2 Kinematik des Massenpunktes

Aufgabe 2. 1

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinatensystem

Ein Personenzug (Geschwindigkeit v_P) fährt von Station A über B und C nach D. Zwischen zwei Stationen wird die Bewegung als gleichförmig angenommen. In B und C hat der Zug jeweils Aufenthalt (t_{Auf}). Während seines Aufenthaltes auf Station C soll der Zug einen von A nach D durchfahrenden D- Zug (Geschwindigkeit v_D) vorbeilassen.

gegeben: $v_P = 72\ \frac{km}{h}$, $v_D = 108\ \frac{km}{h}$, $\overline{AB} = 12$ km, $\overline{BC} = 24$ km, $\overline{CD} = 18$ km, $t_{Auf} = 10$ min

gesucht: Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit des Personenzuges zwischen den Stationen A und D. Wann muß der D- Zug in A abfahren, damit er den Personenzug nach 5 min Aufenthalt in C passiert? Wie viele Minuten trifft der D- Zug vor dem Personenzug in D ein? Der gesamte Ablauf ist in einem s- t-, bzw. v- t- Diagramm darzustellen.

Lösung

Die mittlere Geschwindigkeit des Personenzuges zwischen den Stationen A und D errechnet sich aus der benötigten Gesamtzeit

$$t_{ges,\,P} = \frac{\overline{AB}}{v_P} + t_{B\,Auf} + \frac{\overline{BC}}{v_P} + t_{C\,Auf} + \frac{\overline{CD}}{v_P} = \left(\frac{12}{72} + 10 + \frac{24}{72} + 10 + \frac{18}{72}\right) 60\text{min}.$$

$$= 65 \text{ min} \qquad (2.118)$$

Daraus berechnet sich die mittlere Geschwindigkeit

$$v_{mittel,\,P} = \frac{\overline{AD}}{t_{ges,P}} = \frac{54}{65}\ 60 = 49.85\ \frac{km}{h}. \qquad (2.113)$$

Die Zeit des P- Zuges zum Durchfahren der Strecke $\overline{AC}$ ist

$$t_{AC,\,P} = \frac{\overline{AB}}{v_P} + t_{BAuf} + \frac{\overline{BC}}{v_P} = \left(\frac{12}{72} + 10 + \frac{24}{72}\right) 60 \text{ min} = 40 \text{ min}, \qquad (2.114)$$

die Bedingung ist, damit der D- Zug den Personenzug zur Zeit t* in C treffen soll

$$t^* = t_{AC,\,P} + 5 \text{ min} = 45 \text{ min}. \qquad (2.115)$$

Damit ist die benötigte Zeit des D- Zuges zum Durchfahren der Strecke $\overline{AD}$

$$t_{AC,\,D} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}}{v_D} = \frac{36}{108}\ 60 = 20 \text{ min}. \qquad (2.116)$$

Die Zeitdifferenz zwischen den Abfahrten der beiden Züge ist damit

$$\Delta t = t^* - t_{AC,\,D} = 25 \text{ min}. \qquad (2.117)$$

Die Zeitdifferenz zwischen dem Eintreffen der beiden Züge berechnet sich aus der benötigten Gesamtzeit des P- Zuges $t_{ges,\,P} = 65$ min und der benötigten Gesamtzeit des D- Zuges

$$t_{ges,\,D} = \frac{\overline{AD}}{v_D} = \frac{54}{108}\ 60 \text{ min} = 30 \text{ min}. \qquad (2.118)$$

Der D-Zug trifft in D Δt^*_D vor dem Personenzug ein, die Zeitdifferenz ist

$$\Delta t^*_D = t_{ges,\,P} - (t_{ges,\,D} + \Delta t) = (65 - (30 + 25)) \text{ min} = 10 \text{ min}. \qquad (2.119)$$

