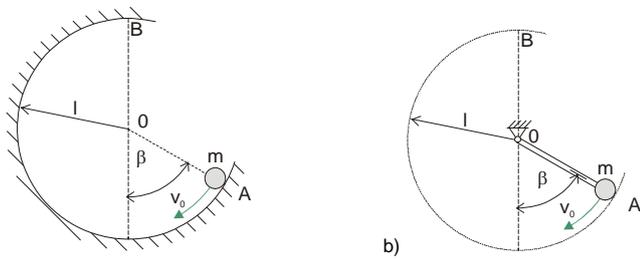


Bild 3. 24 Geführter Massenpunkt m a) auf einer Kreisbahn; b) durch eine starre, masselose Stange mit O verbunden

Lösung: a)  $v_A = \sqrt{4gl}$ , b)  $v_A = \sqrt{3gl}$

**Aufgabe 3. 6**

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf eine rauhe schiefe Ebene
- Bestimmung der Zeit t, für das beide Systeme dieselbe Geschwindigkeit haben
- Reibung als bremsende Kraft auf das eine und als antreibende Kraft auf das zweite System

Auf ein schräges Förderband (Winkel  $\alpha$ ), das sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt, wird eine Kiste mit dem Gewicht G gesetzt.

gegeben:  $v_0, G, \mu, \alpha$   
 gesucht: Bestimmung der Zeit  $t_R$ , zu der die Kiste die gleiche Geschwindigkeit wie das Förderband erreicht, wenn der Reibungskoeffizient  $\mu$  bekannt ist.

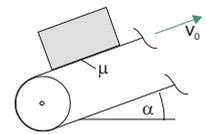


Bild 3. 32 Schräges Förderband mit Kiste

Lösung:  $t_R = \frac{v_0}{g(\mu - \tan \alpha) \cos \alpha}$

**Aufgabe 3. 7**

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf einer Kreisbahn
- Bestimmung des zeitabhängigen Momentes auf einen Kragarm

An einer Schaukel hängt eine Punktmass m. Sie wird aus der horizontalen Lage C losgelassen.

gegeben: l, m, r  
 gesucht: Bestimmung des Einspannmomentes  $M = M(\varphi)$  in B und des Winkels  $\varphi$ , an dem das Moment M maximal ist.

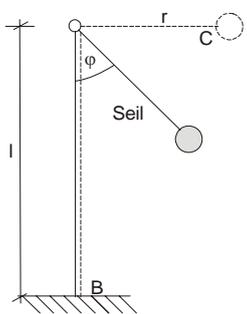


Bild 3. 34 Schaukel mit einer Punktmass m

Lösung:  $M_B = -3 m g l \cos \varphi \sin \varphi$

**Aufgabe 3. 8**

- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Freier Flug mit Anfangsgeschwindigkeit

Ein Massenpunkt m erhält im Punkt A eine Geschwindigkeit  $v_A$ . Er bewegt sich bis zum Punkt E (Höhe h) längs einer glatten, schrägen Rampe und soll dann nach freiem Flug im Punkt L auftreffen.

gegeben: m, h, l, alpha  
 gesucht: Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit  $v_A$

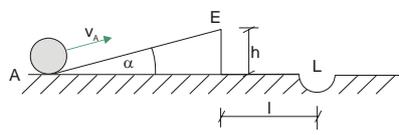


Bild 3. 36 Massenpunkt m längs einer glatten, schrägen Rampe

Lösung:  $v_A^2 = g \frac{l^2 + 4h \cos \alpha (h \cos \alpha + l \sin \alpha)}{2 \cos \alpha (h \cos \alpha + l \sin \alpha)}$

**Aufgabe 3. 4**

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf einer Bahn
- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Rauhe Ebene mit Reibung
- Berechnung der Zeit t zum Durchfahren einer Strecke

Im Punkt A auf der in Bild 3. 27 skizzierten Bahn liegt ein Massenpunkt m in Ruhe. Er wird losgelassen und gleitet längs der glatten gekrümmten Bahn bis zum Punkt B. Von B ab ist die Bahn horizontal und rau.

gegeben: h, l, m  
 gesucht: Bestimmung des Reibungskoeffizienten mu, wenn der Massenpunkt in C liegen bleiben soll

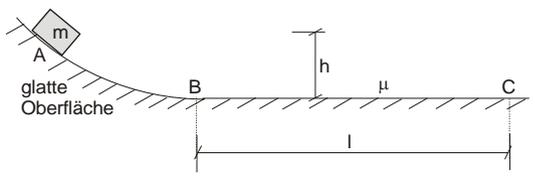


Bild 3. 27 Massenpunkt auf der Bahn ABC

Lösung:  $\mu = \frac{h}{l}$

**Aufgabe 3. 5**

- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf einer Kreisbahn
- Bestimmung der Ruhelage H

Ein Massenpunkt m durchläuft, beginnend in der Ruhelage  $P_A$ , die skizzierte Bahn, die aus einer schiefen Ebene mit anschließendem Kreisbogen besteht.

gegeben: m, b,  $\beta = 60^\circ$   
 gesucht: Bestimmung der Ruhelage H, damit er gerade den Scheitel  $P_C$  der Kreisbahn erreicht, der Geschwindigkeit  $v(\varphi)$  und der Normalkraft  $N(\varphi)$  in einem beliebigen Punkt  $P_D$  der Kreisbahn, des Winkels und des Auftreffpunktes des Massenpunktes nach Verlassen der Kreisbahn auf der schiefen Ebene

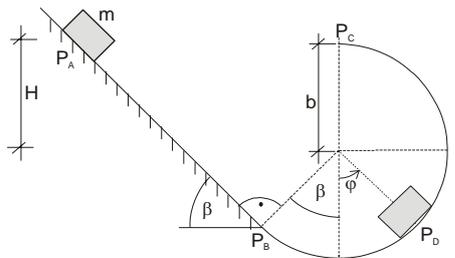


Bild 3. 29 Massenpunkt m auf einer schiefen Ebene mit anschließendem Kreisbogen

Lösung:  $v(\varphi)^2 = 2g(b \cos \varphi + H)$ ,  $N(\varphi) = mg(3 \cos \varphi + 2 \frac{H}{b})$ ,  $H = \frac{3}{2} b$ ,  $\psi_P = 68,26^\circ$

## 4 Kinematik und Kinetik eines Systems von Massenpunkten

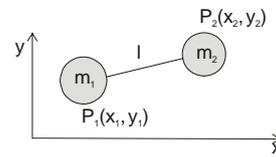


Bild 4. 2 System mit einem translatorischen und einem rotatorischen Freiheitsgrad

Die Hantel hat eine starre Bindung zwischen den beiden Massenpunkten durch eine Stange. Aus dem festen Abstand

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4. 2)$$

ergibt sich die Kinematik.

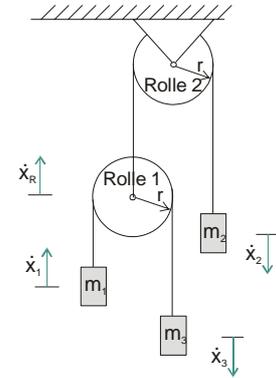


Bild 4. 2a System mit zwei Freiheitsgraden

Ein weiterer Zusammenhang sind physikalische Bindungen. Zwischen dem Abstand der Massen und den Kräften kann eine physikalische Abhängigkeit bestehen. Zum Beispiel beim Feder- Masse- System hängen die Kräfte über das Federgesetz vom Abstand ab.

Weiter gilt wie in der Statik  $actio = reactio$ . Die inneren Kräfte und die Auflagerkräfte werden durch Schneiden des Systems eingeführt.

### Lehrziel des Kapitels

- Kräfte auf ein System von Massenpunkten
- Verknüpfung der Kinetik mit der Kinematik
- Anwendung der NEWTONsche Gesetze auf ein System von Massenpunkten
- Anwendung des Impulssatzes auf ein System von Massenpunkten

### Schwerpunktsatz

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{R} \quad (4. 11)$$

### Momentensatz (Drallsatz oder Drehimpulssatz)

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^{(0)} = \vec{M}^{(0)} \quad (4. 12)$$

### Sonderfall der ebenen Bewegung

$$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi} = \omega \quad (4. 13)$$

$$L_z = \omega \sum_n m_n r_n^2 = \omega \Theta_z \quad (4. 14)$$

### Impulssatz

$$m_1(w_1 - v_1) = - \hat{F} \quad (4. 18)$$

$$m_2(w_2 - v_2) = \hat{F} \quad (4. 19)$$

### Impulserhaltungssatz

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2. \quad (4. 24)$$

### Stoßbedingung mit der Stoßzahl e

$$e = - \frac{w_1 - w_2}{v_1 - v_2} \quad (4. 20)$$

### Energieverlust beim Stoß

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \quad (4. 21)$$

In Kapitel 3 wurden die Bewegungen des einzelnen Massenpunktes betrachtet. Jetzt folgt die Betrachtung eines Systems mit einer endlichen Anzahl von Massenpunkten. Das können entweder mehrere Körper sein, wobei jeder (punktförmige) Körper als Massenpunkt anzusehen ist, oder als ausgedehntes System, das sich aus mehreren Massenpunkten zusammensetzt. Das ist die Vorstufe zum kontinuierlichen System (Kontinuum), das aus unendlich vielen, infinitesimalen Massenpunkten besteht.

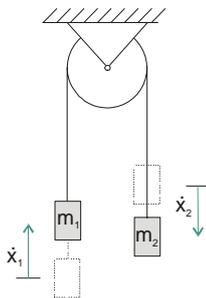


Bild 4. 1 System mit einem Freiheitsgrad

Zwischen den einzelnen Massenpunkten bestehen durch die geometrischen Beziehungen kinematische Bindungen oder die Kinematik. Das dehnstarre, masselose Seil erzeugt die kinematische Beziehung, die in Geschwindigkeiten definiert wird

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2. \quad (4. 1)$$

Die Zahl der freien Bewegungsmöglichkeiten der Massen und die Einschränkungen durch die kinematischen Beziehungen ergibt die Zahl der Freiheitsgrade des Systems. Von den zwei Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  ist nur eine frei wählbar. Die zweite leitet sich aus der kinematischen Beziehung (4. 1) ab.

### Beispiel

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Aufstellen der kinematischen Beziehungen

Zwei Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  sind durch ein dehnstarres, masseloses Seil verbunden und über masselose Rollen (Radius  $r$ ) geführt.

gegeben:  $G_1, G_2, r$

gesucht: Bestimmung der Seilkräfte und die Beschleunigungen der Massen, wenn das System sich selbst überlassen wird.

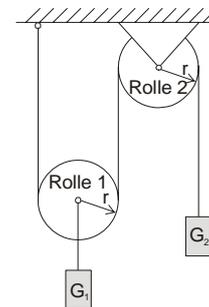


Bild 4. 3 System mit einem Freiheitsgrad

### Lösung

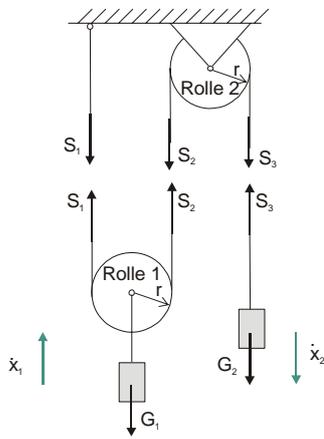


Bild 4. 4 Schnittbild

Nach dem Freischneiden werden NEWTON'schen Bewegungsgleichungen für jeden einzelnen Massenpunkt aufgestellt. Für die Rolle 1 gilt

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g + S_1 + S_2, \quad (4.3)$$

für die Masse 2

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - S_3. \quad (4.4)$$

Für die Seilkräfte gilt wegen der masselosen Umlenkrollen, an denen eine reine Umlenkung erfolgt,

$$S_1 = S_2 = S_3 = S. \quad (4.5)$$

Damit folgt

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g + 2S \quad (4.6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - S \quad (4.7)$$

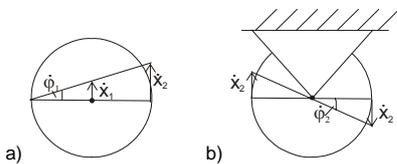


Bild 4. 5 Kinematik: a) an der Rolle 1, b) an der Rolle 2

Die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  sind voneinander abhängig. Verschiebt sich  $m_2$  um die Strecke  $x_2$  nach unten, verschiebt sich  $m_1$  um die halbe Strecke nach oben (Flaschenzug). Daraus folgt nach Bild 4. 5

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2} \dot{x}_2 \quad (4.8)$$

Damit stehen alle benötigten Gleichungen zur Lösung zur Verfügung. Mit (4. 6) + 2 \* (4. 7) und (4. 8) ergibt sich

$$(m_1 + 4 m_2) \ddot{x}_1 = (2 m_2 - m_1) g \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} g \quad (4.9)$$

Für die Seilkraft folgt aus (4. 7)

$$S = -2 m_2 \ddot{x}_1 + m_2 g = m_2 g \left( -2 \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} + 1 \right) = 3 \frac{m_2 m_1}{m_1 + 4m_2} g. \quad (4.10)$$

#### 4. 1 Schwerpunktsatz

Es gilt mit der Gesamtmasse  $m = \sum_n m_n$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{R} \quad (4.11)$$

"Der Schwerpunkt des Systems von Massenpunkten bewegt sich so, als ob alle n Massen in ihm vereinigt wären und die Resultierende R aller äußeren Kräfte im Schwerpunkt angreifen. Die inneren Kräfte haben auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluß."

#### 4. 2 Momentensatz (Drallsatz oder Drehimpulssatz)

Es gilt für jeden Massenpunkt des Systems

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \vec{M}_0 \quad (4.12)$$

"Die zeitliche Änderung des Gesamtdralls in Bezug auf einen raumfesten Punkt 0 ist gleich dem Moment um denselben Punkt 0."

#### Sonderfall der ebenen Bewegung

Alle n Massenpunkte bewegen sich in Ebenen senkrecht zur z- Achse. Für alle Massenpunkte gilt

$$\dot{\phi}_n = \dot{\phi} = \omega \quad (4.13)$$

mit dem Massenträgheitsmoment  $\Theta_z$  um die z- Achse für  $\Theta_z = \text{const.}$

$$L_z = \omega \sum_n m_n r_n^2 = \omega \Theta_z \quad (4.14)$$

$$\Theta_z \dot{\omega} = \Theta_z \dot{\phi} = M_z \quad (4.15)$$

#### 4. 3 Impulssatz

Aufgrund der Vereinfachungen gibt es innerhalb der Kinetik der Massenpunkte nur den geraden zentralen Stoß. Zwei Kugeln, deren Schwerpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, stoßen aufeinander. Die Definition des Massenpunkts vereinigt die gesamte Masse im Schwerpunkt, deshalb können Massenpunkte nicht rotieren.

#### Definition

Es ist die Massenpunktsgeschwindigkeit  $v_i$  vor dem Stoß und die Massenpunktsgeschwindigkeit  $w_i$  nach dem Stoß.

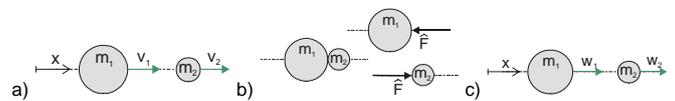


Bild 4. 6 Stoßablauf für  $v_1 > v_2$  und  $m_1 > m_2$ : a) vor dem Stoß; b) während des Stoßes; c) nach dem Stoß

Infolge des Stoßes erfahren die Kugeln die Geschwindigkeitsänderungen

$$w_1 - v_1, \quad (4.16)$$

und

$$w_2 - v_2. \quad (4.17)$$

Zum Stoßzeitpunkt (Bild 4. 6 b) werden die Impulssätze für beide Massen geschrieben

$$m_1(w_1 - v_1) = -\hat{F} \quad (4.18)$$

$$m_2(w_2 - v_2) = \hat{F} \quad (4.19)$$

Die Stoßbedingung mit der Stoßzahl lautet

$$e = -\frac{w_1 - w_2}{v_1 - v_2} \quad (4.20)$$

Die Stoßzahl liegt zwischen 0 und 1, wobei gilt, dass beim ideal elastischen Stoß mit  $e = 1$  die Stoßenergie bleibt erhalten und beim ideal plastischen Stoß mit  $e = 0$  ein Energieverlust entsteht.

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (4.21)$$

Nach Elimination der Stoßkraft und Einsetzen der Stoßbedingung ergeben sich die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Diese Gleichungen gelten nur für Massenpunktsysteme!

$$w_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, \quad (4.22)$$

$$w_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (4.23)$$

Der Impuls zwischen zwei Massenpunkten kann auch durch den Impulserhaltungssatz beschrieben werden

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2. \quad (4.24)$$

"Impuls vorher = Impuls nachher"



#### Beispiel

- Impulssatz für ein System von zwei Massenpunkten
- Erster Fall Masse 2 ist unendlich groß, zweiter Fall Masse 2 ist endlich groß.

Zum Einrammen eines Pfahles (Masse  $m_2$ ) in das Erdreich wird eine Masse  $m_1$  ( $m_2 > m_1$ ) aus der Höhe  $h$  fallengelassen. Die Stoßzahl  $e$  zwischen den beiden Massen ist bekannt. Die Widerstandskraft, die das Erdreich dem Pfahl entgegengesetzt, lasse sich in der Resultierenden  $H$  zusammenfassen. Der Pfahl bewegt sich erst dann ins Erdreich, wenn  $H$  einen Grenzwert  $H_0$  überschreitet.

gegeben:  $m_2, m_1, m_2 > m_1, H_0, h, e$

gesucht: Bestimmung der Rückschleuderhöhe  $h'$  der Masse  $m_1$ , wenn die beim Stoß auftretenden Kräfte die Grenzwiderstandskraft  $H_0$  nicht überschritten werden, und der Rückschleuderhöhe  $h''$  der Masse  $m_1$ , wenn die beim Stoß auftretenden Kräfte die Grenzwiderstandskraft  $H_0$  überschritten werden.

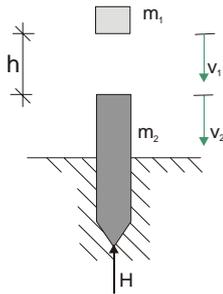


Bild 4. 7 Einrammen eines Pfahles in das Erdreich durch eine Masse  $m_1$

**Lösung**

**Maximale Widerstandskraft  $H_0$  wird nicht überschritten**

Da die maximale Widerstandskraft  $H_0$  nicht überschritten worden ist, bewegt sich die Masse  $m_2$  nicht weiter ins Erdreich vor. Die Masse  $m_2$  und das Erdreich bilden eine gemeinsame Masse ( $m_2 \rightarrow \infty$ ).

Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß sind

$$v_1 = \sqrt{2gh}, v_2 = 0. \quad (4. 25)$$

Die Geschwindigkeit nach dem Stoß ergeben sich zu (mit  $m_2 \rightarrow \infty$ )

$$w_1 = \frac{m_1 v_1 + e m_2 (-v_1)}{m_1 + m_2} = -e v_1 = -\sqrt{2gh'} = -\sqrt{2gh} e. \quad (4. 26)$$

Die Rückschleuderhöhe ist

$$h' = h e^2. \quad (4. 27)$$

**Maximale Widerstandskraft  $H_0$  überschritten**

Da die maximale Widerstandskraft  $H_0$  überschritten wird, bewegt sich auch die Masse  $m_2$ .

Die Geschwindigkeit nach dem Stoß ergeben sich zu

$$w_1 = \frac{m_1 v_1 + e m_2 (-v_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} = -\sqrt{2gh''} \quad (4. 28)$$

Die Rückschleuderhöhe ist

$$h'' = h \left[ \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} \right]^2 = h \left[ \frac{m_1 - e(m_1 + m_2) + e m_1}{m_1 + m_2} \right]^2 = h \left[ e - \frac{m_1 (1+e)}{m_1 + m_2} \right]^2 < h' \quad (4. 29)$$

**Aufgabe 4. 1**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Reibung

Auf der Plattform eines Wagens  $m_1$  (masselose Räder) liegt eine Kiste  $m_2$ . An dem bis dahin ruhenden Wagen greift eine Kraft  $F$  an, die den Wagen so stark beschleunigt, dass die Kiste rutscht.

gegeben:  $m_1, m_2, F, l, \mu$

gesucht: Bestimmung der Zeit  $t^*$ , an der die Kiste vom Wagen herunterfällt.

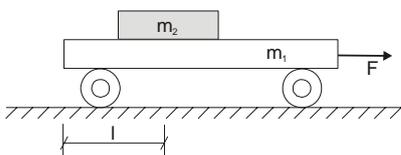


Bild 4. 8 Wagens  $m_1$  mit Kiste  $m_2$

Lösung:  $t^* = \sqrt{\frac{2m_1}{F - \mu g(m_1 + m_2)}}$

**Aufgabe 4. 2**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Haftung
- Aufstellen einer Schwingungsdifferentialgleichung

Beim Auffahren eines Güterwagens (Gewicht  $G$ ) auf einen Prellbock (Federsteifigkeit  $c$ ) kommt eine auf der rauhen Plattform (Haftungskoeffizient  $\mu_0$ ) liegende flache Kiste (Gewicht  $Q$ ) ins Rutschen. Die Massen der Räder und des Prellbockpuffers sind vernachlässigbar klein.

gegeben:  $G, Q, \mu_0, c$

gesucht: Bestimmung der Mindestgeschwindigkeit  $v$  des Wagens, die zum Aufprall notwendig gewesen ist.