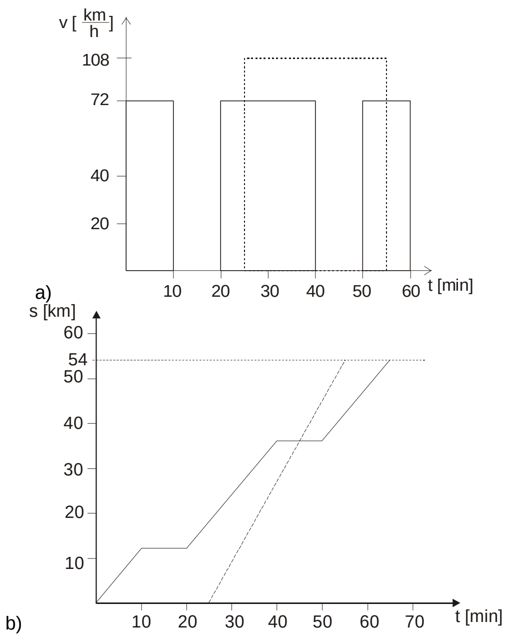


Bild 2. 11 a) s- t- Diagramm; b) v- t- Diagramm

Aufgabe 2. 2

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Ein Fahrzeug bewegt sich gemäß dem skizzierten Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm.

gegeben: $v_2 = 20\ \frac{m}{s}$, $v_3 = 10\ \frac{m}{s}$, $t_1 = 100$ s, $t_3 = 60$ s

gesucht: Man berechne die auftretenden Beschleunigungen, den in 6 min zurückgelegten Weg und zeichne die Diagramme s(t), a(t), v(s) und a(s).

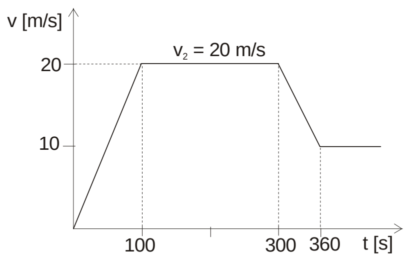


Bild 2. 12 Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm

Lösung

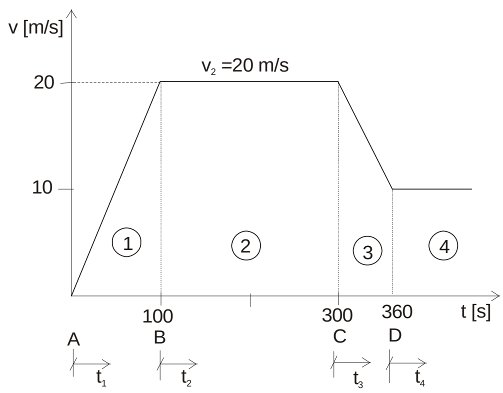


Bild 2. 13 Aufteilung in 4 Zeitbereiche

Tabelle 2. 1 Berechnung der Beschleunigungen

Bereich Strecke	**Zeitintervall**	**Geschwindigkeit**	**Beschleunigung**
$\overline{AB}$	$0 < t_1 < 100$ s	v_1	$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{20}{100} \frac{m}{s^2} = \frac{1}{5} \frac{m}{s^2} = const.$ (2. 120)
$\overline{BC}$	$0 < t_2 < 200$ s	$v_2 = const$	$a_2 = 0$ (2. 121)
$\overline{CD}$	$0 < t_3 < 60$ s	v_3	$a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = -\frac{10}{60} \frac{m}{s^2} = -\frac{1}{6} \frac{m}{s^2} = const.$ (2. 122)

Tabelle 2. 1 Berechnung des zurückgelegten Weges

Bereich Strecke	**Beschleu-nigung**	**Geschwindigkeit Weg**	**Anfangsbedingungen**
$\overline{AB}$	$a_1 = const.$ (2. 120)	$v_1 = a_1 t_1 + v_{10}$ (2. 123) $s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2_1 + v_{10} t_1 + x_{10}$ (2. 124)	$v_1(t_1 = 0) = 0 \Rightarrow v_{10} = 0$ $s_1(t_1 = 0) = 0 \Rightarrow x_{10} = 0$ $v_1(100\ s) = a_1 t_1 = 20 \frac{m}{s} = v_{20}$ (2. 125) $s_1(100\ s) = \frac{1}{2} a_1 t^2_1 = 1000\ m = x_{20}$ (2. 126)
$\overline{BC}$	$a_2 = 0$ (2. 121)	$v_2 = v_{20} = const$ (2. 127) $s_2 = v_2 t_2 + x_{20}$ (2. 128)	$v_2(t_2 = 0) = v_1(100\ s) = v_{20} = 20 \frac{m}{s}$ $s_2(t_2 = 0) = s_1(100\ s) = x_{20} = 1000$ m $v_2(200\ s) = v_{30}$ (2. 129) $s_2(200\ s) = (20\ 200+1000)\ m = 5000\ m = x_{30}$ (2. 130)
$\overline{CD}$	$a_3 = const.$ (2. 122)	$v_3 = a_3 t_3 + v_{30}$ (2. 131) $s_3 = \frac{1}{2} a_3 t^2_3 + v_{30} t_3 + x_{30}$ (2. 132)	$v_3(t_3 = 0) = v_2 = v_{40}$ $s_3(t_3 = 0) = x_{30} = 5000$ m mit $t^*_3 = 60$ s $v_3(60\ s) = (-10\ + 20) \frac{m}{s} = 10 \frac{m}{s}$ (2. 133) $s_3(60\ s) = (-\ 3 + 12 + 50)\ 100\ m = 5900$ m (2. 134)

Die Gesamtstrecke nach 360 s ist $s_{ges} = s_3(60\ s) = 5900$ m.

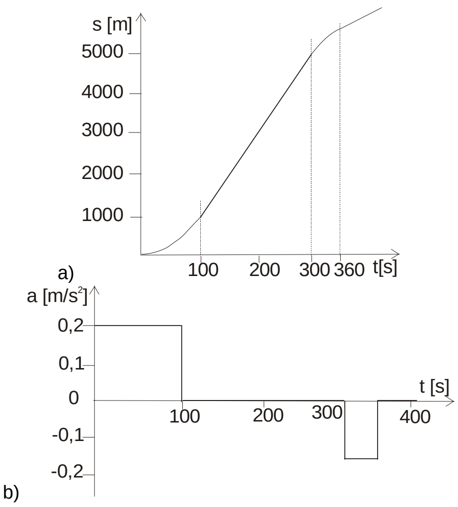


Bild 2. 14 a) Weg s(t); b) Beschleunigung a(t)

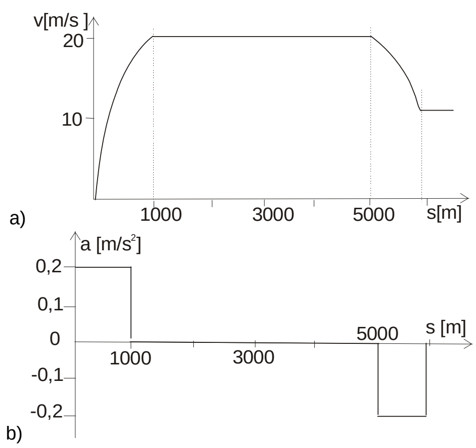


Bild 2. 15 a) Geschwindigkeit v(s); b) Beschleunigung a(s)

Berechnung der Diagrammwerte v(s), a(s) aus den Funktionsverläufen im 1. Bereich mit $a_1 = const.$, $v_1 = a_1 t_1$ und $s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2_1$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 s_1}{a_1}} \quad \Rightarrow \quad v_1(s) = \sqrt{2\, a_1\, s_1}\,, \tag{2. 135}$$

im 2. Bereich mit $a_2 = 0$

$$v_2 = const., \tag{2. 136}$$

im 3. Bereich mit $a_3 = const.$

$$v_3 = a_3 t_3 + v_2 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{v_3 - v_2}{a_3}\,. \tag{2. 137}$$

Graphisches Vorgehen

Aus den a(t)-,v(t)- und s(t)- Diagrammen wird zu gleichen Zeiten a und s, bzw. v und s abgegriffen und a, bzw. v über s aufgetragen.

Aufgabe 2. 3

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Auf der Beschleunigungsspur einer Autobahnauffahrt fährt ein PKW mit der Geschwindigkeit v_1. Auf gleicher Höhe fährt ein LKW mit konstanter Geschwindigkeit v_2.

gegeben: $v_1 = 60 \frac{km}{h}$, $v_2 = 80 \frac{km}{h}$, $l = 200$ m

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung a = const. des Pkws, wenn er am Ende der Beschleunigungsspur (l = 200 m) 20 m vor dem LKW auf die Autobahn überwechseln will.