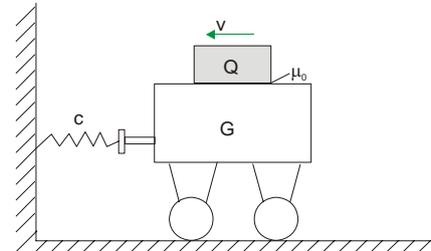


Bild 4. 10 Güterwagen fährt auf einen Prellbock

Lösung:  $v_{min} = \mu_0 \sqrt{\frac{g}{c} G_{ges}}$

**Aufgabe 4. 3**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Reibung

Ein Brett (Masse  $M$ ) ruht auf zwei masselosen Rollen. Auf dem einen Ende des Brettes liegt ein Klotz (Masse  $m$ ). Den Klotz stößt eine Punktmasse (ebenfalls Masse  $m$ ) mit der Geschwindigkeit  $v_0$ . Der Stoß sei voll elastisch. Zwischen Brett und Klotz herrscht der Reibungskoeffizient  $\mu$ .

gegeben:  $M, m, v_0, e = 1, \mu$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit  $w$  von Brett und Klotz, wenn der Klotz relativ zum Brett zur Ruhe gekommen ist und die Dauer des Rutschvorgangs.

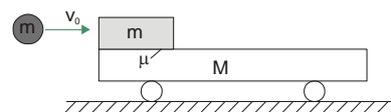


Bild 4. 12 Brett mit zwei masselosen Rollen, auf dem ein Klotz liegt

Lösung:  $w_{Brett} = \frac{m}{m+M} v_0, t^* = \frac{v_0}{\mu g} \frac{M}{m+M}$

**Aufgabe 4. 4**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Ein Golfball (Masse  $m$ ) stößt mit der Geschwindigkeit  $v_1$  gegen ein Hindernis (Masse  $M$ ), das anfänglich in Ruhe ist.

gegeben:  $m, v_1, \mu, M = 5 m, e$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit  $w_1$ , die der Ball zurückrutscht, wenn eine Stoßzahl  $e$  angenommen wird und den Weg des Klotzes  $M$  über die rauhe Unterlage (Reibungskoeffizient  $\mu$ ).

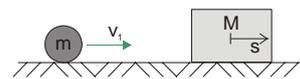


Bild 4. 14 Golfball und Hindernis

Lösung:  $w_1 = \frac{(1-5e)}{6} v_1, s = \frac{m^2(1+e)^2}{2\mu g(m+M)^2} v_1^2$

**Aufgabe 4.5**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß
- Bestimmung des Energieverlusts bei plastischem Stoß

Man berechne den relativen Energieverlust  $\Delta\Pi$  beim plastischen Stoß zweier Körper in Abhängigkeit vom Massenverhältnis  $\frac{m_1}{m_2}$ . Vor dem Stoß sei  $v_2 = 0$ .

gegeben:  $\frac{m_1}{m_2}, v_1, v_2 = 0, e = 0$

gesucht: Energieverlust  $\Delta\Pi = \frac{(\Pi_0 - \Pi_1)}{\Pi_0}$

Lösung:  $\Delta\Pi = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

**Aufgabe 4.6**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Eine aus zwei Punktmassen und einer masselosen Verbindungsstange bestehende Hantel fällt mit der Vertikalgeschwindigkeit  $v_0$  auf eine glatte, schiefe Ebene.

gegeben:  $m, a, v_0, \alpha$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten der Hantel nach einem teilelastischen Stoß

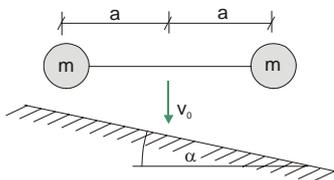


Bild 4.16 Hantel aus zwei Punktmassen und masselosen Verbindungsstange

Lösung:  $\dot{x}_{Sn} = \frac{\cos^2 \alpha - e}{\cos^2 \alpha + 1} v_0 \cos \alpha, \dot{\varphi}_{Sn} = \frac{\cos^2 \alpha (1+e)}{\cos^2 \alpha + 1} \frac{v_0}{a}, \dot{y}_{Sn} = \dot{y}_{Sv} = v_0 \sin \alpha$

**Aufgabe 4.7**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulserhaltungssätze
- Gerader, zentraler Stoß

Zwei Jungen (Masse  $m_1$  und  $m_2$ ) stehen am Heck eines ruhenden Bootes (Masse  $M$ ). Zunächst läuft der erste Junge zum Bug und springt mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  relativ zum Boot in Wasser. Dann läuft der zweite Junge zum Bug und springt ebenfalls mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  relativ zum Boot ins Wasser. Das Boot gleite reibungsfrei im Wasser.

gegeben:  $m_1, m_2, M, v_0$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit des Bootes nach Absprung des zweiten Jungen und die Änderung der Geschwindigkeit des Bootes, wenn die beiden Jungen gleichzeitig zum Bug laufen und gleichzeitig mit der Geschwindigkeit  $v_0$  relativ zum Boot ins Wasser springen.

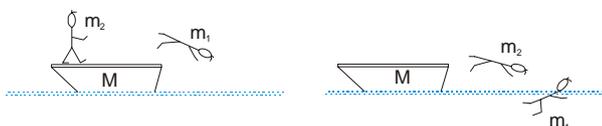


Bild 4.18 Zwei Jungen am Heck eines ruhenden Bootes

Lösung:  $w' = \left( \frac{Mm_1 + Mm_2 + 2m_1m_2 + m_2^2}{(M+m_1+m_2)(M+m_2)} \right) v_0, w'' = \frac{m_1 + m_2}{M + m_1 + m_2} v_0$

**Aufgabe 4.8**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Reibung
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Ein PKW 2 (Masse  $m_2$ ) schleudert auf regennasser Straße und bleibt quer stehen. Ein nachfolgender PKW 1 (Masse  $m_1$ ) kommt mit der Geschwindigkeit  $v_1$  heran, erkennt das Hindernis und beginnt im Abstand  $s_1$  vom querstehenden PKW 2 (VW) eine Vollbremsung (Rutschen, Reibungskoeffizient  $\mu_1$ ). Der Bremsweg reicht nicht aus, es kommt zum Zusammenstoß (Stoßzahl  $e$ ). Der querstehende PKW 2 (VW) wird um die Strecke  $s_2$  (Reibungskoeffizient  $\mu_2$ ) weitergeschoben.

gegeben:  $m_1, m_2, s_1, s_2, \mu_1, \mu_2$

gesucht: Wie groß war die Geschwindigkeit  $v_{10}$  des nachfolgenden PKW 1. Vor Gericht bestreitet der PKW 1-Fahrer die Überschreitung der zulässige Höchstgeschwindigkeit ( $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ). Für die Zahlenwerte:  $m_1 = 2 m_2 = 2 m, g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,

$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}, s_1 = 2 s_2 = 40 \text{ m}, e = \frac{1}{2}$  ist zu überprüfen, ob die Aussage glaubwürdig ist.

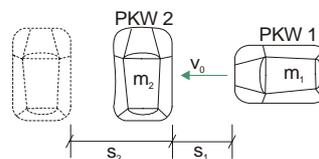


Bild 4.22 PKW 2 querstehend auf regennasser Straße und nachfolgender PKW 1

Lösung:  $v_{10} = > 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

**Aufgabe 4.9**

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Über eine in A drehbar gelagerte Rolle (masselos, Radius  $r$ ) ist ein masseloses Seil geschlungen, an dem die beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  befestigt sind. Die Länge des Seils ist so groß, daß es gerade gespannt ist, wenn beide Massen die Lage  $z = 0$  einnehmen. Die Masse  $m_1$  wird nun um  $h_1$  angehoben und fallen gelassen, während  $m_2$  auf der Unterlage liegen bleibt.

gegeben:  $m_1, m_2, h_1, h_2, r$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit  $v$ , mit der die Masse  $m_1$  am Boden ( $z = -h_2$ ) ankommt, wenn sie in der beschriebenen Lage ( $z = h_1$ ) losgelassen wird.

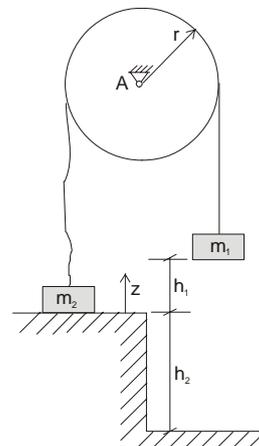


Bild 4.23 Massen  $m_1$  und  $m_2$

Lösung:  $v = \sqrt{2g \left( h_1 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} + h_2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)}$

## 5 Bewegung des starren Körpers



### Lehrziel des Kapitels

- Kräfte auf ein Kontinuum
- Verknüpfung der Kinetik mit der Kinematik
- Anwendung der NEWTONsche Gesetze auf ein Kontinuum
- Anwendung des Impulssatzes auf ein Kontinuum

### f(x) = 0 • Schwerpunktsatz oder NEWTONsche Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{R}. \quad (5.1)$$

### • Momentensatz

$$\Theta_0 \ddot{\varphi} = \vec{M}_0 \quad \text{oder} \quad \Theta_S \ddot{\varphi} = \vec{M}_S \quad (5.2)$$

### • Energiesatz

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2} \Theta_z (\omega^2 - \omega_0^2) = W \quad (5.4)$$

### • Massenträgheitsmoment

$$\Theta_z = \int r^2 dm \quad (5.5)$$

### • Satz von STEINER

$$\Theta_A = \Theta_S + m s^2 \quad (5.9)$$

### • Trägheitsradius

$$i_A^2 = \frac{\Theta_A}{m} \quad (5.10)$$

### • NEWTONschen Bewegungsgleichungen um den Schwerpunkt S

$$m \ddot{\vec{a}}_S = \vec{R} \quad (5.33)$$

### • Momentensatz um den Schwerpunkt S

$$\Theta_S \dot{\omega} = \vec{M}_S \quad (5.34)$$

### • Momentensatz bezüglich des Momentanpols MP

$$\Theta_{MP} \dot{\omega} = \vec{M}_{MP}, \quad (5.35)$$

### • Energiesatz für starre Körper

$$T_1 - T_0 = W. \quad (5.45)$$

### • Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_S \omega^2. \quad (5.46)$$

### • D' ALEMBERTsches Prinzip "Scheinkraft"

$$\vec{F}_{Sch} = -m \ddot{\vec{a}}_S \quad (5.50)$$

### • "Scheinmoment"

$$\vec{M}_{Sch} = -\Theta_S \dot{\omega} \quad (5.51)$$

### • Arbeitssatz

$$\delta W = 0 \quad (5.54)$$

### • Gerader exzentrischer Stoß Impulssatz um den Schwerpunkt S

$$m (v_{S \text{ nach}} - v_{S \text{ vor}}) = \Sigma \hat{F}, \quad (5.58)$$

### • Drehimpulssatz um den Schwerpunkt S

$$\Theta_S (\dot{\varphi}_{\text{nach}} - \dot{\varphi}_{\text{vor}}) = \Sigma \hat{M}. \quad (5.59)$$

### • Stoßbedingung

$$e = - \frac{v_{P1} - v_{P2}}{v_{P1} - v_{P2}} \quad (5.60)$$

Wie im Kapitel 4 gelten folgende Sätze, aber diesmal erweitert für den starren Körper, beziehungsweise das Kontinuum.

### Schwerpunktsatz oder NEWTONsche Bewegungsgleichungen

Mit der Gesamtmasse des Kontinuums  $m = \int dm$  gilt

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{R}. \quad (5.1)$$

### Momentensatz

Um einem raumfesten Punkt (0) oder den Massenmittelpunkt S gilt

$$\Theta_0 \ddot{\varphi} = \vec{M}_0 \quad \text{oder} \quad \Theta_S \ddot{\varphi} = \vec{M}_S \quad (5.2)$$

mit dem Massenträgheitsmoment  $\Theta_0$ , beziehungsweise  $\Theta_S$  (siehe Kapitel 5. 1).

### 1. Sonderfall

Wenn der Vektor  $\vec{R}$  durch Schwerpunkt S geht, herrscht reine Translation.

### 2. Sonderfall

Wenn das Kontinuum um die raumfeste Achse z mit dem Massenträgheitsmoment  $\Theta_z = \int r^2 dm$  rotiert, herrscht reine Rotation um diesen Punkt.

$$\Theta_z \dot{\omega} = M_z \quad (5.3)$$

### Energiesatz

Der Energiesatz wird nun um die Trägheitsterme der ausgedehnten rotierenden Masse erweitert

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2} \Theta_z (\omega^2 - \omega_0^2) = W. \quad (5.4)$$

## 5.1 Massenträgheitsmoment

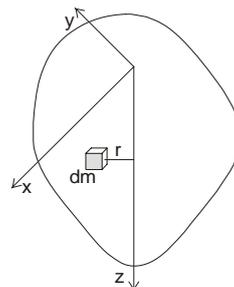


Bild 5. 1 Infinitesimales Massenelement im Abstand r von der z- Achse

Es gilt

$$\Theta_z = \int r^2 dm \quad (5.5)$$

Es gibt eine Analogie zum polaren Flächenträgheitsmoment  $I_p = \int r^2 dA$ . Entsprechendes gilt für das Deviations- oder Zentrifugalmoment

$$\Theta_{xy} = \int x y dm \quad (5.6)$$

$$\Theta_{yz} = \int y z dm \quad (5.7)$$

$$\Theta_{zx} = \int z x dm \quad (5.8)$$

### Satz von STEINER

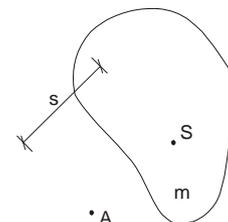


Bild 5. 2 Masse mit Massenschwerpunkt S und Punkt A im Abstand s

STEINER- Anteil für das Massenträgheitsmoment um A ist

$$\Theta_A = \Theta_S + m s^2 \quad (5.9)$$

und dem Trägheitsradius

$$i_A^2 = \frac{\Theta_A}{m} \quad (5.10)$$

Tabelle 5. 1 Einige gebräuchliche Massenträgheitsmomente

### Dünnere Stab



$$\Theta_S = \frac{1}{12} m l^2 \quad (5.11)$$

Vollzylinder  $\Theta_S = \frac{1}{2} m r^2$  (5.12)

Vollkugel  $\Theta_S = \frac{2}{5} m r^2$  (5.13)

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}, \quad (5.20)$$

die erste Ableitung nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}_P$

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (5.21)$$

die zweite Ableitung nach der Zeit ergibt die Beschleunigung  $\ddot{\vec{r}}_P$

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (5.22)$$

Eine ebene Bewegung lässt sich für jeden Zeitpunkt als reine Drehung um einen Punkt M beschreiben, der augenblicklich in Ruhe ist, dem Momentanpol MP.

Die Gleichung der Polkurve ist identisch mit der Bahn des Momentanpols MP.

Dies lässt sich beweisen. Es gilt

$$x_{MP} = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}} \quad (5.23)$$

$$y_{MP} = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}} \quad (5.24)$$

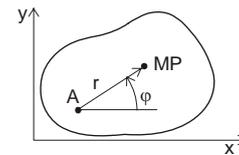


Bild 5.5 Koordinaten  $x_A, y_A$  des Punktes A, Koordinaten  $x_{MP}, y_{MP}$  des Momentanpols

Dann ist mit den Polarkoordinaten

$$x_{MP} = x_A + r \cos \varphi, \quad (5.25)$$

$$y_{MP} = y_A + r \sin \varphi. \quad (5.26)$$

Beide Komponenten der Geschwindigkeit sind im Momentanpol Null, das ist die Bedingung für den Momentanpol MP

$$\dot{x}_{MP} = 0, \quad (5.27)$$

$$\dot{y}_{MP} = 0. \quad (5.28)$$

Die Ableitung nach der Zeit von (5.25) und (5.26) ergibt die Geschwindigkeitskomponenten

$$\dot{x}_{MP} = \dot{x}_A - r \dot{\varphi} \sin \varphi = 0, \quad (5.29)$$

$$\dot{y}_{MP} = \dot{y}_A + r \dot{\varphi} \cos \varphi = 0. \quad (5.30)$$

Daraus folgt

$$r \sin \varphi = \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}} \quad (5.31)$$

und

$$r \cos \varphi = - \frac{\dot{y}_A}{\dot{\varphi}}, \quad (5.32)$$

(5.31) und (5.32) in (5.25) und (5.26) eingesetzt ergeben sich die Gleichungen (5.23) und (5.24). Damit ist die Behauptung bewiesen.

## 5.2 Kinetik

Es gelten die NEWTONschen Bewegungsgleichungen und der Momentensatz um den Schwerpunkt S

$$m \vec{a}_S = \vec{R} \quad (5.33)$$

$$\Theta_S \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_S \quad (5.34)$$

oder der Momentensatz bezüglich des Momentanpols MP

$$\Theta_{MP} \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{MP}, \quad (5.35)$$

wenn M und S einen festen Abstand haben.

### Beispiel

- Berechnung mit den NEWTONschen Gleichungen und dem Momentensatz

Um eine Seiltrommel (Masse  $m_1$ , Massenträgheitsmoment  $\Theta_1$ ), die über ein um die Trommel (Radius  $r_1$ ) gewickeltes Seil mit dem Aufhängepunkt A verbunden ist, ist ein zweites Seil gewickelt und an der Trommel befestigt (Radius  $r_2$ ). Am Ende des zweiten Seiles hängt die Masse  $m_2$ .

gegeben:  $m_1, m_2, \Theta_1, r_1, r_2$

**Beispiel**

- Berechnung des Massenträgheitsmomentes
- Anwendung des Satzes von STEINER

Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines Ventilatorlaufrades mit zwei angeedeuteten Flügeln.

gegeben:  $l, a, r_1, r_a$

gesucht: Bestimmung des Massenträgheitsmomentes

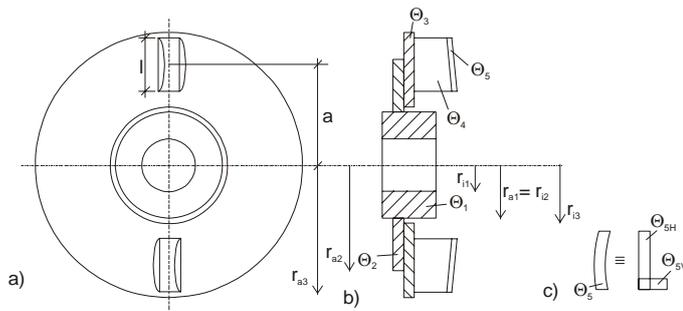


Bild 5.3 Ventilatorlaufrades mit zwei angeedeuteten Flügeln; a) Draufsicht; b) Seitenansicht mit der Kennzeichnung der Einzelteile; c) Näherung eines Einzelflügels

### Lösung

Das Massenträgheitsmoment setzt sich aus fünf Einzelmassenträgheitsmomenten zusammen

$$\Theta_{ges} = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 \quad (5.14)$$

Diese sind

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} m_1 (r_{a1}^2 - r_{11}^2), \quad (5.15)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} m_2 (r_{a2}^2 - r_{12}^2), \quad (5.16)$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{2} m_3 (r_{a3}^2 - r_{13}^2), \quad (5.17)$$

$$\Theta_4 = 4 \left( \frac{1}{12} m_4 l^2 + m_4 a^2 \right), \quad (5.18)$$

und

$$\Theta_5 = \Theta_{5H} + \Theta_{5V} = \frac{1}{2} m_{5H} (r_{a5H}^2 - r_{15H}^2) + \frac{1}{2} m_{5V} (r_{a5V}^2 - r_{15V}^2). \quad (5.19)$$

## 5.2 Ebene Bewegung

### 5.2.1 Kinematik

Die Bewegung jedes Punktes P eines Körpers wird durch Translation eines körperfesten Punktes A und einer Drehung eines körperfesten Strahles  $\vec{AP}$  um diesen Punkt beschrieben.

Der Ortsvektor  $\vec{r}_P$  ist damit

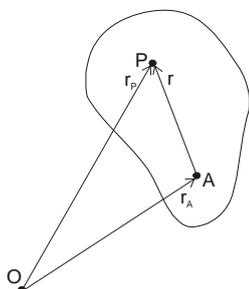


Bild 5.4 Bewegung eines Punktes P

gesucht: Bestimmung der Seilkraft S im Aufhängepunkt A und der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$ .

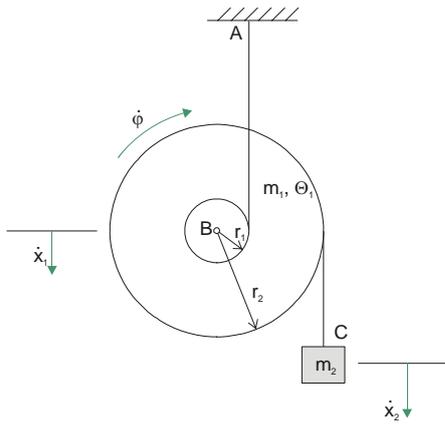


Bild 5. 6 Seiltrommel

$$S_1 = -m_1 \ddot{x}_1 + m_1 g + S_2$$

$$= m_1 r_1 \frac{g(m_2(r_2 - r_1) - m_1 r_1)}{\Theta_1 + m_1 r_1^2 + m_2(r_2 - r_1)^2} + m_1 g - m_2(r_2 - r_1) \frac{g(m_2(r_2 - r_1) - m_1 r_1)}{\Theta_1 + m_1 r_1^2 + m_2(r_2 - r_1)^2} + m_2 g$$

$$= m_1 g + m_2 g + \frac{g(m_2^2(r_2 - r_1)^2 - m_1^2 r_1^2)}{\Theta_1 + m_1 r_1^2 + m_2(r_2 - r_1)^2}, \quad (5.43)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{g(m_2(r_2 - r_1) - m_1 r_1)}{\Theta_1 + m_1 r_1^2 + m_2(r_2 - r_1)^2} \quad (5.44)$$

### 5.3 Energiesatz

Wie in Kapitel 4. 3 gilt der Energiesatz auch für starre Körper

$$T_1 - T_0 = W. \quad (5.45)$$

"Die Arbeit, welche die Kräfte zwischen zwei Bahnpunkten leisten, ist gleich der Änderung der kinetischen Energie."

Für den starren Körper muß allerdings noch der Anteil aus der Rotation in der kinetischen Energie mitberücksichtigt werden

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \omega^2. \quad (5.46)$$

#### Lösung durch Schneiden

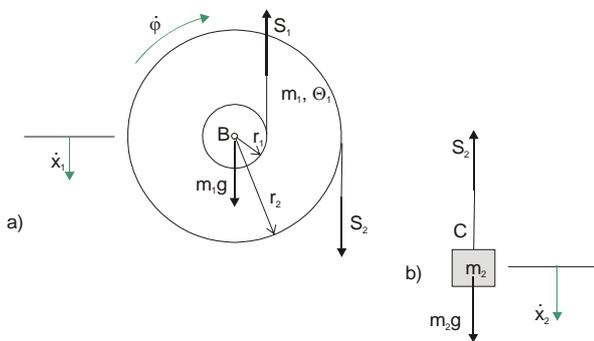


Bild 5. 7 Schnittbild und Koordinaten a) Trommel m1; b) Masse m2

Für die Trommel gilt die NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + S_2 - S_1 \quad (5.36)$$

und der Momentensatz

$$\Theta_1 \ddot{\varphi} = S_2 r_2 - S_1 r_1, \quad (5.37)$$

für die Masse m2 gilt die NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - S_2. \quad (5.38)$$

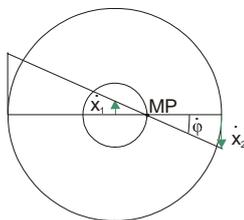


Bild 5. 8 Kinematik für die Trommel; mit dem Momentanpol MP

Aus Bild 5. 8 wird der Zusammenhang zwischen der Absenkungsgeschwindigkeit  $\dot{x}_1$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  sichtbar

$$\dot{x}_1 = -r_1 \dot{\varphi}. \quad (5.39)$$

Die Geschwindigkeit  $\dot{x}_2$  in C für die Masse m2 ist über das dehnstarre Seil somit

$$\dot{x}_2 = (r_2 - r_1) \dot{\varphi}. \quad (5.40)$$

Die Ableitung nach der Zeit liefert die Beschleunigungen

$$\ddot{x}_1 = -r_1 \ddot{\varphi}, \quad (5.41)$$

$$\ddot{x}_2 = (r_2 - r_1) \ddot{\varphi}. \quad (5.42)$$

Damit hat man fünf Gleichungen für die fünf Unbekannte  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  und kann das System lösen. Die Auflösung ergibt nach einiger Rechnung

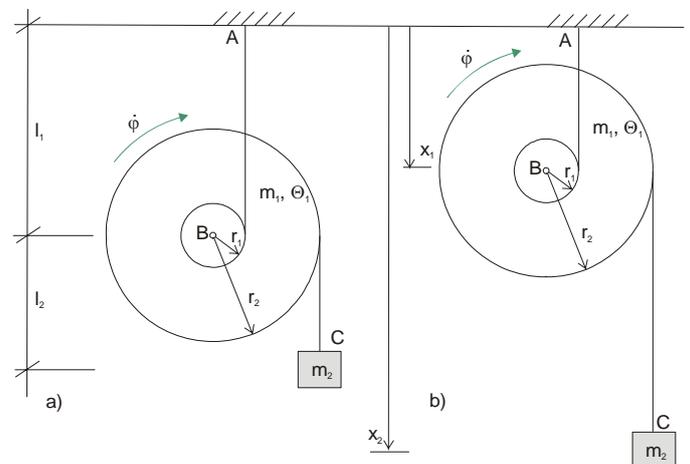


Bild 5. 9 a) Ruhelage 1 des Systems; b) ausgelenkte Lage 2 des Systems

Für das Potential wird ein raumfestes Bezugsniveau gewählt. Für die Ruhelage 1 (keine Geschwindigkeiten) und die ausgelenkte Lage 2 (bewegter Zustand) werden die Gesamtenergien verglichen.

Mit dem Energieerhaltungssatz gilt

$$T_1 + W_1 = T_2 + W_2 \quad (5.47)$$

$$-m_1 g l_1 - m_2 g (l_2 + l_1) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 \dot{\varphi}^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2 \quad (5.48)$$

Mit der Kinematik aus (5.39) und (5.40) sind 3 Gleichungen für die 3 Unbekannte  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{\varphi}$  vorhanden. Das Einsetzen und Auflösen nach  $\dot{\varphi}^2$  führt zu

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{m_2 g (r_2 - r_1) - m_1 g r_1}{\Theta_1 + m_1 r_1 + m_2 (r_2 - r_1)^2} \varphi. \quad (5.49)$$

Allerdings liefert dieser Weg nur die Geschwindigkeiten, zum Beispiel die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ . Durch Differentiation nach der Zeit und Heraus Kürzen von  $\dot{\varphi}$  erhält man das Ergebnis.

Zur Ermittlung der Seilkräfte muß wie in Bild 5. 7 geschnitten werden.

### 5.4 D' ALEMBERTSches Prinzip

Führt man für die Trägheitskraft eine "Scheinkraft"

$$\vec{F}_{\text{Sch}} = -m \vec{a}_S \quad (5.50)$$

und für das Trägheitsmoment ein "Scheinmoment"

$$\vec{M}_{\text{Sch}} = -\Theta_S \dot{\omega} \quad (5.51)$$

ein, so läßt sich die Kinetik wie die Statik berechnen

$$\Sigma \vec{F} = 0: \quad \vec{R} + (-m \vec{a}_S) = 0 \quad (5.52)$$

$$\Sigma \vec{M} = 0: \quad \vec{M}_S + (-\Theta_S \dot{\omega}) = 0. \quad (5.53)$$

Es gilt

"Die virtuelle Arbeit  $\delta W = 0$ , die aus den wirklichen Kräften und Momenten und den "Scheinkräften" und "-momenten" gebildet wird, bei einer virtuellen Verrückung."

Der Arbeitssatz lautet

$$\delta W = 0 \quad (5.54)$$

**Lösung mit dem d' ALEMBERTschen Prinzip**

Die äußeren Kräfte und Momente und die Scheinkräfte und Scheinmomente in negativer Richtung der tatsächlichen Bewegung werden eingeführt. Dann wird das Gleichgewicht mit dem Arbeitssatz der Statik hergestellt.

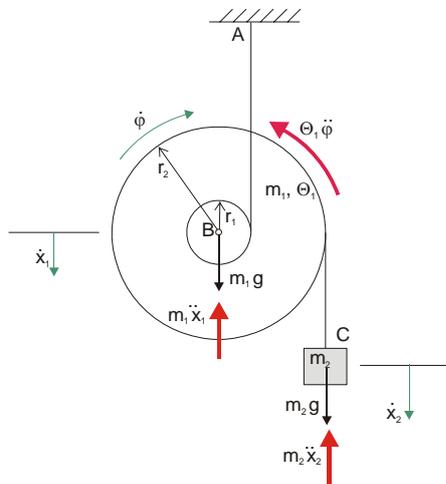


Bild 5.10 Einführen der Vorzeichen, der äußeren Kräfte und der d' ALEMBERTschen Scheinkräfte

Der Arbeitssatz liefert

$$\delta W = (m_1 g - m_1 \ddot{x}_1) \delta x_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2) \delta x_2 - \Theta_1 \dot{\phi} \delta \phi = 0 \quad (5.55)$$

Die Kinematik aus (5.39) und (5.40), die Beschleunigungen (5.41) und (5.42) und die Variation liefert die virtuellen Verrückungen

$$\delta x_1 = -r_1 \delta \phi, \quad (5.56)$$

$$\delta x_2 = (r_2 - r_1) \delta \phi. \quad (5.57)$$

Das sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$ ,  $\dot{\phi}$ . Das System ist lösbar.

Allerdings liefert dieser Weg nur die Beschleunigungen, zum Beispiel die Winkelbeschleunigung  $\dot{\phi}$ . Zur Ermittlung der Seilkräfte muß das System wie in Bild 5.7 geschnitten werden.

## 5.5 Stoßvorgänge

Vier unterschiedliche Stoßvorgänge werden betrachtet. Sie unterscheiden sich dadurch, ob die Normale zur Tangente an dem Stoßpunkt durch den Schwer-

punkt  $S_1$ , beziehungsweise  $S_2$  geht oder nicht. Ein weitere Rolle spielt, ob die Berührflächen der Stoßkörper glatt oder rau sind.

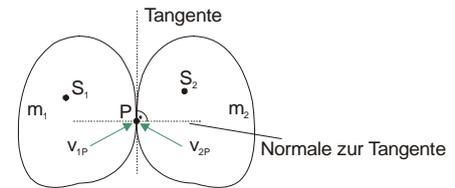


Bild 5.11 Geschwindigkeiten  $v_{1P}$ , beziehungsweise  $v_{2P}$  im Stoßpunkt P

### 5.5.1 Die einzelnen Stoßvorgänge

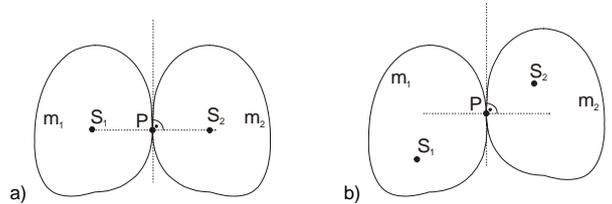


Bild 5.12 a) Zentraler Stoß; die Schwerpunkte  $S_1$ , beziehungsweise  $S_2$  liegen auf der Normalen durch den Stoßpunkt P; b) exzentrischer Stoß; die Schwerpunkte  $S_1$ , beziehungsweise  $S_2$  liegen außerhalb der Normalen durch den Stoßpunkt P

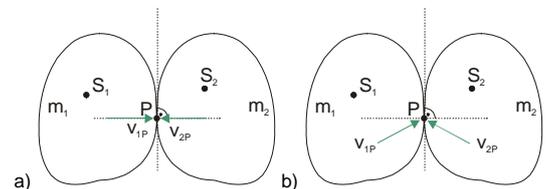


Bild 5.13 a) Gerader Stoß; die Geschwindigkeitsvektoren  $v_{1P}$ , beziehungsweise  $v_{2P}$  am Stoßpunkt P verlaufen in Richtung der Normalen; b) schiefer Stoß; die Geschwindigkeitsvektoren  $v_{1P}$ , beziehungsweise  $v_{2P}$  am Stoßpunkt P verlaufen in beliebiger Richtung; bei einer rauhen Oberfläche (Reibung) hat die Stoßkraft eine Tangential- und eine Normalkomponente; bei einer glatten Oberfläche liegt die Stoßkraft in Normalenrichtung

Diese Fälle werden in den verschiedenen Kombinationen untersucht. In Kapitel 3 wird der gerade, zentrale Stoß vorgestellt, hier wird der etwas kompliziertere gerade, exzentrische Stoß bearbeitet.

### 5.5.2 Gerader exzentrischer Stoß

Hier wird der gerade exzentrische Stoß behandelt. Es gilt der Impulssatz um den Schwerpunkt S

$$m (w_{S \text{ nach}} - v_{S \text{ vor}}) = \Sigma \hat{F}, \quad (5.58)$$

und der Drehimpulssatz um den Schwerpunkt S

$$\Theta_S (\dot{\phi}_{\text{nach}} - \dot{\phi}_{\text{vor}}) = \Sigma \hat{M}. \quad (5.59)$$

Allgemein gilt

- ist kein fester Drehpunkt vorhanden, zum Beispiel eine auf einer Ebene liegende Scheibe, werden die Impuls- und Drehimpulssätze in x- und y-Richtung, sowie um die Drehachse z um den Schwerpunkt S aufgestellt.
- ist ein fester Drehpunkt A vorhanden, zum Beispiel eine in A aufgehängte Scheibe wird der Drehimpulssatz um den Drehpunkt A aufgestellt.

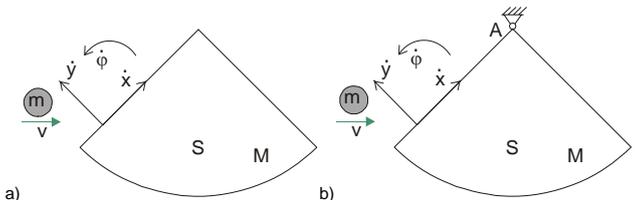


Bild 5.16 Scheibe M; a) kein Drehpunkt; b) Drehpunkt in A

Alternativ können immer die Impuls- und Drehimpulssätze in x- und y-Richtung, sowie um die Drehachse z um den Schwerpunkt S aufgestellt werden. Durch die Kinematik werden die Gleichungen verbunden.

Die Stoßbedingung

$$e = - \frac{w_{P1} - w_{P2}}{v_{P1} - v_{P2}} \quad (5.60)$$

wird immer um den Stoßpunkt P aufgestellt.

|  |   |
|--|---|
|  | <b>Beispiel</b>   |
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Exzentrischer, gerader Stoß zwischen zwei starren Körpern</li> <li>Teilelastischer Stoß</li> </ul> |

Zwei Schiffe (Massen  $m_1$  und  $m_2$ ) bewegen sich mit den Horizontalgeschwindigkeiten  $v_{S1}$  und  $v_{S2}$  ( $v_{S1} > v_{S2}$ ). Schiff 1 dreht sich zusätzlich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_{10}$  um seine eigene Achse. In Punkt P stoßen sie zusammen. Die Schiffswandungen sind glatt. Der Stoß sei plastisch.

gegeben:  $a_1, a_2, m_1, m_2, \Theta_{S1}, \Theta_{S2}, v_{S1}, v_{S2}, \dot{\phi}_{10}, e$

gesucht: Bestimmung aller Geschwindigkeiten nach dem Stoß

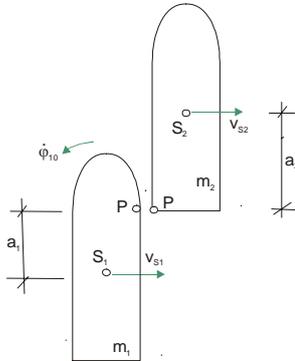


Bild 5. 14 Zwei Schiffe

|   |               |
|---|---------------|
|  | <b>Lösung</b> |
|---|---------------|

**Festlegung**

Massenpunktschwindigkeit  $v_i$ , beziehungsweise Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_{i0}$  vor dem Stoß, Massenpunktschwindigkeit  $w_i$ , beziehungsweise Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_i$  nach dem Stoß

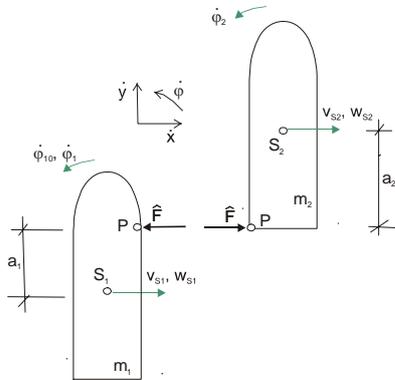


Bild 5. 15 Stoßbild mit Vorzeichendefinition

Die Geschwindigkeiten am Stoßpunkt P zeigen in Richtung der Stoßnormalen, in dieser Richtung wirkt die Stoßkraft  $\hat{F}$  (glatter Stoß!). In der tangentialen Richtung wirken keine Kräfte.

Die Geschwindigkeiten in y- Richtung nach dem Stoß werden durch den glatten Stoß in x- Richtung nicht verändert und sind vor und nach dem Stoß null.

**Impuls- und Drehimpulsgleichungen**

Impulssatz für Körper 1

$$m_1 (w_{S1} - v_{S1}) = - \hat{F}, \tag{5.61}$$

Drehimpulssatz für Körper 1

$$\Theta_{S1} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_{10}) = a_1 \hat{F}, \tag{5.62}$$

Impulssatz für Körper 2

$$m_2 (w_{S2} - v_{S2}) = \hat{F}, \tag{5.63}$$

Drehimpulssatz für Körper 2

$$\Theta_{S2} (\dot{\phi}_2 - 0) = a_2 \hat{F}. \tag{5.64}$$

Mit der Stoßbedingung am Stoßpunkt P

$$e = - \frac{w_{P1} - w_{P2}}{v_{P1} - v_{P2}}. \tag{5.65}$$

Die Geschwindigkeiten im Stoßpunkt werden durch die Schwerpunktschwindigkeiten  $v_{Si}$  und  $w_{Si}$  und die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\phi}_i$  und  $\dot{\phi}_{i0}$  ausgedrückt

$$v_{P1} = v_{S1} - a_1 \dot{\phi}_{10}, \tag{5.66}$$

$$v_{P2} = v_{S2}, \tag{5.67}$$

$$w_{P1} = w_{S1} - a_1 \dot{\phi}_1, \tag{5.68}$$

$$w_{P2} = w_{S2} + a_2 \dot{\phi}_2. \tag{5.69}$$

Damit hat man neun Gleichungen für die neun Unbekannten  $w_{S1}, w_{S2}, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \hat{F}, w_{P1}, w_{P2}, v_{P1}, v_{P2}$  und kann das System lösen.

Aus (5.61) + (5.63) folgt ( $\hat{F}$  eliminieren)

$$m_1 (w_{S1} - v_{S1}) + m_2 (w_{S2} - v_{S2}) = 0 \Rightarrow m_1 w_{S1} + m_2 w_{S2} = m_1 v_{S1} + m_2 v_{S2}. \tag{5.70}$$

Mit ((5.61) \*  $a_1$  + (5.62) folgt ( $\hat{F}$  eliminieren)

$$m_1 a_1 w_{S1} - m_1 a_1 v_{S1} + \Theta_{S1} \dot{\phi}_1 - \Theta_{S1} \dot{\phi}_{10} = 0 \Rightarrow m_1 a_1 w_{S1} + \Theta_{S1} \dot{\phi}_1 = m_1 a_1 v_{S1} + \Theta_{S1} \dot{\phi}_{10}. \tag{5.71}$$

Mit ((5.63) \*  $a_2$  - (5.64) folgt ( $\hat{F}$  eliminieren)

$$m_2 a_2 w_{S2} - m_2 a_2 v_{S2} - \Theta_{S2} \dot{\phi}_2 = 0 \Rightarrow m_2 a_2 w_{S2} - \Theta_{S2} \dot{\phi}_2 = m_2 a_2 v_{S2}. \tag{5.72}$$

Mit (5.66), (5.67), (5.68), (5.69) in (5.65)

$$e = - \frac{(w_{S1} - a_1 \dot{\phi}_1) - (w_{S2} + a_2 \dot{\phi}_2)}{(v_{S1} - a_1 \dot{\phi}_{10}) - v_{S2}} \Rightarrow (v_{S1} - a_1 \dot{\phi}_{10} - v_{S2}) e = - (w_{S1} - a_1 \dot{\phi}_1 - w_{S2} - a_2 \dot{\phi}_2) \Rightarrow -w_{S1} + w_{S2} + a_1 \dot{\phi}_1 + a_2 \dot{\phi}_2 = e v_{S1} - e v_{S2} - e a_1 \dot{\phi}_{10}. \tag{5.73}$$

Aus (5.70) + (5.73) \*  $m_1$  folgt ( $w_{S1}$  eliminieren)

$$m_1 w_{S1} + m_2 w_{S2} = m_1 v_{S1} + m_2 v_{S2} \Rightarrow -m_1 w_{S1} + m_1 w_{S2} + m_1 a_1 \dot{\phi}_1 + m_1 a_2 \dot{\phi}_2 = m_1 e v_{S1} - m_1 e v_{S2} - m_1 e a_1 \dot{\phi}_{10} \Rightarrow (m_2 + m_1) w_{S2} + m_1 a_1 \dot{\phi}_1 + m_1 a_2 \dot{\phi}_2 = m_1 v_{S1} (1+e) + (m_2 - m_1 e) v_{S2} - m_1 e a_1 \dot{\phi}_{10}. \tag{5.74}$$

Aus (5.72) \* ( $m_1 a_2$ ) + (5.74) \*  $\Theta_{S2}$  folgt ( $\dot{\phi}_2$  eliminieren)

$$a_2^2 m_1 m_2 w_{S2} - m_1 \Theta_{S2} a_2 \dot{\phi}_2 = a_2^2 m_1 m_2 v_{S2} \Rightarrow (m_2 + m_1) \Theta_{S2} w_{S2} + m_1 a_1 \Theta_{S2} \dot{\phi}_1 + m_1 a_2 \Theta_{S2} \dot{\phi}_2 = m_1 \Theta_{S2} v_{S1} (1+e) + (m_2 - m_1 e) \Theta_{S2} v_{S2} - m_1 \Theta_{S2} e a_1 \dot{\phi}_{10} \Rightarrow (a_2^2 m_1 m_2 + (m_2 + m_1) \Theta_{S2}) w_{S2} + m_1 a_1 \Theta_{S2} \dot{\phi}_1 = m_1 \Theta_{S2} v_{S1} (1+e) + ((m_2 - m_1 e) \Theta_{S2} + a_2^2 m_1 m_2) v_{S2} - m_1 \Theta_{S2} e a_1 \dot{\phi}_{10}. \tag{5.75}$$

Aus (5.62) = (5.63) \*  $a_1$  folgt ( $\hat{F}$  eliminieren)

$$a_1 m_2 (w_{S2} - v_{S2}) = \Theta_{S1} (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_{10}) \Rightarrow a_1 m_2 w_{S2} - \Theta_{S1} \dot{\phi}_1 = a_1 m_2 v_{S2} - \Theta_{S1} \dot{\phi}_{10}. \tag{5.76}$$