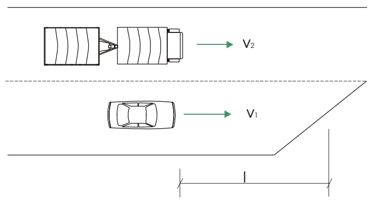


Bild 2. 16 PKW auf der Beschleunigungsspur einer Autobahnauffahrt

Lösung

Die zurückgelegte Strecke der beiden Fahrzeuge am Ende der Beschleunigungsspur ist

$$l_{PKW} = 200\ m, \tag{2. 138}$$

$$l_{LKW} = 200 - 20 = 180\ m. \tag{2. 139}$$

Für beide Fahrzeuge zum Zeitpunkt t = T ist der Weg

$$x_{LKW} = v_2\, t = v_2\, T = l_{LKW} \tag{2. 140}$$

$$x_{PKW} = \frac{1}{2} a\, t^2 + v_1\, t = \frac{1}{2} a\, T^2 + v_1\, T = l_{PKW}. \tag{2. 141}$$

Daraus folgt

$$T = \frac{l_{LKW}}{v_2} = \frac{180\ 3600}{80\ 1000} = 8.1\ s \tag{2. 142}$$

in (2. 141) eingesetzt

$$l_{PKW} = \frac{1}{2} a \left(\frac{l_{LKW}}{v_2}\right)^2 + v_1 \frac{l_{LKW}}{v_2} \tag{2. 143}$$

Daraus folgt die Beschleunigung

$$a = \frac{2 v_2^{\,2} \left\{ l_{PKW} - \frac{v_1}{v_2} l_{LKW} \right\}}{l_{LKW}^{\,2}} = \frac{2\ 80^2 \frac{1000^2}{3600^2} \left\{ 200 - \frac{60}{80} 180 \right\}}{180^2} \frac{m}{s^2} = 1.98 \frac{m}{s^2} \tag{2. 144}$$

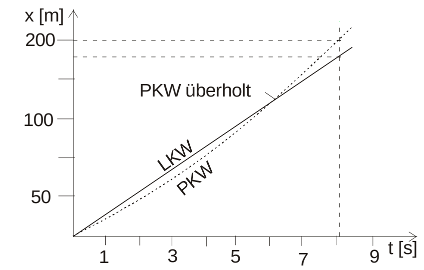


Bild 2. 17 Weg- Zeit- Diagramm des Überholungsvorgangs

Aufgabe 2. 4

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Auf einer horizontalen Ebene fährt ein Wagen mit der konstanten Geschwindigkeit v_{W0}. Wenn der Wagen in A ist, wird in der Höhe h über B ein Körper abgeworfen.

gegeben: l, h, v_{W0}

gesucht: Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit v_{K0} des Körpers, wenn er in die Mitte des Wagens fallen soll.

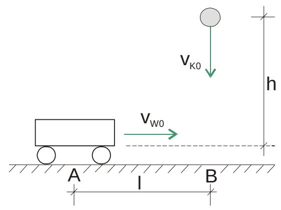


Bild 2. 18 Wagen auf einer horizontalen Ebene

Lösung

Die Kinematik des Wagens ist mit v_W =const. folgt aus $a_W = 0$ und mit dem Anfangsweg $x_{W0} = 0$

$$v_W = v_{W0} = \text{const.},\ x_W = v_{W0}\, t + x_{W0}. \qquad (2.\ 145)$$

Die Kinematik des Körpers ist mit der Erdbeschleunigung $a_K = g$ und mit dem Anfangsweg mit $x_{K0} = 0$

$$v_K = g\, t + v_{K0},\ x_K = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{K0}\, t. \qquad (2.\ 146)$$

Die Bedingung ist, damit der Wagen und der Körper zur selben Zeit T am selben Ort B sind, lautet für den Wagen

$$x_W(T) = l \qquad (2.\ 147)$$

und für den Körper

$$x_K(T) = h. \qquad (2.\ 148)$$

Daraus folgt die Zeit T

$$x_W(T) = l = v_{W0}\, T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{l}{v_{W0}} \qquad (2.\ 149)$$

In (2. 146)

$$x_K(T) = h = \frac{1}{2}\, g\, T^2 + v_{K0}\, T. \qquad (2.\ 150)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers ist

$$v_{K0} = \frac{h}{T} - \frac{1}{2}\, g\, T = \frac{h}{l}\, v_{W0} - \frac{1}{2}\, g\, \frac{l}{v_{W0}} = v_{W0}\, \frac{h}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\, \frac{g l^2}{h v_{W0}^2}\right). \qquad (2.\ 151)$$

Falldiskussion

1. Wenn beide Körper sich auf einer Ebene bewegen, wird die Erdbeschleunigung g = 0. Es liegen zwei gleichförmige Bewegungen vor, damit ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers

$$v_{K0} = v_{W0}\, \frac{h}{l}. \qquad (2.\ 151)$$

2. Wenn die Länge l klein gegenüber den anderen Größen ist, muss $v_{K0} > 0$ immer positiv sein.

3. Wenn die Länge l groß gegenüber den anderen Größen ist, muss $v_{K0} < 0$ negativ werden. Das heißt, der Körper muß erst nach oben geworfen werden.