Aus (5.77) \* ( $m_1 a_1 \Theta_{S2}$ ) + (5.75) \*  $\Theta_{S1}$  folgt ( $\dot{\phi}_1$  eliminieren)

$$a_1^2 m_1 m_2 \Theta_{S2} w_{S2} - \Theta_{S1} m_1 a_1 \Theta_{S2} \dot{\phi}_1 = a_1^2 m_1 m_2 \Theta_{S2} v_{S2} - m_1 a_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} \dot{\phi}_{10} \Rightarrow (a_2^2 m_1 m_2 \Theta_{S1} + (m_2 + m_1) \Theta_{S1} \Theta_{S2}) w_{S2} + m_1 a_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} \dot{\phi}_1 = m_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} v_{S1} (1+e) + ((m_2 - m_1 e) \Theta_{S1} \Theta_{S2} + a_2^2 m_1 m_2 \Theta_{S1}) v_{S2} - m_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} e a_1 \dot{\phi}_{10} \Rightarrow (a_1^2 m_1 m_2 \Theta_{S2} + (a_2^2 m_1 m_2 \Theta_{S1} + (m_2 + m_1) \Theta_{S1} \Theta_{S2})) w_{S2} = m_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} v_{S1} (1+e) + ((m_2 - m_1 e) \Theta_{S1} \Theta_{S2} + a_2^2 m_1 m_2 \Theta_{S1}) v_{S2} - m_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} e a_1 \dot{\phi}_{10} \Rightarrow w_{S2} = \frac{m_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} v_{S1} (1+e) + ((m_2 - m_1 e) \Theta_{S1} \Theta_{S2} + a_2^2 m_1 m_2 \Theta_{S1}) v_{S2} - m_1 \Theta_{S1} \Theta_{S2} e a_1 \dot{\phi}_{10}}{(a_1^2 m_1 m_2 \Theta_{S2} + (a_2^2 m_1 m_2 \Theta_{S1} + (m_2 + m_1) \Theta_{S1} \Theta_{S2}))} \Rightarrow \frac{\Theta_{S1} v_{S1} (1+e) + ((\frac{m_2}{m_1} - e) \Theta_{S1} + a_2^2 \frac{\Theta_{S1}}{m_2}) v_{S2} - \Theta_{S1} a_1 (1+e) \dot{\phi}_{10}}{(a_1^2 m_2 + (a_2^2 m_2 \frac{\Theta_{S1}}{\Theta_{S2}} + (1 + \frac{m_2}{m_1}) \Theta_{S1}))} \tag{5.78}$$

Aus (5.76)

$$\dot{\varphi}_1 = -a_1 \frac{m_2}{\Theta_{S1}} v_{S2} + \dot{\varphi}_{10} + a_1 \frac{m_2}{\Theta_{S1}} w_{S2} \quad (5.79)$$

Aus (5.70)

$$w_{S1} = v_{S1} + \frac{m_2}{m_1} v_{S2} - \frac{m_2}{m_1} w_{S2} \quad (5.80)$$

Mit ((5.62) \* a<sub>2</sub>) - ((5.64) \* a<sub>1</sub>) folgt (Ḟ eliminieren)

$$\begin{aligned} \Theta_{S1} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_{10}) a_2 &= a_1 a_2 \dot{F}, & (5.62)^* a_2 \\ -\Theta_{S2} (\dot{\varphi}_2 - 0) a_1 &= -a_1 a_2 \dot{F}. & -(5.64)^* a_1 \end{aligned}$$

$$\Theta_{S1} a_2 \dot{\varphi}_1 - \Theta_{S2} a_1 \dot{\varphi}_2 = \Theta_{S1} a_2 \dot{\varphi}_{10} \quad (5.81)$$

Aus (5.81)

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{\Theta_{S1}}{\Theta_{S2}} \frac{a_2}{a_1} (\dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_1) \quad (5.82)$$

Mit e = 0 und den Verhältnissen a<sub>1</sub> = 1/2 l, a<sub>2</sub> = l, m<sub>1</sub> = 2 m, m<sub>2</sub> = m, Θ<sub>S1</sub> = 2 m l<sup>2</sup>,

Θ<sub>S2</sub> = m l<sup>2</sup>, v<sub>S1</sub> = 2 v<sub>0</sub>, v<sub>S2</sub> = v<sub>0</sub> und φ̇<sub>10</sub> = v<sub>0</sub>/l folgt (m<sub>2</sub>/m<sub>1</sub> = 1/2, Θ<sub>S1</sub>/Θ<sub>S2</sub> = 2)

$$w_{S2} = \frac{2ml^2 2v_0 + (ml^2 + \frac{1}{4}l^2 m_2 + \frac{1}{4}l^2 m)v_0 - 2ml^2 a_1 v_0}{\frac{1}{4}l^2 m + l^2 m_2 + \frac{3}{2}2ml^2} \frac{1}{l} = \frac{4 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2}} v_0$$

$$= \frac{15}{21} v_0 \quad (5.78^*)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -a_1 \frac{m_2}{\Theta_{S1}} v_{S2} + \dot{\varphi}_{10} + a_1 \frac{m_2}{\Theta_{S1}} w_{S2} = -\frac{1}{14} \frac{v_0}{l} + \frac{v_0}{l} = \frac{13}{14} \frac{v_0}{l} \quad (5.79^*)$$

$$w_{S1} = v_{S1} + \frac{m_2}{m_1} v_{S2} - \frac{m_2}{m_1} w_{S2} = 2v_0 + \frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{2} \frac{15}{21} v_0 = \frac{15}{7} v_0 \quad (5.80^*)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{\Theta_{S1}}{\Theta_{S2}} \frac{a_2}{a_1} (\dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_1) = -\frac{54}{7} \frac{v_0}{l} \quad (5.82^*)$$

In Tabelle 5.2 werden noch einmal alle Formeln zusammengestellt. Und zwar die Bezeichnungen und die Grundgleichungen für die reine Translation und die reine Rotation.

Tabelle 5.2 Formelsammlung

| Reine Translation        |                                    | Reine Rotation |                          |
|--------------------------|------------------------------------|----------------|--------------------------|
| <b>Kinematik</b>         |                                    |                |                          |
| x                        | Koordinate                         | φ              |                          |
| v = ẋ                    | Geschwindigkeit                    | ω = φ̇         |                          |
| a = v̇ = ẍ               | Beschleunigung                     | α = ω̇ = φ̈    |                          |
| <b>Kinetik</b>           |                                    |                |                          |
| Masse m                  | Trägheitsmoment Θ                  |                |                          |
| Geschwindigkeit v        | Winkelgeschwindigkeit ω            |                |                          |
| Kraft F                  | Moment M                           |                |                          |
| Impuls p = m v           | Drehimpuls, Drall L = Θ ω          |                |                          |
| T = 1/2 m v <sup>2</sup> | kinetische Energie                 |                | T = 1/2 Θ ω <sup>2</sup> |
| W = ∫ F dx               | Arbeit                             |                | W = ∫ M dφ               |
| P = F v                  | Leistung                           |                | P = M ω                  |
| <b>Grundgesetze</b>      |                                    |                |                          |
| Masse m = const.         | Trägheitsmoment Θ = const.         |                |                          |
| Impuls p = m v = const.  | Drehimpuls, Drall L = Θ ω = const. |                |                          |
| dp/dt = m a = F          | dL/dt = Θ dφ/dt = M                |                |                          |

**Aufgabe 5.1**

- Bestimmung der Massenträgheitsmomente verschiedener Querschnitte bezüglich einer Achse z

Folgende massebehaftete Körper sind gegeben a) Stab (Länge l, Masse m); b) Kreisplatte (Radius r, Masse m); c) Rechteckplatte (Seitenlängen a, b, Masse m); d) Kugel (Radius r, Masse m); e) Kegel (Radius r, Höhe h, Masse m); f) Winkel (Schenkellänge a, Schenkelmasse m).

gegeben: l, r, a, b, h, t, a >> t

gesucht: Bestimmung der Massenträgheitsmomente bezüglich einer Achse z durch O, die senkrecht zur Zeichenebene steht.

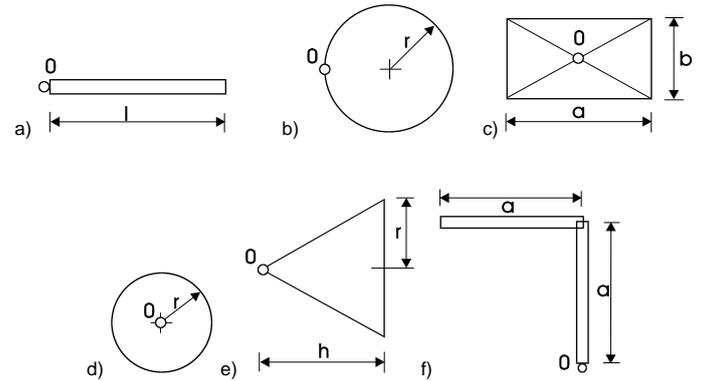


Bild 5.17 Verschiedene massebehaftete Körper; a) Stab; b) Kreisplatte; c) Rechteckplatte; d) Kugel; e) Kegel; f) Winkel

Lösung: a) Θ<sub>z</sub> = 1/3 m l<sup>2</sup>, b) Θ<sub>O</sub> = 3/2 m R<sup>2</sup>, c) Θ<sub>O</sub> = 1/12 m (a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup>), d) Θ<sub>SKugel</sub> = 2/5 m l<sup>2</sup>,

e) Θ<sub>O Kegel</sub> = 3/5 m (h<sup>2</sup> + r<sup>2</sup>/4), f) Θ<sub>O ges</sub> = 5/3 m a<sup>2</sup>

**Aufgabe 5.2**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Bestimmung des Zeitpunkts, an dem die Zylinder aufeinander rollen
- Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten

Ein Vollzylinder (G<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>) ist an einer gewichtslosen Stange drehbar befestigt. Ein zweiter Vollzylinder (G<sub>2</sub>, r<sub>2</sub>) ist um A drehbar gelagert. Der Zylinder 2 ruht zunächst. Der Zylinder 1, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit φ̇<sub>0</sub> dreht, wird auf ihn gesetzt, so daß beide aufeinander rutschen (Reibungskoeffizient μ).

gegeben: G<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>, r<sub>2</sub>, φ̇<sub>0</sub>, μ.

gesucht: Bestimmung der Zeit t<sub>r</sub>, nach der beide Zylinder aufeinander rollen, und die Größe der Winkelgeschwindigkeiten φ̇<sub>1</sub> und φ̇<sub>2</sub>.

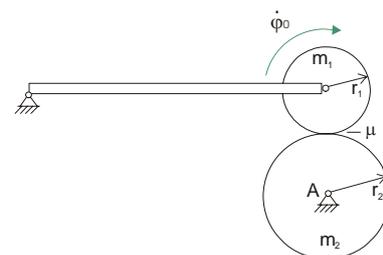


Bild 5.24 Zwei Vollzylinder

$$\text{Lösung: } \dot{\varphi}_1(t_r) = -\frac{\dot{\varphi}_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}} + \dot{\varphi}_0, \quad \dot{\varphi}_2(t_r) = \frac{r_1}{r_2} \frac{m_1}{m_2} \frac{\dot{\varphi}_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \quad t_r = \frac{r_1 \dot{\varphi}_0}{2\mu g (1 + \frac{m_1}{m_2})}$$

**Aufgabe 5.3**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Bestimmung des Antriebsmoments

Auf einer homogenen zylindrischen Walze wird ein masseloses dehnstarres Seil aufgewickelt, an dem die Masse m<sub>2</sub> hängt.

gegeben: m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>, r, ẍ = a

gesucht: Bestimmung des Antriebsmoments M<sub>0</sub>, das aufgewandt werden muß, um die Masse m<sub>2</sub> mit ẍ = a zu beschleunigen.

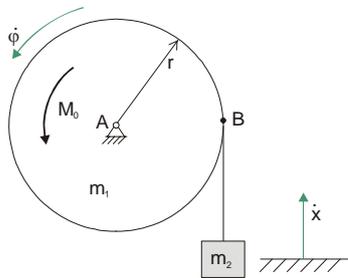


Bild 5. 26 Homogene zylindrische Walze mit Seil

Lösung:  $M_0 = \frac{1}{2} m_1 r a + r m_2 (a + g)$

?

**Aufgabe 5. 4**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d' ALEMBERTschen Prinzip
- Bestimmung der Lagerreaktionen
- Reibung zwischen Balken und Klotz
- Massebehaltete Umlenkrolle

Am freien Ende eines in B starr eingespannten, masselosen Brettes (Länge l) ist eine Rolle (Radius r, Masse m) reibungsfrei drehbar gelagert. Über die Rolle läuft ein masseloses, dehnstarrs Seil, an dessen Enden die Punktmassen 1 und 2 (Masse jeweils m) befestigt sind. Die Punktmasse 1 rutscht (Reibungskoeffizient  $\mu$ ) auf dem Brett.

gegeben: l, r,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\Theta = \frac{1}{2} m r^2$ ,  $\mu$

gesucht: Bestimmung der Lagerreaktionen in B in Abhängigkeit von der Lage x des Körpers 1.

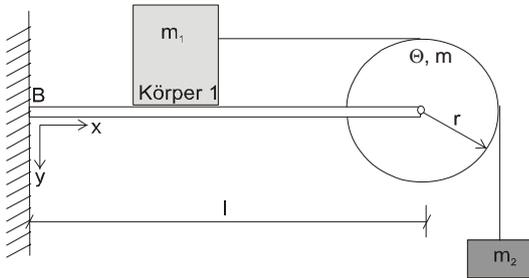


Bild 5. 28 In B starr eingespanntes, masseloses Brett mit Rolle

Lösung:  $B_H = \frac{2}{5} m g (\mu - 1)$ ,  $B_V = m g \frac{13 + 2\mu}{5}$ ,  $M_B = m g (-x - l) \frac{8 + 2\mu}{5}$

?

**Aufgabe 5. 5**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d' ALEMBERTschen Prinzip
- Masselose Umlenkrolle
- Haftung zwischen Rolle 1 und Rolle 2
- Bestimmung der Beschleunigung
- Bestimmung der Lagerkraft

Mit dem skizzierten System wird das Gewicht (Masse  $m_3$ ) nach oben gezogen. Die Rollen 1 (Masse  $m_1$ , Massenträgheitsmoment  $\Theta_1$ ) und 2 (Masse  $m_2$ , Massenträgheitsmoment  $\Theta_2$ ) sind reibungsfrei gelagert. Die Umlenkrolle ist masselos. Das konstante Antriebsmoment  $M_0$  greift an der Rolle 1 an. Zwischen beiden Rollen besteht Haftung.

gegeben:  $m_1, m_2, m_3, M_0, r_1, r_2, \Theta_1, \Theta_2, \mu_0$

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung  $\ddot{x}$  des Gewichtes nach oben und der Auflagerkraft in A.

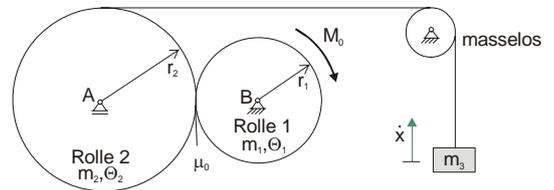


Bild 5. 31 Rollensystem mit der Masse  $m_3$

Lösung:  $\ddot{x} = \frac{M_0}{r_1} - m_3 g$ ,  $A_V = m_2 g + m_3 g - (m_3 + \frac{\Theta_2}{r_2}) \ddot{x}$

?

**Aufgabe 5. 6**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d' ALEMBERTschen Prinzip

Ein Fahrzeug, vereinfacht durch zwei homogene, zylindrische Walzen (Massen m) dargestellt, die durch einen Balken (Masse  $m_0$ ) verbunden sind, rollt auf einer horizontalen Bahn infolge eines Moments  $M_0$ , das vom Motor auf die hintere Walze (ideale Lagerung) abgegeben wird.

gegeben: m, r,  $m_0, M_0$

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung  $\ddot{x}$  des Fahrzeugs und der Kräfte in den Radlagern A und B.

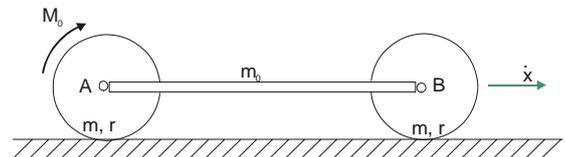


Bild 5. 34 Fahrzeug, vereinfacht durch zwei homogene, zylindrische Walzen dargestellt

Lösung:  $A_H = \frac{M_0(m_0 + \frac{3}{2}m)}{r(m_0 + 3m)}$ ,  $A_V = \frac{1}{2} m_0 g$ ,  $B_V = \frac{1}{2} m_0 g$ ,  $\ddot{x} = \frac{M_0}{r(m_0 + 3m)}$

?

**Aufgabe 5. 7**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und Momentensatz am starren Körper
- Lösung durch Schneiden

In dem skizzierten Planetengetriebe ist das Zahnrad 1 in 0 reibungsfrei drehbar gelagert, Zahnrad 2 läuft einerseits auf Zahnrad 1, andererseits in einem feststehenden Zahnkranz, dessen Mittelpunkt in 0 liegt. Die Zahnräder (homogene Scheiben) haben gleiche Massen m und gleiche Radien r.

gegeben: m, r,  $\psi_0$ .

gesucht: Bestimmung der Beschleunigungen  $\ddot{\varphi}_1(\psi)$  und  $\ddot{\psi}(\psi)$  und der Größe der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  für  $\psi = 90^\circ$ , wenn das System ohne Anfangsgeschwindigkeit aus der Lage  $\psi_0 = 60^\circ$  losgelassen wird.

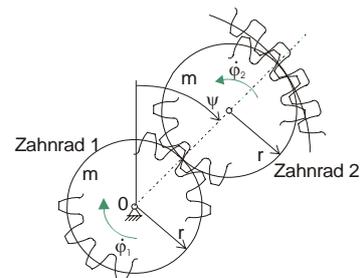


Bild 5. 37 Planetengetriebe

Lösung:  $\ddot{x}_2 = \frac{2}{7} g \sin \psi$ ,  $\ddot{\varphi}_1 = \frac{4}{7} \frac{g}{r} \sin \psi$ ,  $\ddot{\varphi}_2 = \frac{2}{7} \frac{g}{r} \sin \psi$ ,  $\dot{\psi} = \frac{1}{7} \frac{g}{r} \sin \psi$ ,  $\dot{\psi}(\psi) = \sqrt{\frac{g}{7r}}$

**Aufgabe 5.8**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d' ALEMBERTschen Prinzip

Zwei Walzen 1 und 2 sind auf einer gemeinsamen Achse A gelagert. Sie können sich unabhängig voneinander drehen. Die Walze 1 rollt auf einer horizontalen Ebene und ist über ein Seil  $S_1$  mit der Masse 3 verbunden. Das um die Walze 2 geschlungene Seil  $S_2$  ist an der Wand befestigt.

gegeben:  $m_1, m_2, m_3, \Theta_1, \Theta_2, r, R$

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung  $\ddot{x}_1$  der gemeinsamen Achse A und der Seilkraft  $S_1$

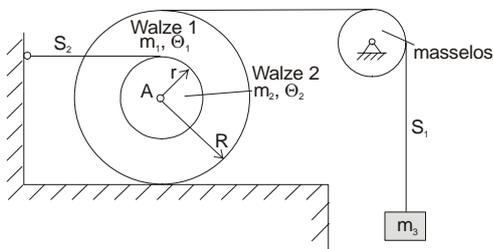


Bild 5. 40 Zwei Walzen 1 und 2 auf einer gemeinsamen Achse A

Lösung:  $\ddot{x} = \frac{2gm_3}{m_1 + m_2 + 4m_3 + \frac{\Theta_1}{R^2} + \frac{\Theta_2}{r^2}}$

$S_1 = m_3 g \frac{m_1 + m_2 + \frac{1}{R^2}\Theta_1 + \frac{1}{r^2}\Theta_2}{m_1 + m_2 + 4m_3 + \frac{1}{R^2}\Theta_1 + \frac{1}{r^2}\Theta_2}$

**Aufgabe 5.9**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung mit dem Energiesatz
- Lösung mit dem d' ALEMBERTschen Prinzip

Eine Stufenrolle 1 (Masse  $m_1$ , Gesamtträgheitsmoment  $\Theta_1$ , Radien  $r$  und  $r + R$ ) rollt auf einer schieben Ebene und ist mit einem dehnbaren, masselosen Seil über die in A reibungsfrei drehbar gelagerte Rolle 2 ( $m_2, R$ ) mit der Rolle 3 ( $m_3, R$ ) verbunden. Über die Rolle 3 ist ein weiteres Seil geführt, das einerseits bei B befestigt ist und an dessen anderem Ende die Masse M hängt.

gegeben:  $m_1, m_2 = m, m_3 = m, M, r, R, \Theta_1, \alpha$

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung  $\ddot{x}_1$  des Schwerpunktes der Stufenrolle 1 und der Größe der Masse M, damit das System in Ruhe ist.

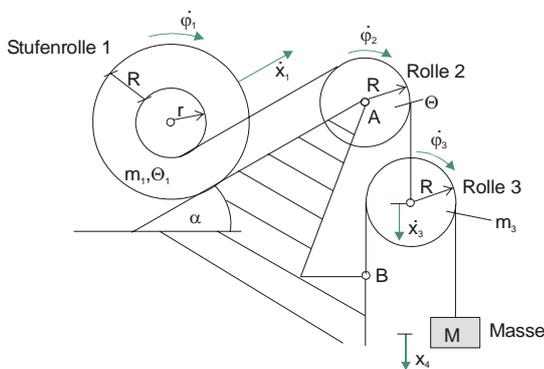


Bild 5. 44 Stufenrolle 1 auf einer schieben Ebene

Lösung

$\ddot{x}_1 = \frac{g(r+R)(mR+2MR-m_1(r+R)\sin\alpha)}{m_1(r+R)^2 + mR^2 + 4MR^2 + \Theta_1 + 2\Theta_2}$ ,  $M = \frac{1}{2} m_1 \frac{(r+R)\sin\alpha}{R} - \frac{1}{2} m$

**Aufgabe 5.10**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d' ALEMBERTschen Prinzip

Eine Walze (Masse  $m_2$ , Radius  $r$ ) rollt eine rauhe, schiefe Ebene hinab. Um die Walze ist ein masseloses Seil geschlungen, an das ein Wagen (Masse  $m_1$ , masselose Räder) angehängt ist.

gegeben:  $m_1, m_2, r, \alpha$

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung des Schwerpunktes  $\ddot{x}$  der Walze und der Seilkraft  $S$ .

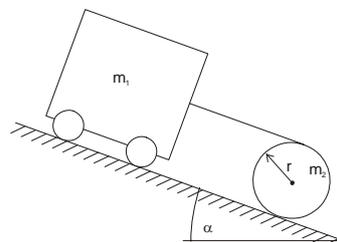


Bild 5. 47 Walze auf einer rauhen, schiefen Ebene

Lösung:  $\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha (2m_1 + m_2)}{4m_1 + \frac{3}{2}m_2}$ ,  $S = \frac{1}{2}m_2 g \sin \alpha$

**Aufgabe 5.11**

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Vollplastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß
- Berechnung der maximalen Federauslenkung mit dem Energiesatz

Eine Punktmasse  $m_1$  stößt plastisch mit der Geschwindigkeit  $v_0$  auf einen homogenen Balken (Masse  $m_2$ , Länge  $l$ ), der in A drehbar gelagert ist und bei B durch eine Feder (Federsteifigkeit  $c$ ) gehalten wird.

gegeben:  $m_1, m_2, l, v_0, c$ , die Feder hat auf den Stoßvorgang keinen Einfluß

gesucht: Bestimmung der Größe der maximalen Federauslenkung  $x_{max}$ .

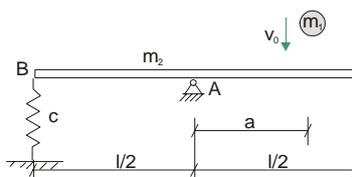


Bild 5. 49 Punktmasse  $m_1$  stößt plastisch auf einen homogenen Balken

Lösung:  $x_{max 1, 2} = \frac{2agm_1}{lc} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{cl^2v_0^2}{4g^2m_1^2(a^2 + \frac{1}{12}m_2l^2)}} \right]$

**Aufgabe 5.12**

- Aufstellung des Drallsatzes
- Berechnung der Winkelgeschwindigkeit
- Berechnung der maximalen Winkelbeschleunigung für Haften

Eine Kreisscheibe (Masse  $m_1$ , Radius  $r$ ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  um ihre vertikale Achse. Ein dünner Stab (Masse  $m_2$ , Länge  $r$ ), der gleichfalls um diese Achse rotieren kann, wird zur Zeit  $t = 0$  ohne Anfangsgeschwindigkeit auf die rotierende Scheibe gelegt. Zunächst soll der Stab auf der Scheibe rutschen (Reibungskoeffizient  $\mu$ ).

gegeben:  $m_1, r, m_2, \omega_0, \mu, \mu_0$

gesucht: Bestimmung der Zeit  $t_1$  und deren Größe, nach der beide Körper die gleiche Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  haben. Bestimmung der Größe der Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}$ , die die Scheibe nach Beendigung des Rutschvorgangs beschleunigt, wenn der Stab weiterhin auf der Scheibe haften soll (Haftungskoeffizient  $\mu_0$ ).

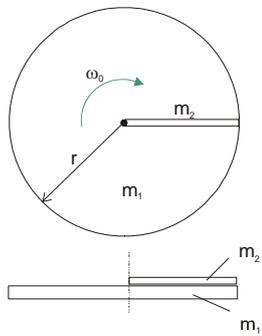


Bild 5. 51 Kreisscheibe mit dünnem Stab

Lösung:  $t_1 = \frac{2 r \omega_1}{3 \mu g} \frac{1}{1 + \frac{2m_2}{3m_1}}$ ,  $\dot{\omega}_{\max} = \frac{3}{2} \mu_0 \frac{g}{r}$

**Aufgabe 5. 13**

- Aufstellung des Momentensatzes
- Berechnung der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung
- Berechnung der Lagerkräfte

Ein dünner, homogener Stab ist in A frei drehbar gelagert und durch ein Seil in horizontaler Lage gehalten.

gegeben: l, m

gesucht: Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  und der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  nach dem Durchschneiden des Seils in Abhängigkeit von  $\varphi$  und die Lagerreaktionen in A für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

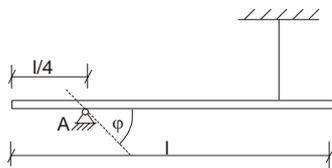


Bild 5. 52 Dünner, homogener Stab ist in A frei drehbar gelagert und durch ein Seil in horizontaler Lage gehalten

Lösung:  $\ddot{\varphi} = \frac{12}{7} \frac{g}{l} \cos \varphi$ ,  $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{24g}{7l} \sin \varphi}$ ,  $A_V = \frac{13}{7} m g$ ,  $A_H = 0$

**Aufgabe 5. 14**

- Aufstellung der NEWTONsche Bewegungsgleichung und des Momentensatzes
- Berechnung des Abstands des Lagers

Eine Stange liegt symmetrisch auf zwei Lagern A und B. Wenn das Lager B plötzlich entfernt wird, ändert sich die Größe der Lagerkraft A.

gegeben: l, a, m

gesucht: Bestimmung des Abstands a, damit sich die Lagerkraft A zu Beginn der Bewegung nicht ändert.

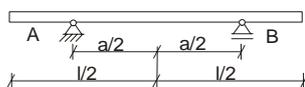


Bild 5. 55 Stange symmetrisch auf zwei Lagern A und B

Lösung:  $a = \frac{l}{\sqrt{3}}$

**Aufgabe 5. 15**

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Plastischer Stoß mit Stoßzahl e
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Gegen die glatte, ruhende Seite einer in A drehbar aufgehängten Viertelkreisscheibe  $m_2$  stößt eine Punktmasse  $m_1$  mit der Anfluggeschwindigkeit  $v_0$ . Die Stoßzahl ist e.

gegeben:  $m_1, m_2, v_0, e, a, b$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit der Punktmasse, sowie der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe nach dem Stoß.

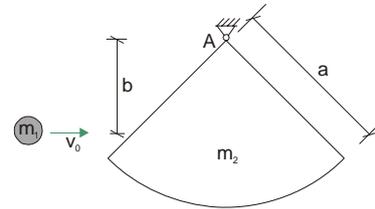


Bild 5. 57 In A drehbar aufgehängte Viertelkreisscheibe

Lösung:  $\dot{x}_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{1-e}{1 + \frac{m_2 a^2}{4m_1 b^2}}$ ,  $\dot{y}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} v_0$ ,  $\dot{\varphi}_2 = \frac{v_0}{2b} \frac{1+e}{1 + \frac{m_2 a^2}{4m_1 b^2}}$

**Aufgabe 5. 16**

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Vollelastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß
- Berechnung des Massenverhältnisses  $\frac{M}{m}$  für die Bewegung des Klotzes nach oben

Ein masseloses Seil ist mehrfach um eine frei drehbar gelagerte Walze (Masse M, Radius r) geschlungen. An seinem Ende ist ein Klotz (Masse m) befestigt. Das Seil strafft sich, wenn der Klotz um die Höhe h gefallen ist. Beim Stoß tritt kein Energieverlust auf.

gegeben: M, r, m, h

gesucht: Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_M$  der Walze und der Geschwindigkeit  $v_m$  des Klotzes nach dem Stoß. Wie groß muß das Massenverhältnis  $\frac{M}{m}$  mindestens sein, damit sich der Klotz nach dem Stoß nach oben bewegt?

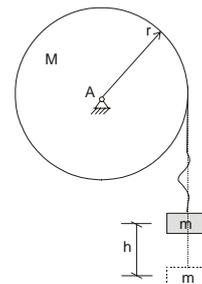


Bild 5. 59 Frei drehbar gelagerte Walze

Lösung:  $\dot{\varphi}_M = \frac{4m}{2m+M} \frac{\sqrt{2gh}}{r}$ ,  $\dot{x}_m = \frac{2m-M}{2m+M} \sqrt{2gh}$ ,  $\frac{M}{m} > 2$

**Aufgabe 5.17**

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Vollelastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Eine Stange 1, die unter dem Winkel  $\beta$  gegen die Horizontale geneigt ist, fällt ohne zu rotieren senkrecht nach unten. Sie stößt mit der Geschwindigkeit  $v_1$  elastisch auf das Ende einer in 0 drehbar gelagerten Stange 2. Beide Stangen haben gleiche Massen und Längen und sind glatt.

gegeben:  $l, m, v_1, \beta, e = 1$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte und der Winkelgeschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß

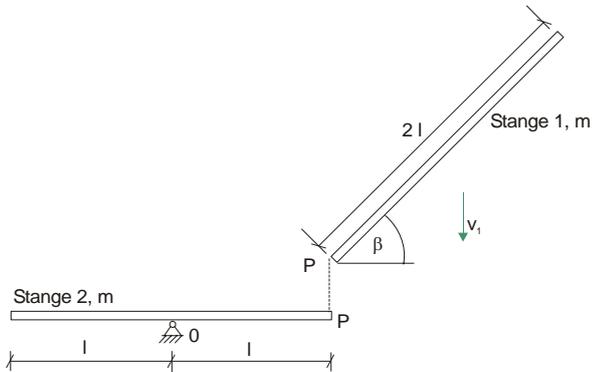


Bild 5.61 Stange 1 und in 0 drehbar gelagerte Stange 2

Lösung:  $\dot{x}_{1n} = 0, \dot{y}_{1n} = v_1 \frac{2+3\cos^2\beta}{4+3\cos^2\beta}, \dot{\phi}_{1n} = \frac{6v_1}{l} \frac{\cos\beta}{4+3\cos^2\beta},$   
 $\dot{\phi}_{2n} = \frac{6v_1}{l} \frac{1}{4+3\cos^2\beta}$

**Aufgabe 5.18**

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Teilelastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Auf einer glatten, ebenen Unterlage liegt eine rechteckige Scheibe (Masse  $m_2$ ) in Ruhe. Der Massenpunkt  $m_1$  stößt mit der Geschwindigkeit  $v$  gegen die Mitte eines glatten Randes der Scheibe und trifft die Scheibe unter einem Winkel  $\alpha$ . Die Stoßzahl ist  $e$ .

gegeben:  $\alpha, m_1, m_2, e, v$

gesucht: Bestimmung der Größe und Richtung der Geschwindigkeiten beider Massen nach dem Stoß.

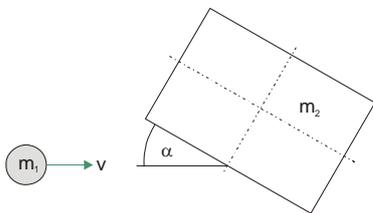


Bild 5.63 Rechteckige Scheibe auf glatter, ebener Unterlage

Lösung:  $\dot{x}_{1n} = v \cos\alpha, \dot{y}_{1n} = v \sin\alpha \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2}, \dot{x}_{2n} = 0, \dot{y}_{2n} = v \sin\alpha \frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}$

**Aufgabe 5.19**

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Teilelastischer Stoß
- Berechnung der Länge b, für die der Lagerpunkt keinen Stoß erfährt

Ein Schlaghammer besteht aus zwei rechtwinklig aneinander geschweißten Stangen gleicher Masse pro Längeneinheit  $\mu$ . Er kann sich um 0 frei drehen.

gegeben:  $l, \mu = \rho A, e, \phi_v$

gesucht: Bestimmung der Länge b der Querstange 2, wenn der Drehpunkt 0 keinen Stoß erhalten soll.

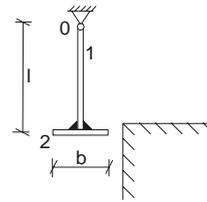


Bild 5.65 Schlaghammer aus zwei rechtwinklig aneinander geschweißten Stangen unmittelbar vor dem Stoß

Lösung:  $b = \sqrt[3]{2} l$

**Aufgabe 5.20**

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Teilplastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Ein glatter Winkel (Schenkellänge l, Gesamtmasse  $m_2$ ) liegt wie skizziert auf einer Unterlage. Eine Punktmasse  $m_1$  stößt mit der Geschwindigkeit  $v_0$  im Punkt B gegen den Winkel.

gegeben:  $l, m_1, m_2, v_0, e$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten des Winkelschwerpunkts nach dem Stoß.

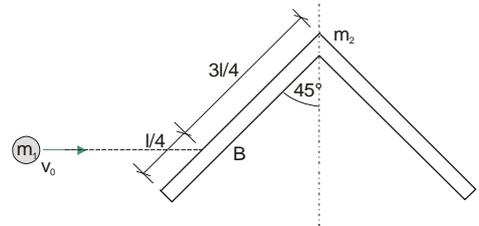


Bild 5.67 Glatter Winkel

Lösung:  $\dot{x}_1 = -e v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{11}{5} v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1+e}{\frac{m_2}{m_1} + \frac{11}{5}}, \dot{y}_1 = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2},$   
 $\dot{x}_2 = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1+e}{\frac{m_2}{m_1} + \frac{11}{5}}, \dot{y}_2 = 0, \dot{\phi}_2 = -\frac{6}{5} \sqrt{2} v_0 \frac{1}{l} \frac{1+e}{\frac{m_2}{m_1} + \frac{11}{5}}$

## 6 Schwingungslehre



### Lehrziel des Kapitels

- Bestimmung der Schwingungsdifferentialgleichungen für Systeme mit einem Freiheitsgrad (Einmassenschwinger)
- Bestimmung der Federkoeffizienten von elastischen Systemen
- Bestimmung der Federeinflüsse im Schwingungssystemen
- Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung der freien ungedämpften Schwingung
- Lösung der Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung
- Lösung der Differentialgleichung für die ungedämpfte, erzwungene Schwingung
- Resonanz
- Lösung der Differentialgleichung für die gedämpfte, erzwungene Schwingung
- Definition der Erregertypen
- Definition der Überhöhungsfunktionen

- $f(x) = \omega$
- Schwingungsdifferentialgleichung des Einmassenschwingers  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  (6. 4)
  - Eigenkreisfrequenz  $\omega$ , beziehungsweise der Eigenfrequenz  $f$   
 $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi f$ . (6. 5)
  - Schwingungsdifferentialgleichung des mathematisches Pendels für kleine Ausschläge  $\sin \varphi \approx \varphi$   
 $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ . (6. 11)
  - Eigenkreisfrequenz  $\omega$ , beziehungsweise der Eigenfrequenz  $f$   
 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi f$ . (6. 12)
  - Schwingungsdifferentialgleichung des physikalischen Pendels

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (6. 15)$$

- Eigenkreisfrequenz  $\omega$ , beziehungsweise der Eigenfrequenz  $f$   
 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l_{\text{red}}}} = 2\pi f$ . (6. 16)
- Reduzierte Länge  $l_{\text{red}} = \frac{i_A^2}{s}$ , Trägheitsradius  $i_A = \sqrt{\frac{I}{A}}$
- Federkoeffizient eines masselosen Stabes der Länge  $l$  und der Dehnsteifigkeit  $E A$   
 $c_D = \frac{E A}{l}$ . (6. 17)
- Federkoeffizient eines masselosen Biegebalkens der Länge  $l$  und der Biegesteifigkeit  $E I$   
 $c_B = \frac{3 E I}{l^3}$ . (6. 18)
- Federkoeffizient eines masselosen Torsionsstabes der Länge  $l$  und der Torsionssteifigkeit  $G I_T$   
 $c_T = \frac{G I_T}{l}$ . (6. 19)
- Parallelschaltung von Federn im Schwingersystem  
 $c_{\text{ers}} = c_1 + c_2$ . (6. 29)
- Reihenschaltung von Federn  
 $\frac{1}{c_{\text{ers}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$ . (6. 30)
- Lösung der Differentialgleichung der Form (6. 4) der freien, ungedämpften Schwingung, Verschiebung in  $x$ - Richtung  
 $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ . (6. 32)
- Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung  
 $\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega^2 x = g$  (6. 45)
- Verschiebung des homogenen Systems für schwache Dämpfung  
 $x_{\text{hom}} = e^{-\delta t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t]$  (6. 46)
- Kritischer Dämpfungsfaktor, das LEHRsche Dämpfungsmaß  
 $D = \frac{\delta}{\omega}$ . (6. 51)
- Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung Schwingungsdifferentialgleichung um ihre statische Ruhelage  
 $\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \Omega t$ , (6. 66)
- Harmonische Lasterregung

$$F_0 \cos \Omega t = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (6. 67)$$

- Gesamtlösung für die Verschiebung  
 $x_{\text{ges}} = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}}$ . (6. 68)
- Lösung der homogenen Gleichung  
 $x_{\text{hom}} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ , (6. 69)
- Lösungsansatz für die partikuläre Lösung  
 $x_{\text{part}} = C \sin \Omega t + E \cos \Omega t$  (6. 70)
- Resonanzansatz im Fall  $\omega = \Omega$   
 $x_{\text{part}} = A t \sin \omega t$  (6. 84)
- Differentialgleichung für die gedämpfte, erzwungene Schwingung  
 $\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \Omega t$ . (6. 90)
- Lösung des homogenen Systems  
 $x_{\text{hom}} = e^{-\delta t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t]$  (6. 95)
- Lösungsansatz für die partikuläre Lösung  
 $x_{\text{part}} = C \sin \Omega t + E \cos \Omega t$  (6. 70)
- Gesamtlösung des gedämpften Einmassenschwingers  
 $x_{\text{ges}} = e^{-\delta t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t]$   
 $+ \frac{-2 \delta \Omega F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2} \sin \Omega t$   
 $+ \frac{(\omega^2 - \Omega^2) F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2} \cos \Omega t$ . (6. 101)
- Erregung über eine Feder  
 $x_F(t) = x_0 \cos \Omega t$  (6. 102)
- Krafterregung  
 $F(t) = \bar{F}_0 \cos \Omega t$  (6. 107)
- Erregung über einen Dämpfer  
 $x_D(t) = x_0 \sin \Omega t$  (6. 109)
- Beziehung zwischen den Koordinaten bei Erregung durch eine rotierende Unwucht  
 $x_m = x_M + r \cos \Omega t$ , (6. 117)
- Überhöhungsfunktionen der Amplitude  
 $Q = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}}$ . (6. 129)
- Abstimmungsverhältnis

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (6. 114)$$

- Vergrößerungsfunktion  $V_1$   
 $V_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$ . (6. 132)

### 6.1 Systeme mit einem Freiheitsgrad (Einmassenschwinger)

Der Einmassenschwinger ist das wichtigste System überhaupt, um dynamische Berechnungen zu verstehen und zu überprüfen. Die meisten dynamischen Berechnungen beruhen auf der Methode der *Modalen Superposition*, in der die Gesamtlösung, zum Beispiel die zeitlich veränderlichen Spannungen oder Verformungen, des jeweiligen dynamischen Problems durch die Überlagerung der Einzellösungen einzelner Einmassenschwinger unter dieser dynamischen Belastung entsteht. Dabei werden die Eigenkreisfrequenzen der Einmassenschwinger so variiert, dass sie das Problem wiedergeben.

#### Feder- Masse- Schwinger

Die einfachste Lösung liefert der ungedämpfte Einmassenschwinger. Er besteht aus einer Punktmasse  $m$ , die durch eine Feder mit der Federkonstanten  $c$  gehalten wird. Die Feder folgt dem linearen Federgesetz. Bild 6. 1 zeigt das System in Ruhe, die Punktmasse hat sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Auslenkung  $x = 0$ .

Um die Bewegungsgleichungen aufstellen zu können, wird die Punktmasse um den Weg  $x(t)$  ausgelenkt. Dadurch entsteht in der Feder eine Federkraft, die wie in der Statik mit Hilfe eines Schnittbildes *am ausgelenkten System* sichtbar gemacht wird (Bild 6. 1). Dort wird die Federkraft  $F_F$

$$F_F = c x, \quad (6. 1)$$

und die Gewichtskraft  $G$

$$G = m g \quad (6. 2)$$

eingetragen.

Aus der Gleichgewichtsbedingung in  $x$ - Richtung erhält man eine inhomogene Differentialgleichung für das System

$$m \ddot{x} + c x = m g \quad (6. 3)$$

Der partikuläre Teil ergibt die statische Auslenkung des Systems, um die das System schwingt. Dieser Lösungsanteil wird in der Gesamtlösung vernachlässigt. Dann spricht man von einer Schwingung *um die statische Ruhelage*.

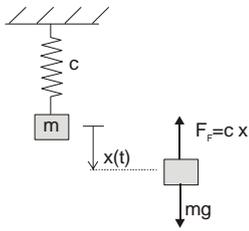


Bild 6. 1 System und Schnittbild eines Einmassenschwingers

Um diese Differentialgleichung zu lösen, wird die Gleichung durch die Masse  $m$  geteilt. Damit ergibt sich die Differentialgleichung um die statische Ruhelage zu

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (6. 4)$$

mit der *Eigenkreisfrequenz*  $\omega$ , beziehungsweise der *Eigenfrequenz*  $f$  des *unge-dämpften Systems* mit der Dimension  $[\frac{1}{s}]$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi f. \quad (6. 5)$$

Aus der Eigenkreisfrequenz  $\omega$ , beziehungsweise der Eigenfrequenz  $f$  wird die *Schwingungsdauer*  $T$  mit der Dimension  $[s]$ .

$$T = \frac{1}{f} \quad (6. 6)$$

und die *Drehzahl*  $n$  mit der Dimension  $[\frac{1}{\text{min}}]$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} \quad (6. 7)$$

berechnet.

### Mathematisches Pendel

Eine Punktmasse ist an einem masselosen Stab (Länge  $l$ ) in Punkt A aufgehängt und dreht sich in  $\varphi$ - Richtung.

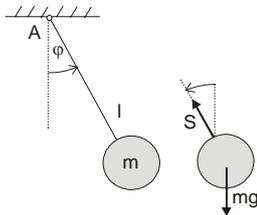


Bild 6. 2 System und Schnittbild eines mathematischen Pendels

Mit Hilfe der NEWTONschen Bewegungsgleichungen in  $\varphi$ - Richtung erhält man die inhomogene Differentialgleichung mit dem Massenträgheitsmoment  $\Theta_A = l^2 m$ .

$$\Theta_A \ddot{\varphi} + m g l \sin \varphi = 0. \quad (6. 8)$$

Hier ist die Gewichtskraft  $m g \sin \varphi$  eine rückstellende Kraft. Diese Differentialgleichung ist durch den Term  $\sin \varphi$  nur näherungsweise lösbar. Sie wird durch die Annahme, dass nur *kleine Ausschläge* auftreten sollen, kann dieser Term

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad (6. 9)$$

linearisiert werden. Die Differentialgleichung ergibt sich zu

$$l^2 m \ddot{\varphi} + m g l \varphi = 0. \quad (6. 10)$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, wird die Gleichung durch die Masse  $m$  und die Länge  $l^2$  geteilt

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (6. 11)$$

mit der *Eigenkreisfrequenz*  $\omega$ , beziehungsweise der *Eigenfrequenz*  $f$  des *unge-dämpften Systems*

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi f. \quad (6. 12)$$

### Physikalisches Pendel

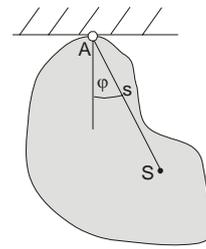


Bild 6. 3 System eines physikalischen Pendels

Eine ausgedehnte Masse (Schwerpunkt S im Abstand  $s$  vom Aufhängepunkt) ist in A aufgehängt und kann sich nur in  $\varphi$ - Richtung bewegen.

Mit Hilfe der NEWTONschen Bewegungsgleichungen in  $\varphi$ - Richtung erhält man die homogene Differentialgleichung

$$\Theta_{\text{red}A} \ddot{\varphi} + m g l_{\text{red}} \sin \varphi = 0 \quad (6. 13)$$

mit dem Massenträgheitsmoment  $\Theta_{\text{red}A} = I_{\text{red}}^2 m$ , der reduzierten Länge  $l_{\text{red}} = \frac{i_A^2}{s}$

und dem Trägheitsradius  $i_A = \sqrt{\frac{I}{A}}$ <sup>3.1</sup>.

Hier ist die Gewichtskraft  $m g \sin \varphi$  ebenfalls eine rückstellende Kraft. Sie kann durch die Annahme, dass nur kleine Ausschläge ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) auftreten sollen, linearisiert werden. Dann lautet sie

$$I_{\text{red}}^2 m \ddot{\varphi} + m g l_{\text{red}} \varphi = 0. \quad (6. 14)$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, wird die Gleichung durch die Masse  $m$  und die Länge  $l_{\text{red}}^2$  geteilt

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (6. 15)$$

mit der *Eigenkreisfrequenz*  $\omega$ , beziehungsweise der *Eigenfrequenz*  $f$  des *unge-dämpften Systems*

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_{\text{red}}}} = 2\pi f. \quad (6. 16)$$

<sup>3.1</sup> Kunow, Technische Mechanik II Elastostatik, Kapitel 8

## 6. 2 Federkoeffizienten einiger elastischer Systeme

Die oben angenommene Feder stellt in den meisten Systemen ein Ersatzsystem dar. Durch eine Feder mit einem linearen Federgesetz kann zum Beispiel eine stabartige Struktur dargestellt werden.

Für diese stabartige Struktur kann eine Ersatzfedersteifigkeit  $c_D$  definiert werden, die einem masselosen Stab der Länge  $l$  und der Dehnsteifigkeit  $E A$  entspricht

$$c_D = \frac{E A}{l}. \quad (6. 17)$$

Eine weitere, häufig benötigte Struktur ist die Biegefeder mit der Federsteifigkeit  $c_B$ , die balkenartige Strukturen ersetzen kann (Bild 6. 4).

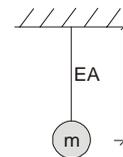


Bild 6. 4 Masseloser Stab der Länge  $l$  und der Dehnsteifigkeit  $E A$

Für eine balkenartige Struktur (Bild 6.5), kann eine Ersatzfedersteifigkeit  $c_B$  definiert werden, die einem masselosen Biegebalken der Länge  $l$  und der Biegesteifigkeit  $E I$  entspricht

$$c_B = \frac{3 E I}{l^3}. \quad (6. 18)$$

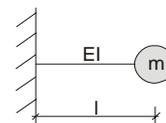


Bild 6. 5 Masseloser Balken der Länge  $l$  und der Biegesteifigkeit  $E I$

Schließlich gibt es die stabartige Struktur, die auf Torsion belastet wird. Daraus wird eine Torsionsfeder mit der Federsteifigkeit  $c_T$ , die diese Strukturen ersetzt (Bild 6. 6).

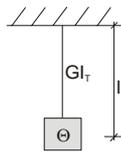


Bild 6. 6 Masseloser Torsionsstab der Länge l und der Torsionssteifigkeit  $G I_T$  mit dem Massenträgheitsmoment  $\Theta$

Die Ersatzfedersteifigkeit  $c_T$  eines masselosen Torsionsstabes der Länge l und der Torsionssteifigkeit  $G I_T$  ist

$$c_T = \frac{G I_T}{l} \quad (6. 19)$$

Auch komplexere Strukturen lassen sich durch Ersatzsysteme mit Ersatzfedersteifigkeiten abbilden. Um die jeweiligen Steifigkeiten zu berechnen, wird eine Last 1 N auf das System in der gewünschten Richtung aufgebracht. Die Verschiebung unter dieser Last entspricht dann dem reziproken Wert der Federsteifigkeit.

Wenn man ein Systemteil durch eine äquivalente Feder ersetzt, muss immer geprüft werden, ob die dynamische Wirkung des Systems erhalten bleibt.



**Beispiel**

- Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit des Systems

Die Federsteifigkeit eines einfachen, masselosen Stabes wird berechnet. Dazu wird das System mit der Kraft 1 belastet (Bild 6. 7).

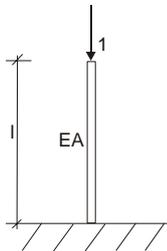


Bild 6. 7 Masseloser Stab der Länge l und der Dehnsteifigkeit E A, mit der Kraft 1 belastet



**Lösung**

Aus der Technischen Mechanik ist das Ergebnis bekannt

$$\Delta l = \frac{l}{E A} = \frac{1}{c_D} \quad (6. 20)$$

Das entspricht genau dem reziproken Wert der Federsteifigkeit für den masselosen Dehnstab.



**Beispiel**

- Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit in horizontaler und vertikaler Richtung des Systems

Dieselbe Methode lässt sich auch auf komplexe Systeme mit Hilfe des Arbeitssatzes in der Elastostatik anwenden.

Um die horizontale Steifigkeit des Fachwerksystems (Bild 6. 8 a) zu bestimmen, wird eine horizontale Last 1 aufgebracht.

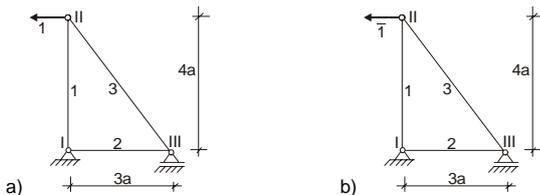


Bild 6. 8 a) Statisch bestimmtes Fachwerksystem mit der äußeren Belastung  $F = 1$ ; b) Anbringen der  $\bar{1}$ -Kraft zur Berechnung der Horizontalverschiebung am Knoten II



**Lösung**

Die Stabkräfte des Systems ergeben sich zu

$$S_1 = - 1, 33 \quad (6. 21)$$

$$S_2 = - 1 \quad (6. 22)$$

$$S_3 = 1, 66 \quad (6. 23)$$

Die Verformungen an den einzelnen Systemen infolge ihrer Belastung lassen sich über

$$\delta_{ij} = \sum_{k,l} \frac{S_k^i \bar{S}_l^j}{EA} l_k \quad (3. 1)$$

berechnen. Eine Kraft  $\bar{1}$  wird am Ort und in Richtung der gewünschten Verformung angebracht. Das entspricht für diese Untersuchung der Last  $F = \bar{1}$  (Bild 6. 8 b).

Mit diesem so berechneten Stabkräften

$$\bar{S}_1 = - 1,33 \bar{1} \quad (6. 24)$$

$$\bar{S}_2 = - \bar{1} \quad (6. 25)$$

$$\bar{S}_3 = 1,66 \bar{1} \quad (6. 26)$$

wird die Horizontalverschiebung am Knoten II mit Hilfe des Arbeitssatzes berechnet

$$f_H = \sum_{k,l} \frac{S_k \bar{S}_l}{EA} l_k = \sum_{k,l} \frac{S_k \bar{S}_l}{EA} l_k = \frac{a}{EA} \quad (23. 85) \quad (6. 27)$$

Mit dem reziproken Wert

$$c_H = \frac{EA}{23,85 a} \quad (6. 28)$$

erhält man die Ersatzfedersteifigkeit  $c_H$  in horizontaler Richtung für das Fachwerksystem (Bild 6.8).

**6. 3 Federn im Schwingersystem**

Bei komplexen Systemen können einzelne Bauteile durch Einzelfedern dargestellt werden, die dann am Gesamtsystem gemeinsam wirken.

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichung muß man für die Anordnung der Federn unterscheiden, ob sie *parallel-* oder *hintereinandergeschaltet* sind. Daraus ergibt sich dann die Gesamtsteifigkeit des Systems.

<sup>3.1</sup> Kunow, Technische Mechanik II Elastostatik, Kapitel 11

**Parallelschaltung von Federn**

Eine Punktmasse hängt an zwei unterschiedlichen Federn (lineare Federsteifigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ ). Sie kann sich nur in x- Richtung bewegen. Die Federansatzpunkte erfahren die gleiche Auslenkung an Ansatzpunkt an die Masse.

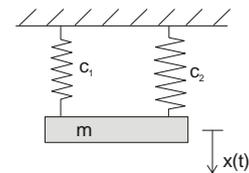


Bild 6. 9 Parallelschaltung von Federn

Die Federsteifigkeiten addieren sich bei einer solchen Anordnung zur Ersatzfedersteifigkeit

$$c_{ers} = c_1 + c_2 \quad (6. 29)$$

**Reihenschaltung von Federn**

Eine Punktmasse hängt an zwei unterschiedlichen Federn (lineare Federsteifigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ ). Sie kann sich nur in x- Richtung bewegen. Die Federn sind hintereinander angeordnet, so dass die Federn nicht denselben Ansatzpunkt an die Masse haben und unterschiedliche Auslenkungen erfahren.

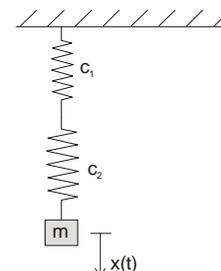


Bild 6. 10 Reihenschaltung von Federn

Die Federsteifigkeiten addieren sich bei einer solchen Anordnung reziprok zur Ersatzfedersteifigkeit

$$\frac{1}{c_{\text{ers}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad (6.30)$$

Diese Verschiebungseinflusszahl  $h = \frac{1}{c}$ <sup>3.1</sup> kann auch durch eine Steifigkeitsberechnung mit Hilfe des Arbeitssatzes in der Elastostatik berechnet werden.

**Beispiel**

- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz des Systems

An einer im Punkt A drehbar gelagerten gewichtslosen Stange ist eine punktförmige Masse m befestigt. An der Masse ist eine Feder mit der Federkonstanten c angebracht. Die Lage  $\varphi = 0$  ist die statische Ruhelage.

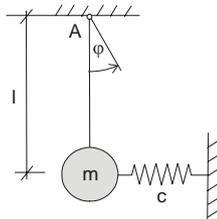


Bild 6.11 Pendel mit zusätzlicher horizontaler Feder

gegeben: l, c, m

gesucht: Die Differentialgleichung der Bewegung der Stange für kleine Ausschläge.

**Lösung**

Die Bewegungsgleichungen werden nun aufgestellt. Um die Schnittkräfte zu zeigen, muß das Schnittbild am ausgelenkten System gezeichnet werden (Bild 6.12). Da das System nur für kleine Auslenkungen gelten soll, werden die Auslenkungen linearisiert

<sup>3.1</sup> Kunow, Technische Mechanik II Elastostatik, Kapitel 11

$$\sin \varphi \approx \varphi \text{ und } \cos \varphi \approx 1. \quad (6.37)$$

Daraus ergibt sich dann für die Kinematik:

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \quad (6.38)$$

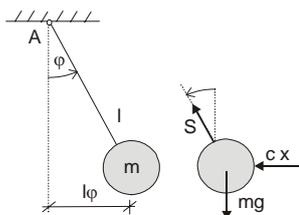


Bild 6.12 Schnittbild am ausgelenkten System mit linearisiertem Ausschlägen

Momentensatz um A ergibt mit linearisiertem Ausschlägen

$$\Theta_A \ddot{\varphi} + c x l + m g l \varphi = 0. \quad (6.39)$$

Die Kinematik und das Massenträgheitsmoment  $\Theta_A = m l^2$  wird eingesetzt

$$m l^2 \ddot{\varphi} + c l^2 \varphi + m g l \varphi = 0 \quad |: l, |: (m l) \quad (6.40)$$

$$\ddot{\varphi} + \varphi \frac{c l + m g}{m l} = 0 \quad (6.41)$$

Damit ergibt sich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{c l + m g}{m l}} \quad (6.42)$$

### 6.3 Lösung der Differentialgleichung der freien ungedämpften Schwingung

Die oben aufgestellten Differentialgleichungen sind alle derselben Art.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (6.31)$$

Ihre Lösung wird hier ohne Herleitung dargestellt. Die Herleitung wird im Grundlagenfach Mathematik ausführlich hergeleitet.

Die Lösung ist die Verschiebung in x der Punktmasse

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (6.32)$$

Die Konstanten A und B werden mit Hilfe der *Anfangsbedingungen* in der Lösung bestimmt. Die Anfangsbedingungen sind die Verschiebung  $x_0$  und die Geschwindigkeit  $v_0$  der Punktmasse zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0. \quad (6.33)$$

damit kann die Verschiebung in der Form

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (6.34)$$

geschrieben werden. Offensichtlich können auch ohne äußere Belastung zeitlich veränderliche Verschiebungen x nur durch eine *Anfangsverschiebung*  $x_0$  und eine *Anfangsgeschwindigkeit*  $v_0$  entstehen.

In der Technik findet man weitere Schreibweisen für die Darstellung der Lösung (6.32)

$$x = C \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (6.35)$$

und

$$x = C \sin(\omega t + \gamma), \quad (6.36)$$

mit der Amplitude  $C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$  und

den Phasenverschiebungen,  $\varepsilon = \arctan \frac{v_0}{x_0 \omega}$  für die nachlaufende cos- Schwingung und  $\gamma = \arctan \frac{x_0 \omega}{v_0}$  für die vorauslaufende sin- Schwingung.

### 6.4 Lösung der Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

Das System wird mit Hilfe einer sehr einfachen *Dämpfungsannahme* gedämpft, der *Flüssigkeitsdämpfung*. Es besteht wieder aus einer Punktmasse m, die diesmal sowohl durch eine Feder mit der Federkonstanten c, als auch durch einen Dämpfer mit der Dämpfung  $2 \delta$  mit der Aufhängung verbunden ist (Bild 6.13). Das System befindet sich bei  $t = 0$  in Ruhe.

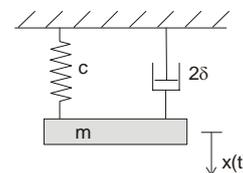


Bild 6.13 Gedämpfter Einmassenschwinger

Um die Bewegungsgleichungen aufstellen zu können, wird die Punktmasse wieder um den Weg x ausgelenkt. Dadurch entsteht in der Feder eine Federkraft  $F_F$  und eine *Dämpferkraft*  $F_D$  (Bild 6.14)

$$F_D = 2 \delta m \dot{x}. \quad (6.43)$$

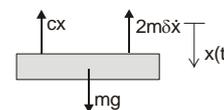


Bild 6.14 Schnittbild des gedämpften Einmassenschwingers am ausgelenkten System

Aus der Gleichgewichtsbedingung in x- Richtung erhält man wieder eine inhomogene Differentialgleichung für das System

$$m \ddot{x} + 2 \delta m \dot{x} + c x = m g \quad (6.44)$$

durch Division durch die Masse m lösbar wird

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega^2 x = g \quad (6.45)$$

Der Term g liefert wieder die statische Auslenkung infolge des Eigengewichts und wird im Folgenden vernachlässigt.

Die Lösung des homogenen Systems für *schwache Dämpfung* lautet

$$x_{\text{hom}} = e^{-\delta t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] \quad (6.46)$$

mit den Konstanten A und B. Diese Konstanten werden wieder mit Hilfe der Anfangsbedingungen in der Lösung bestimmt. Die Verschiebung x lautet dann

$$x = e^{-\delta t} \left( x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (6.47)$$

Offensichtlich können auch hier ohne äußere Belastung zeitlich veränderliche Verschiebungen x durch die Anfangsverschiebung  $x_0$  und Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  entstehen.

Die Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$  des gedämpften Systems lautet nun

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \quad (6.48)$$

Sie wird also durch die Dämpfung kleiner als im ungedämpften System. Da die meisten technischen Probleme einen sehr kleinen Dämpfungsfaktor  $\delta$  haben

$$\delta \ll \omega, \quad (6.49)$$

kann diese Differenz vernachlässigt werden. Es gilt daher für technische Probleme im allgemeinen

$$\omega_d \approx \omega. \quad (6.50)$$

Weiter wird ein *kritischer Dämpfungsfaktor*, das *LEHRsche Dämpfungsmaß D* durch das Verhältnis

$$D = \frac{\delta}{\omega} \quad (6.51)$$

definiert.

Wenn das System sehr stark gedämpft wird, das heißt

$$\delta > \omega, \quad (6.52)$$

erhält man für die Differentialgleichung eine ähnliche Lösung für die Verschiebung, allerdings mit Hyperbelfunktionen statt der trigonometrischen Funktionen. Das System schwingt nicht mehrfach um seine Ruhelage, sondern kommt sofort zur Ruhe.

Wenn der *aperiodische Grenzfall* auftritt, ist der kritische Dämpfungsfaktor

$$D = 1. \quad (6.53)$$

das *logarithmische Dekrement*

$$\Lambda = \frac{\delta \pi}{\omega_d} \quad (6.54)$$

entspricht dem Verhältnis zweier Amplituden im Abstand  $\frac{T'}{2}$ , wobei die Schwingungsdauer als

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (6.55)$$

definiert ist.

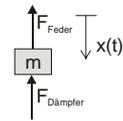


Bild 6.16 Schnittbild des gedämpften Einmassenschwingers am ausgelenkten System

Mit der Dämpferkraft

$$F_D = 2 \delta m \dot{x} \quad (6.57)$$

und der Federkraft

$$F_{Fed} = c_{ers} x \quad (6.58)$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} + 2 m \delta \dot{x} + c_{ers} x = 0. \quad (6.59)$$

Der Kragträger I ist mit dem Stab II parallel geschaltet

$$c_{12} = c_1 + c_2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2} \quad (6.60)$$

Die Ersatzfeder  $c_{12}$  ist mit der Spiralfeder  $c$  in Reihe geschaltet

$$h_{ges} = h_{12} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c} \quad (6.61)$$

Die Ersatzfedersteifigkeit  $c_{ers}$  ist damit

$$c_{ers} = \frac{1}{h_{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2}} + \frac{1}{c}} = \frac{c \left( \frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2} \right)}{c + \frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2}} \quad (6.62)$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung des Meßsystems

$$m \ddot{x} + 2 m \delta \dot{x} + \frac{c \left( \frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2} \right)}{c + \frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2}} x = 0. \quad (6.63)$$

Um den aperiodischen Grenzfall mit  $D = 1$  zu erhalten, muss

$$\delta = \omega. \quad (6.xx)$$

Mit  $\omega = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}}$  ergibt sich die Dämpfungskonstante zu

$$\delta = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} \quad (6.64)$$

## 6.5 Lösung der Differentialgleichung der ungedämpften, erzwungenen Schwingung

Die einfachste Lösung liefert der ungedämpfte Einmassenschwinger. Er besteht aus einer Punktmasse  $m$ , die durch eine Feder mit der Federkonstante  $c$  gehalten und durch eine Einzelkraft  $F = F_0 \cos \Omega t$  belastet wird. Die dynamische Belastung, auch *Erregung* genannt, verändert sich mit der harmonischen Cosinusfunktion. Die Feder folgt wieder dem linearen Federgesetz. Bild 6.17 zeigt das System in Ruhe, die Punktmasse befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  bei  $x = 0$ .

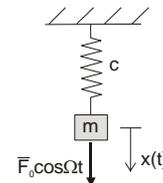


Bild 6.17 Einmassenschwinger unter einer harmonischen Einzelkraft  $F_0 \cos \Omega t$

Um die Bewegungsgleichungen aufstellen zu können, wird die Punktmasse um den Weg  $x(t) = x$  ausgelenkt. Dadurch entsteht in der Feder eine Federkraft, die wie in der Statik mit Hilfe eines Schnittbildes *am ausgelenkten System* sichtbar gemacht wird (Bild 6.18). Dort wird die Federkraft  $F_F$  und die Gewichtskraft  $G$  eingetragen.

Aus der Gleichgewichtsbedingung in  $x$ -Richtung erhält man eine inhomogene Differentialgleichung für das System

$$m \ddot{x} + c x = m g + F_0 \cos \Omega t. \quad (6.65)$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, wird die Gleichung durch die Masse  $m$  geteilt. Das ergibt

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g + F_0 \cos \Omega t, \quad (6.66)$$

### Beispiel

- Bestimmung der Schwingungsdifferentialgleichungen für das System
- Bestimmung der kleinsten Dämpfungskonstante

Eine Messeinrichtung besteht aus einem masselosen Kragbalken (Länge  $l_1$ , Biegesteifigkeit  $EI$ ), an dessen freien Ende ein Stab (Länge  $l_2$ , Dehnsteifigkeit  $EA$ ) und eine Spiralfeder (Federsteifigkeit  $c$ ) befestigt ist. Die Spiralfeder ist mit dem anderen Ende mit einer Punktmasse  $m$  befestigt, die durch einen Dämpfer (Dämpfungskonstante  $\delta$ ) mit dem Boden verbunden ist. An der Masse befindet sich der Messschreiber, der die Auslenkungen des Systems aufnimmt.

gegeben:  $l_1, l_2, EI, EA, c, \delta$

gesucht: Bestimmung der Bewegungsgleichung für das System und der kleinsten Dämpfungskonstante  $\delta$ , für die der Zeiger nach einer Anfangsauslenkung nicht weiterschwingt (aperiodischer Grenzfall).

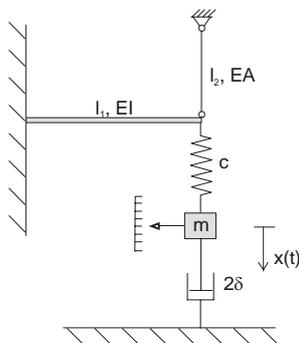


Bild 6.15 Messeinrichtung

### Lösung

Die Bewegungsgleichung wird am ausgelenkten System (Bild 6.16) aufgestellt.

$$m \ddot{x} = -F_D - F_{Fed} \quad (6.56)$$

mit der harmonischen Lasterregung

$$F_0 \cos \Omega t = \frac{\bar{F}_0}{m} \cos \Omega t. \quad (6.67)$$

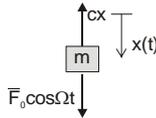


Bild 6. 18 Schnittbild des Einmassenschwingers

Die Gesamtlösung für die Verschiebung  $x$  setzt sich aus der Lösung der *homogenen Gleichung*  $x_{hom}$  und der Lösung der *partikulären oder inhomogenen Gleichung*  $x_{part}$  zusammen

$$x_{ges} = x_{hom} + x_{part}. \quad (6.68)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung  $x_{hom}$  lautet

$$x_{hom} = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (6.69)$$

mit den Konstanten A und B.

Mit einem Lösungsansatz für die partikuläre Lösung

$$x_{part} = C \sin \Omega t + E \cos \Omega t + x_{stat, G}, \quad (6.70)$$

wird die Lösung der partikulären Gleichung  $x_{part}$  erstellt. Hier wird der Funktionstyp der Erregerfunktion als Ansatzfunktion gewählt. Die Konstanten C, E und  $x_{stat, G}$  müssen dafür noch bestimmt werden.

Der Term  $mg$  auf der rechten Seite der Differentialgleichung liefert die Verschiebung der *statischen Auslenkung*

$$x_{stat, G} = \frac{g}{\omega^2} \quad (6.71)$$

infolge des Gewichts G. Diese Verschiebung kann hier vernachlässigt werden. Hier interessiert nur die dynamische Lösung des Problems.

Mit einem weiteren Lösungsansatz, der diesen Term vernachlässigt,

$$x_{part} = C \sin \Omega t + E \cos \Omega t, \quad (6.72)$$

schwingt die Masse um ihre *statische Ruhelage*.

Nach dem Einsetzen des Ansatzes und deren 2. Ableitung nach der Zeit

$$\ddot{x}_{part} = -\Omega^2 (C \sin \Omega t + E \cos \Omega t) \quad (6.73)$$

in die Differentialgleichung ergeben sich durch einen *Koeffizientenvergleich*

$$(\omega^2 - \Omega^2) E = F_0 \quad (6.74)$$

$$(\omega^2 - \Omega^2) C = 0 \quad (6.75)$$

die Konstanten C und E zu

$$E = \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (6.76)$$

$$C = 0. \quad (6.77)$$

Eingesetzt lautet die partikuläre Lösung

$$x_{part} = \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (6.78)$$

Sie ist vom Typ der Erregerfunktion und hängt von der Lastamplitude  $F_0$  und von der Differenz der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und der Erregerfrequenz  $\Omega$  ab, die jeweils quadratisch eingehen.

Damit lautet die Gesamtverschiebung des ungedämpften Einmassenschwingers

$$x_{ges} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (6.79)$$

Hierin ist die statische Auslenkung der Punktmasse infolge der Kraft  $F_0$

$$x_{stat, F} = \frac{F_0}{\omega^2} = \frac{\bar{F}_0}{\omega^2} \frac{m}{m} \quad (6.80)$$

unter der Last  $\bar{F}_0$  enthalten. Man erhält sie, indem man die Erregerfrequenz  $\Omega$  zu null setzt.

Die Konstanten A und B werden mit Hilfe der Anfangsbedingungen in der Gesamtlösung bestimmt. Die Anfangsbedingungen sind wieder die Verschiebung  $x_0$  und die Geschwindigkeit  $v_0$  der Punktmasse zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$x_{ges}(t=0) = x_0 \quad (6.81)$$

$$\dot{x}_{ges}(t=0) = v_0. \quad (6.82)$$

Durch sie kann die Gesamtlösung, die Verschiebung in  $x$  der Punktmasse unter einer harmonischen Lasterregung dargestellt werden

$$x_{ges} = x_0 \cos \omega t + \left( \frac{v_0}{\omega} - \frac{\Omega}{\omega} \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (6.83)$$

Diese Lösung gilt für alle Verschiebungen  $x(t)$  für alle Werte  $\Omega$ , außer  $\omega = \Omega$ .

Im Fall  $\omega = \Omega$  wird der Nenner zweier Summanden zu null. Man nennt diesen Fall *Resonanz*. Die Erregerfrequenz  $\Omega$  stimmt mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  überein.

Durch einen speziellen Lösungsansatz, dem *Resonanzansatz*,

$$x_{part} = A t \sin \omega t \quad (6.84)$$

erhält man für diesen Fall

$$x_{part} = -\frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (6.85)$$

Die Verschiebung wächst linear mit der Zeit  $t$  an. Die Auslenkung würde stetig bis zu einem unendlichen Wert anwachsen, wenn diese Belastung lange genug wirken würde.

Dieselbe Lösung kann man auch durch Grenzwertbildung nach der Regel von l'HOPITAL erhalten. Die Lösung (6. 17) wird für den Grenzwert  $\Omega \rightarrow \omega$  untersucht. Da der Nenner zu null

$$x_{part} = \frac{F_0 \cos \omega t}{\omega^2 - \omega^2} \quad (6.86)$$

würde, wird der Zähler und Nenner jeweils nach  $\Omega$  abgeleitet und abermals der Grenzwert  $\Omega \rightarrow \omega$  gebildet:

$$x_{part} = \frac{F_0 \cos \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{F_0 t \sin \omega t}{+0 - 2\omega} = -\frac{F_0}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (6.87)$$

Beide Berechnungsmethoden liefern dasselbe Ergebnis.

In der Praxis gibt es keine völlig ungedämpften Systeme. Dennoch ist der Resonanzfall auch in der Praxis von großer Bedeutung, da dabei die Verschiebungen eines Systems unzulässig groß werden können.

Deshalb wird nun am Einmassenschwinger gezeigt, wie sich die Gesamtlösung durch die Hinzunahme einer sehr einfachen Dämpfung verändert.

Hier sei auch noch einmal darauf hingewiesen, dass die Grundlage all dieser Betrachtungen das lineare Elastizitätsgesetz ist, das nur für kleine Verformungen gilt.

## 6.6 Lösung der Differentialgleichung der gedämpften, erzwungenen Schwingung

Das System wird mit Hilfe einer sehr einfachen Dämpfungsannahme gedämpft, der *Flüssigkeitsdämpfung*. Es besteht wieder aus einer Punktmasse  $m$ , die diesmal sowohl durch eine Feder mit der Federkonstanten  $c$ , als auch durch einen

Dämpfer mit der Dämpfung  $2\delta$  mit der Aufhängung verbunden ist. Es wird wieder die Einzelkraft  $\bar{F}_0 \cos \Omega t$  belastet (Bild 6. 3). Das System befindet sich bei  $x = 0$  in Ruhe.

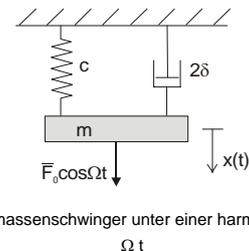


Bild 6. 19 Gedämpfter Einmassenschwinger unter einer harmonischen Einzelkraft  $\bar{F}_0 \cos \Omega t$

Um die Bewegungsgleichungen aufstellen zu können, wird die Punktmasse wieder um den Weg  $x$  ausgelenkt. Dadurch entsteht in der Feder eine Federkraft  $F_D$  und eine *Dämpferkraft*  $F_D$  (Bild 6. 4)

$$F_D = 2\delta m \dot{x}. \quad (6.88)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung in  $x$ -Richtung erhält man wieder eine inhomogene Differentialgleichung für das System

$$m \ddot{x} + 2\delta m \dot{x} + c x = mg + \bar{F}_0 \cos \Omega t, \quad (6.89)$$

durch Division durch die Masse  $m$  lösbar wird

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = g + F_0 \cos \Omega t. \quad (6.90)$$

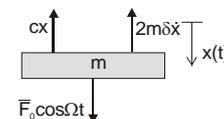


Bild 6. 20 Schnittbild des gedämpften Einmassenschwingers am ausgelenkten System

Der Term  $g$  liefert wieder die statische Auslenkung infolge des Eigengewichts (6. 10) und wird im Folgenden wieder vernachlässigt.

Die *Eigenkreisfrequenz*  $\omega_d$  des gedämpften Systems lautet nun

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}. \quad (6.91)$$

Sie wird also durch die Dämpfung kleiner als im ungedämpften System. Da die meisten technischen Probleme einen sehr kleinen Dämpfungsfaktor  $\delta$  haben

$$\delta \ll \omega, \quad (6.92)$$

kann diese Differenz vernachlässigt werden. Es gilt daher für technische Probleme im allgemeinen

$$\omega_d \approx \omega. \quad (6.93)$$

Weiter wird ein *kritischer Dämpfungsfaktor* durch das Verhältnis

$$D = \frac{\delta}{\omega}. \quad (6.94)$$

definiert.

Die Gesamtlösung, die Verschiebung  $x$ , setzt sich wieder aus der Lösung der *homogenen Gleichung*  $x_{hom}$  und der Lösung der *partikulären oder inhomogenen Gleichung*  $x_{part}$  zusammen (6. 7).

Die Lösung des homogenen Systems lautet

$$x_{hom} = e^{-\delta t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] \quad (6.95)$$

mit den freien Konstanten A und B.

Der Lösungsansatz (6. 11) für die partikuläre Lösung liefert wieder durch den Koeffizientenvergleich

$$(\omega^2 - \Omega^2) E - 2 \delta \Omega C = F_0 \quad (6.96)$$

$$(\omega^2 - \Omega^2) C + 2 \delta \Omega E = 0 \quad (6.97)$$

die Koeffizienten C und E

$$C = \frac{-2 \delta \Omega F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}, \quad (6.98)$$

$$E = \frac{(\omega^2 - \Omega^2) F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}. \quad (6.99)$$

In (6. 11) eingesetzt lautet die partikuläre Lösung

$$x_{part} = \frac{-2 \delta \Omega F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2} \sin \Omega t + \frac{(\omega^2 - \Omega^2) F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2} \cos \Omega t \quad (6.100)$$

Sie ist wieder vom Typ der Erregerfunktion und hängt von der Lastamplitude  $F_0$  ab. Diesmal erscheinen beide Funktionstypen, die Sinus- und die Cosinusfunktio-

on. Die Terme im Nenner, die wieder die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und die Erregerfrequenz  $\Omega$  enthalten, können für keine Erregerfrequenz zu null werden. Es kann also keine Resonanz auftreten.

Damit lautet die Gesamtlösung des gedämpften Einmassenschwingers

$$x_{ges} = e^{-\delta t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] + \frac{-2 \delta \Omega F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2} \sin \Omega t + \frac{(\omega^2 - \Omega^2) F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2} \cos \Omega t. \quad (6.101)$$

Die Konstanten A und B werden wieder mit Hilfe der Anfangsbedingungen (6. 20) und (6. 21) in der Gesamtlösung wie oben durchgeführt bestimmt.

## 6. 7 Erregertypen

Im vorigen Kapitel liegt eine harmonische Kraftanregung (6. 5) vor. Die Erregerkräfte lassen sich im allgemeinen in drei Erregertypen unterteilen.

### Erregung über eine Feder

Ein gedämpfter Einmassenschwinger wird über den Endpunkt der Feder harmonisch mit

$$x_F(t) = x_0 \cos \Omega t \quad (6.102)$$

bewegt (Bild 6. 5). Dann ist die Verlängerung der Feder durch  $x_F - x$  gegeben. Aus dem Gleichgewicht in  $x -$  Richtung erhält man

$$m \ddot{x} = -2 \delta m \dot{x} + c(x_F - x) \quad (6.103)$$

oder

$$m \ddot{x} + 2 \delta m \dot{x} + c x = c x_F = c x_0 \cos \Omega t. \quad (6.104)$$

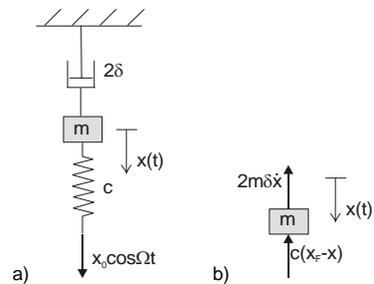


Bild 6. 21 a) Erregung über eine Feder; b) Schnittbild der Punktmasse

Um die Differentialgleichung zu lösen, wird wieder durch die Punktmasse  $m$  dividiert. Man erhält

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0 \cos \Omega t. \quad (6.105)$$

Damit ergibt sich die Erregerkraft zu

$$F_F(t) = x_0 \omega^2 \cos \Omega t \quad (6.106)$$

### Krafterregung

Wird ein gedämpfter Einmassenschwinger durch eine Kraft

$$F(t) = \bar{F}_0 \cos \Omega t \quad (6.107)$$

harmonisch angeregt (Bild 6. 3), erhält man dieselbe Gleichung wie für die Erregung über eine Feder, wenn man (6. 25) durch  $m$  teilt und

$$x_0 = \frac{\bar{F}_0}{c} = \frac{F_0}{c} = \frac{F_0}{\omega^2} \quad (6.108)$$

einsetzt.

Die Bewegung der Punktmasse führt bei der Krafterregung und der Erregung über eine Feder auf die gleiche Differentialgleichung, ist also von demselben Erregertyp.

### Erregung über einen Dämpfer

Ein gedämpfter Einmassenschwinger wird über den Endpunkt des Dämpfers harmonisch mit

$$x_D(t) = x_0 \sin \Omega t \quad (6.109)$$

bewegt (Bild 6. 6). Dann ist die Bewegung des Dämpfers mit  $x_D - x$  gegeben. Aus dem Gleichgewicht in  $x -$  Richtung erhält man

$$m \ddot{x} = 2 \delta m (\dot{x}_D - \dot{x}) - c x \quad (6.110)$$

oder

$$m \ddot{x} + 2 \delta m \dot{x} + c x = 2 \delta m \dot{x}_D = 2 \delta m \Omega x_0 \cos \Omega t. \quad (6.111)$$

Um die Differentialgleichung zu lösen, wird wieder durch die Punktmasse  $m$  dividiert. Man erhält

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega^2 x = 2 \delta \Omega x_0 \cos \Omega t, \quad (6.112)$$

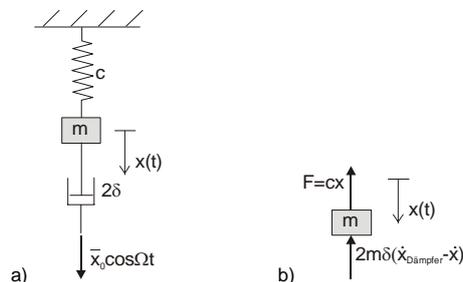


Bild 6. 22 a) Erregung über einen Dämpfer; b) Schnittbild der Punktmasse **VZ**

Damit ergibt sich die Erregerkraft zu

$$F_D(t) = 2 \delta x_0 \Omega \sin \Omega t = 2 D x_0 \eta \omega^2 \cos \Omega t \quad (6.113)$$

mit dem Verhältnis  $\eta$  der Erregerfrequenz zur Eigenkreisfrequenz

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (6.114)$$

und dem kritischen Dämpfungsfaktor  $D$  (6. 33).

### Erregung durch eine rotierende Unwucht

Eine weitere, wichtige Anregungsform ist die Erregung durch eine rotierende, massebehaftete Unwucht (Bild 6. 7). Ein Schwinger der Masse  $M$  wird durch eine mit der Erregerfrequenz  $\Omega$  rotierende Unwucht  $m$  zu Schwingungen angeregt. Durch das Freimachen der Stabkraft  $S$  erhält man im Schnittbild (Bild 6. 8) zwei Systeme, an denen das Gleichgewicht in  $x_M -$  und  $x_m -$  Richtung aufgestellt wird.

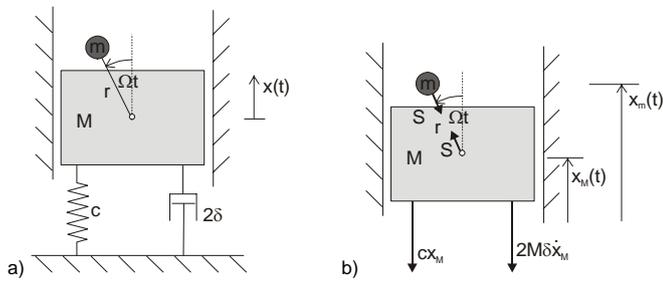


Bild 6. 23 a) Schwinger der Masse M mit der rotierenden Unwucht m; b) Schnittbild der Systeme

$$M \ddot{x}_M = -c x_M - 2 \delta m \dot{x}_M + S \cos \Omega t \quad (6. 115)$$

$$m \ddot{x}_m = -S \cos \Omega t \quad (6. 116)$$

Die Beziehung zwischen diesen beiden Koordinaten ist geometrisch festgelegt

$$x_m = x_M + r \cos \Omega t, \quad (6. 117)$$

mit dem Abstand r zwischen den beiden Punktmassen.

Aus Gleichung (6. 54) und (6. 55) ergibt sich nach der Elimination von S

$$M \ddot{x}_M + m \ddot{x}_m = -c x_M - 2 \delta m \dot{x}_M \quad (6. 118)$$

und durch das Einsetzen von (6. 56) und deren zeitlichen Ableitung

$$\ddot{x}_m = \ddot{x}_M - \Omega^2 r \cos \Omega t \quad (6. 119)$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung für die Punktmasse M

$$(M + m) \ddot{x}_M + 2 \delta m \dot{x}_M + c x_M = m \Omega^2 r \cos \Omega t, \quad (6. 120)$$

mit der Gesamtmasse  $\bar{m}$

$$\bar{m} = M + m \quad (6. 121)$$

und dem Verhältnis

$$x_0 = \frac{m}{\bar{m}} r. \quad (6. 122)$$

Teilt man (6. 59) durch die Gesamtmasse  $\bar{m}$  erhält man mit (6. 61) die Gleichung

$$\ddot{x}_M + 2 \delta \frac{x_0}{r} \dot{x}_M + \omega^2 x_M = \omega^2 x_0 \eta^2 \cos \Omega t. \quad (6. 123)$$

Die drei Erregertypen führen also zu Differentialgleichungen für die Verschiebungen, die sich nur durch einen Faktor  $E_{dyn}$  unterscheiden. Alle drei Differentialgleichungen lauten somit

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega^2 x = E_{dyn} x_0 \cos \Omega t, \quad (6. 124)$$

wobei der Faktor

$E_{dyn} = 1$  für die Erregung über eine Feder oder eine Kräfteerregung,

$E_{dyn} = 2 D \eta$  für die Erregung über einen Dämpfer,

$E_{dyn} = \eta^2$  für die Erregung durch eine rotierende Unwucht steht.

Die Gesamtlösung für die Verschiebung x setzt sich aus der Lösung der *homogenen Gleichung*  $x_{hom}$  und der Lösung der *partikulären* oder *inhomogenen Gleichung*  $x_{part}$  zusammen (6. 7).

## 6. 8 Überhöhungsfunktionen

Bei einem System mit dem kritischen Dämpfungsfaktor  $D > 0$  (6. 33)

ergibt sich die Differentialgleichung zu

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos \Omega t. \quad (6. 125)$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass der homogene Anteil der Lösung mit der Zeit abklingt. Die Gesamtlösung des Schwingungsvorgangs wird durch (6. 40) beschrieben. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung (6. 34) klingt durch die Exponentialfunktion sehr schnell ab. Der Zeitraum, in dem diese Lösung abklingt, nennt man *Einschwingvorgang*.

Nach Beendigung dieses Einschwingvorgangs befindet sich der Schwinger im einem *eingeschwungenen Zustand*. Der Einmassenschwinger schwingt harmonisch mit der Erregerfrequenz  $\Omega$ . Die Schwingung ist dann *stationär*. Deshalb wird in den meisten technischen Anwendungen mit harmonischen Erregern nur der Partikulärteil der Gesamtlösung betrachtet.

Der Schwinger schwingt harmonisch mit der Erregerfrequenz  $\Omega$ . Die größte Auslenkung, die *Amplitude* Q, und das Maß zwischen Erregung und Antwort, die *Phase* oder *Phasenverschiebung*  $\varepsilon$ , sind vom Verhältnis  $\eta$  (6. 53) der Erregerfrequenz  $\Omega$  zur Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und vom kritischen Dämpfungsmaß D (6. 33) abhängig.

Um ein dimensionsloses Maß für die Ausschläge eines solchen Einmassenschwingers zu erhalten, bezieht man dies auf einen *Vergleichswert*, zum Beispiel die maximale statische Verschiebung der Masse

$$x_{stat, F} = \frac{\bar{F}_0}{c} = \frac{F_0 m}{c} = \frac{F_0}{\omega^2}. \quad (6. 126)$$

Damit wird eine *Vergrößerungsfunktion*  $V_1$

$$V_1 = \frac{Q}{x_{stat}} \quad (6. 127)$$

definiert. Sie beschreibt die Vergrößerung des Maximalwertes der Amplitude eines dynamischen gegenüber dem eines statischen Systems. Der Faktor gibt die Vergrößerung der *Antwort* des Systems an.

Dazu wird die partikuläre Lösung (6. 39) umgeformt

$$x = Q \cos (\Omega t - \gamma). \quad (6. 128)$$

Die neue Amplitude Q erhält man aus der vektoriellen Summe der Einzelamplituden

$$Q = \sqrt{\left(\frac{-2 \delta \Omega F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}\right)^2 + \left(\frac{(\omega^2 - \Omega^2) F_0}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}\right)^2} \\ = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}}. \quad (6. 129)$$

Der Winkel  $\gamma$  zwischen den Komponenten wird zu

$$\tan \gamma = \frac{(\omega^2 - \Omega^2) F_0}{\frac{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}{-2 \delta \Omega F_0}} = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)}{-2 \delta \Omega} = \frac{(1 - \eta^2)}{-2 \delta \eta} = \frac{(1 - \eta^2)}{-2 D \eta} \quad (6. 130)$$

Damit erhält man das Maß für die Phasenverschiebung  $\varepsilon$  in Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors D und des Verhältnisses  $\eta$

$$\tan \varepsilon = \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{-2 D \eta}{(1 - \eta^2)}. \quad (6. 131)$$

Mit (6. 53) folgt für die Vergrößerungsfunktion  $V_1$

$$V_1(\eta) = \frac{\omega^2}{F_0} \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \delta \Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \frac{\delta}{\omega} \eta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 D \eta)^2}}. \quad (6. 132)$$

In Bild 6. 25 wird die Funktion  $V_1(\eta)$  über dem Verhältnis  $\eta$  in Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors D aufgetragen.

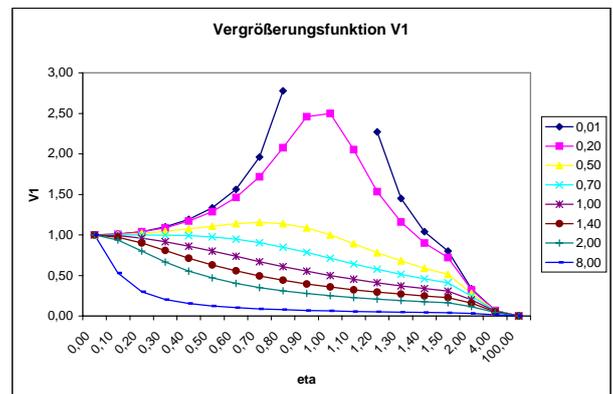


Bild 6. 24 Die Vergrößerungsfunktion  $V_1(\eta)$  in Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors D

In Bild 6. 25 wird die Phasenverschiebung  $\varepsilon(\eta)$  über dem Verhältnis  $\eta$  in Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors D dargestellt.

Die Vergrößerungsfunktion  $V_1(\eta)$  und die Phasenverschiebung  $\varepsilon(\eta)$  lassen sich in drei Bereiche unterteilen.

### Unterkritischer Bereich

Im unterkritischen Bereich liegt die Erregerfrequenz unter der kritischen, der Resonanzfrequenz.

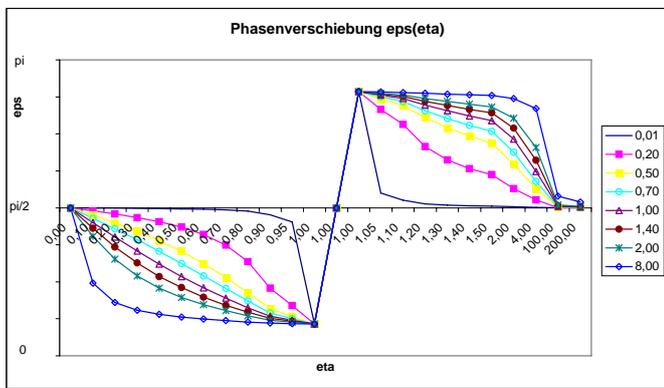


Bild 6. 25 Die Phasenverschiebung  $\varepsilon(\eta)$  in Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors D

Wenn die Erregerfrequenz  $\Omega$  wesentlich kleiner als die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  ist  $\Omega \ll \omega$ , beziehungsweise  $\eta \ll 1$ , (6. 133)

nennt man die Erregung unterkritisch. Dann ist die Vergrößerungsfunktion  $V_1(\eta)$  nahezu eins

$$V_1(\eta) \approx 1. \quad (6. 134)$$

Das bedeutet, dass die Amplitude Q gleich der statischen Auslenkung  $x_{stat}$  ist

$$Q \approx x_{stat}, \quad (6. 135)$$

die Phasenverschiebung ist nahezu null

$$\varepsilon(\eta) \approx 0. \quad (6. 136)$$

Das heißt, die Verschiebung  $x(t)$  schwingt in Phase mit der Belastung  $F(t)$ .

**Resonanzbereich**

Im Resonanzbereich ist die Erregerfrequenz gleich der Eigenkreisfrequenz

$$\Omega \approx \omega, \text{ bzw. } \eta \approx 1. \quad (6. 137)$$

Dann erreicht die Vergrößerungsfunktion  $V_1(\eta)$  ein Maximum

$$V_1(\eta)_{max} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \approx \frac{1}{2D} \text{ für } D \ll 1 \text{ bei } \eta = \sqrt{1-2D^2}. \quad (6. 138)$$

Für kleine Dämpfungsfaktoren  $D \ll 1$  ist der Ort des Maximums näherungsweise bei

$$\Omega = \omega, \text{ bzw. } \eta = 1. \quad (6. 139)$$

Für große Dämpfungswerte  $D \approx \frac{1}{2}\sqrt{2}$  rückt der Ort des Maximums gegen  $\eta = 0$ . Das Maximum tritt dann also nicht bei der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-D^2} \quad (6. 140)$$

des Schwingers auf.

Für die Dämpfung gleich Null wird die Vergrößerungsfunktion im Resonanzfall,  $\Omega = \omega$ , unendlich.

Die Phasenverschiebung  $\varepsilon$  springt in diesem Fall von 0 auf  $\pi$ .

**Überkritischer Bereich**

Im überkritischen Bereich liegt die Erregerfrequenz über der kritischen, der Resonanzfrequenz.

Wenn die Erregerfrequenz  $\Omega$  wesentlich größer als die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  ist

$$\Omega \gg \omega, \text{ beziehungsweise } \eta \gg 1, \quad (6. 141)$$

nennt man die Erregung überkritisch. Dann ist die Vergrößerungsfunktion  $V_1(\eta) \approx 0$ . Das bedeutet, dass die Amplitude Q gegen null geht.

$$Q \rightarrow 0, \quad (6. 142)$$

die Phasenverschiebung erreicht den Wert  $\pi$

$$\varepsilon(\eta) \approx \pi. \quad (6. 143)$$

Das heißt, die Verschiebung  $x(t)$  schwingt in Gegenphase mit der Belastung  $F(t)$ .

In der Schwingungslehre sind weitere Vergrößerungsfunktionen definiert, die auf andere Bezugswerte normiert werden. Hier wird nur das Prinzip dieser Vergrößerungsfunktionen dargestellt.

Zur Vollständigkeit dieses Kapitels wird die Analogie zwischen mechanischem Schwinger und elektrischem Schwingkreis in Tabelle 6. 1 erläutert. Diese Analogie wird häufig bei Versuchen eingesetzt. Damit lassen sich Messergebnisse sofort als mechanische Ergebnisse angeben.

Tabelle 6. 1 Analogie zwischen mechanischem Schwinger und elektrischem Schwingkreis

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
|                                 |  |
| Mechanischer Schwinger          | Elektrischer Schwingkreis                    |
| Verschiebung x                  | Ladung Q                                     |
| Geschwindigkeit $v = \dot{x}$   | Stromstärke $i = \dot{Q}$                    |
| Masse m                         | Induktivität L einer Spirale                 |
| Dämpfungskonstante $2 \delta m$ | Widerstand R                                 |
| Federkonstante c                | $1/\text{Kapazität } 1/C$ eines Kondensators |
| Kraft F                         | Spannung u                                   |

**Aufgabe 6. 1**

- Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen verschiedener Einmassenschwinger

Es sind verschiedene Masse- Feder- Systeme (Masse m, Federsteifigkeit c, beziehungsweise  $c_1, c_2$ ) gegeben.

gegeben: m, c, l, EI,  $c_1, c_2$

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen  $\omega$

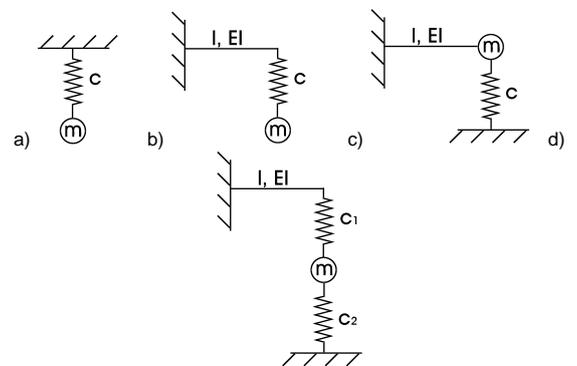


Bild 6. 26 Masse- Feder- Systeme

Lösung: a)  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ , b)  $\omega = \sqrt{\frac{1}{m \left( \frac{1}{c} + \frac{l^3}{3EI} \right)}}$ , c)  $\omega = \sqrt{\frac{c + \frac{3EI}{l^3}}{m}}$ ,

d)  $\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{l^3}{3EI}} + c_2}{m}}$

**Aufgabe 6. 2**

- Bestimmung der Schwingungsdauer eines masselosen Balkens mit einer Einzelmasse

Ein elastischer, gewichtsloser Balken, der auf zwei Federn (Federsteifigkeit c) gelagert ist, trägt in P eine Punktmasse m.

gegeben: l, c, E I, m

gesucht: Bestimmung der Schwingungsdauer T des Systems

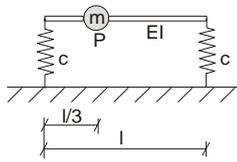


Bild 6. 30 Elastischer, gewichtsloser Balken auf zwei Federn

Lösung:  $T = 2 \pi \sqrt{m \left( \frac{5}{9c} + \frac{4}{243EI} \right)}$

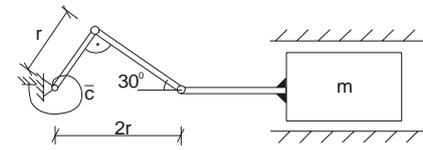


Bild 6. 45 Kolben in seiner Ruhelage.

Lösung:  $\omega^2 = \frac{3\bar{c}}{4mr^2}$

**Aufgabe 6. 3**

- Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit eines Stabwerks
- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz eines Stabwerks

Für das skizzierte System muss die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  so bestimmt werden, dass sie so niedrig wie möglich wird. Der Balken sei dehnstarr und masselos.

gegeben: EA, EI, l, m

gesucht: Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit c, der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und dem Einfluss des Stabwerks auf die Ersatzfedersteifigkeit  $c_{ers}$  des Gesamtsystems.

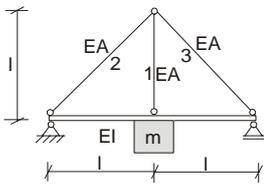


Bild 6. 34 Dehnstarrer, masseloser Balken mit Einzelmasse

Lösung:  $f = \frac{1}{EI} \frac{l^3}{24}$ ,  $c_{ers} = \frac{1}{f}$ ,  $\omega^2 = \frac{24 EI}{ml^3}$

**Aufgabe 6. 4**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichung
- Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit
- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz

Eine Punktmasse m wird durch zwei Biegefedern (Länge l, Biegesteifigkeit EI<sub>1</sub>, beziehungsweise EI<sub>2</sub>) und eine Spiralfeder (Federsteifigkeit c) in der statischen Ruhelage gehalten.

gegeben: l, EI<sub>1</sub>, EI<sub>2</sub>, c, m

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz  $\omega$

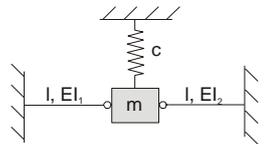


Bild 6. 42 Punktmasse mit zwei Biegefedern und einer Spiralfeder

Lösung:  $\omega^2 = \frac{1}{m} \left[ c + \frac{3EI_1}{l^3} + \frac{3EI_2}{l^3} \right]$

**Aufgabe 6. 5**

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichung
- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz
- Lösung mit Hilfe des Energiesatzes

Ein Kolben schwingt mit kleinen Auslenkungen um die skizzierte Ruhelage.

gegeben: r, m,  $\bar{c}$

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz  $\omega$

**Aufgabe 6. 6**

- Bestimmung der Schwingungsdifferentialgleichung und deren Lösung
- Bestimmung Schwingungsdauer des Systems
- Bestimmung des maximalen Auslenkwinkels für Nicht- Abheben der Zusatzmasse

Der Schwinger, bestehend aus starrem Balken (Masse m, Länge l), Feder c, Masse M und lose aufliegender Zusatzmasse  $\Delta M$ , wird um den Winkel  $+\varphi_0$  aus seiner statischen Ruhelage heraus ausgelenkt (für kleine Ausschläge) und zur Zeit  $t = 0$  losgelassen.

gegeben: l, m, c,  $M = 2m$ ,  $\Delta M = \frac{2}{3}m$

gesucht: Bestimmung der Differentialgleichung, die diese Schwingung beschreibt, und deren Lösung, der Schwingungsdauer T des Systems und des Betrags  $\varphi_{0max}$  des Auslenkwinkels  $\varphi_0$ , wenn die Zusatzmasse nicht abheben soll.

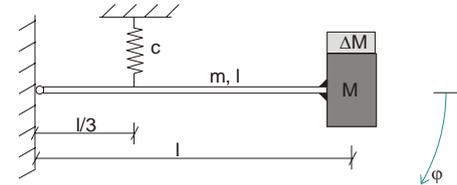


Bild 6. 48 Schwinger aus Balken, Feder, Masse und lose aufliegender Zusatzmasse

Lösung:  $3m l^2 \ddot{\varphi} = - \frac{l^2}{9} c \varphi$ ,  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t$ ,  $T = 2 \pi \sqrt{\frac{27m}{c}}$ ,  $\varphi_{0max} < \frac{27gm}{c l}$

**Aufgabe 6. 7**

- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz der Drehschwingung, für Haftung zwischen den beiden Walzen
- Bestimmung des maximalen Winkels für Haftung zwischen den beiden Walzen
- Lösung mit dem d'ALEMBERTschen Prinzip
- Lösung mit dem Energiesatz
- Lösung mit dem Momentensatz

Zwei Walzen (Massen m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>, Massenträgheitsmomente  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ , Radien r, R) sind in der skizzierten Weise gelagert. Die Feder (Federsteifigkeit c), welche die Walzen aneinander drückt, ist um den Betrag  $\Delta l$  vorgespannt. An der Walze 1 ist eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit  $\hat{c}$ ) angebracht, die für  $\varphi = 0$  ungespannt ist. Zur Zeit  $t = 0$  wird die Walze 1 aus der Anfangslage  $\varphi = \varphi_0$  ohne Geschwindigkeit losgelassen.

gegeben: m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ , c,  $\hat{c}$ , r, R = 2r,  $\Delta l$ ,  $\varphi_0$ ,  $\mu_0$

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz der Drehschwingung, falls Haftung zwischen den beiden Walzen besteht. Wie groß darf der Winkel  $\varphi_0$  höchstens sein, wenn die Walzen nicht aufeinander rutschen sollen (Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$ )?

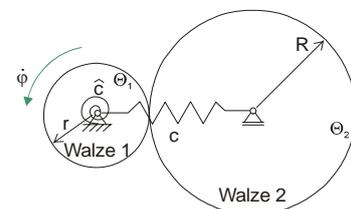


Bild 6. 51 Zwei Walzen durch Federn gehalten

Lösung:  $\omega^2 = \frac{\hat{c}}{\Theta_1 + \frac{1}{4}\Theta_2}$ ,  $\varphi_0 \leq \mu_0 \Delta l \frac{c}{c} r (1 + 4 \frac{\Theta_1}{\Theta_2})$

**Aufgabe 6. 8**

- Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Ausschläge
- Bestimmung der Dämpferkonstante, wenn der Zeiger nach einer Anfangsauslenkung nicht mehr schwingen soll
- Falldiskussion für das LEHRsche Dämpfungsmaß

Ein dünner stabförmiger Zeiger (Länge  $l$ , Masse  $m$ ) ist in O durch eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit  $\hat{c}$ ) elastisch eingespannt. In Zeigermitte ist ein geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer angeschlossen (Dämpferkonstante  $r$ ).

gegeben:  $m, l, r, \hat{c}$

gesucht: Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Ausschläge, der Dämpferkonstante  $r$ , wenn der Zeiger nach einer Anfangsauslenkung nicht mehr schwingen soll.

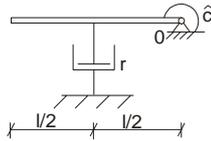


Bild 6. 54 Dünner stabförmiger Zeiger durch Drehfeder in O elastisch eingespannt.

Lösung:  $\ddot{\varphi} + \frac{3}{4} \frac{r}{m} \dot{\varphi} + \frac{3\hat{c}}{ml^2} \varphi = 0, r = 8 \sqrt{\frac{m\hat{c}}{3l^2}}, \varphi(t) = A_1 e^{-\omega t} + A_2 t e^{-\omega t},$

$\dot{\varphi}(t) = -\omega e^{-\omega t} [A_1 + \frac{A_2}{\omega} + A_2 t]$

**Aufgabe 6. 9**

- Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung und ihrer Partikularlösung
- Bestimmung der Erregerfrequenz
- Bestimmung der Amplitude der schwingenden Wagenmasse bei seiner Reisegeschwindigkeit
- Bestimmung der kritischen Reisegeschwindigkeit

Ein Auto, vereinfacht dargestellt als Masse- Feder- System (Dämpfungseinflüsse werden vernachlässigt), durchfährt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit  $v_0$  sinusförmige Bodenwellen (Amplitude  $u_0$ , Wellenlänge  $L$ ).

gegeben:  $c, m, v_0, u_0, L$

gesucht: Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung, die diesen Bewegungsablauf beschreibt, und ihrer Partikularlösung, Bestimmung der Erregerfrequenz, der Amplitude  $x_0$  der schwingenden Wagenmasse bei einer Reisegeschwindigkeit  $v_0$  und der kritischen Reisegeschwindigkeit  $v_{krit}$ .

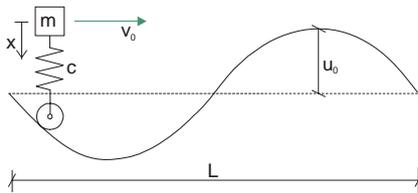


Bild 6. 56 Durchfahrt einer sinusförmigen Bodenwellen eines Autos mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit

Lösung:  $\ddot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{c}{m} u(t), \omega^2 = \frac{c}{m}, x_0 = \frac{L}{\omega^2 - \Omega^2} u_0, v_{krit} = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$

**Aufgabe 6. 10**

- Bestimmung des Ausschlags des Klotzes nach einmaligem Hin- und Herschwingen
- Anwendung der COULOMBSchen Reibung
- Lösung mit den NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Lösung mit dem Energiesatz

Auf einer rauhen, ebenen Unterlage liegt ein Klotz (Masse  $m$ ), der durch zwei Federn (Federsteifigkeit  $c$ ) seitlich gehalten wird. Der Klotz wird aus der Ruhelage (Federn ungespannt) um die Strecke  $x_0$  ausgelenkt und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Der Reibungskoeffizient  $\mu$  sei so klein, dass der Klotz einige Male hin- und herschwingt.

gegeben:  $c, m, \mu, x_0$

gesucht: Bestimmung des Ausschlags  $x_2$  des Klotzes nach einmaligem Hin- und Herschwingen.

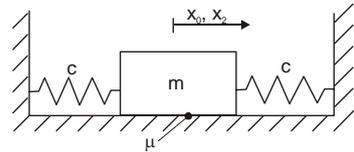


Bild 6. 58 Klotz auf einer rauhen, ebenen Unterlage

Lösung:  $x_2 = x_0 - 2 \frac{\mu mg}{c}$

**Aufgabe 6. 11**

- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz des Systems für kleine Ausschläge
- Bestimmung der Amplitude der Antwortfunktion im stationären Zustand

Ein Druckmessgerät für den veränderlichen Unterdruck  $p(t) = p_0 \sin \Omega t$  besteht aus einem Kolben 1 (Masse  $m_1$ , Fläche  $A$ ), einer Stange 2 (Masse  $m_2$ ), einem dünnen Zeiger 3 (Masse  $m_3$ ) und einer Feder 4 (Federsteifigkeit  $c$ ). Das gesamte Gewicht soll im Lager O aufgenommen werden.

gegeben:  $m_1, m_2, m_3, A, c, l, a, p_0, \Omega$

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  des Systems für kleine Ausschläge und der Amplitude  $Q$  der Antwortfunktion  $q(t) = Q \sin \Omega t$  im stationären Zustand.

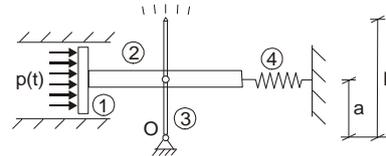


Bild 6. 60 Druckmessgerät für veränderlichen Unterdruck

Lösung:  $\omega^2 = \frac{c - (m_1 + m_2 + m_3)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{3} \frac{l^2}{a^2} m_3}, Q = \frac{l}{a} \frac{A p_0}{m_1 + m_2 + \frac{1}{3} \frac{l^2}{a^2} m_3} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$