4. Wenn der Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit ($v_{K0} = 0$) abgeworfen wird, kann man die Länge l berechnen

$$l = v_{W0}\sqrt{\frac{2g}{h}}. \qquad (2.\ 152)$$

Aufgabe 2. 5

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Die Besatzung eines Freiballons, der mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 steigt, will die augenblickliche Höhe h_0 bestimmen. Zu diesem Zweck läßt sie einen Messkörper aus der Gondel fallen, der beim Aufschlag auf der Erdoberfläche explodiert. Nach der Zeit t_0 nimmt die Besatzung die Detonation wahr.

gegeben: $v_0 = 5\ \frac{m}{s}$, Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, $t_0 = 10$ s, Schallgeschwindigkeit $c = 333\ \frac{m}{s}$

gesucht: Bestimmung der Höhe h_0 und Darstellung in einem Weg- Zeit- Schaubild

Lösung

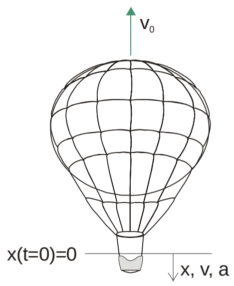


Bild 2. 19 Vorzeichenfestlegung

Es gilt mit der Fallzeit des Messkörpers t_K und der Schallzeit t_c

$$t_0 = t_K + t_c \qquad (2.\ 153)$$

Die Kinematik des Messkörpers erfolgt über die Integration

$$a = g = \text{const.},\ v = g\, t + C_1,\ x = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + C_1\, t + C_2 \qquad (2.\ 154)$$

Die Konstanten lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen:

$$v(t = 0) = -v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -v_0 \qquad (2.\ 155)$$

$$x(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \qquad (2.\ 156)$$

Für die Bestimmung der Höhe in (2. 154) für den Messkörper mit $t = t_K$

$$h_0 = \frac{1}{2}\, g\, t_K^2 - v_0\, t_K \qquad (2.\ 157)$$

folgt

$$t_K = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2\frac{h_0}{g}} = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{g h_0}{v_0^2}}\right). \qquad (2.\ 158)$$

Nur die positive Wurzel ist physikalisch sinnvoll (Probe mit v_0!).

Die Berechnung der Schallzeit t_c ergibt

$$t_c = \frac{\text{Schallweg}}{\text{Schallgeschwindigkeit}} = \frac{h_0 + v_0 t_0}{c}. \qquad (2.\ 159)$$

Einsetzen in die Gleichung (2. 153)

$$t_0 = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{g h_0}{v_0^2}}\right) + \frac{h_0 + v_0 t_0}{c} \qquad \Big|: \frac{v_0}{g} \qquad (2.\ 160)$$

$$\frac{t_0 g}{v_0} = 1 + \sqrt{1 + 2\frac{g h_0}{v_0^2}} + \frac{h_0 g}{c v_0} + \frac{t_0 g}{c} \qquad (2.\ 161)$$

mit $\Delta v = (c - v_0)$ folgt

$$\frac{t_0 g}{c v_0}\,\Delta v - 1 - \frac{h_0 g}{c v_0} = \sqrt{1 + 2\frac{g h_0}{v_0^2}} \qquad |\ \text{quadr.}\ |\ \frac{c^2 v_0}{g^2} \qquad (2.\ 162)$$

$$h_0^2 - 2\, h_0\, \frac{\Delta v}{g}\,(t_0\, g + c) + t_0\, \Delta v\left(t_0\, \Delta v - 2\,\frac{c\, v_0}{g}\right) = 0 \qquad (2.\ 163)$$

$$h_{0\,1,\,2} = \frac{\Delta v}{g}\,(t_0\, g + c) \pm \sqrt{\frac{\Delta v^2}{g^2}(c + t_0\, g)^2 - t_0\, \Delta v\, (t_0\, \Delta v - 2\,\frac{c v_0}{g})} \qquad (2.\,164)$$

$$h_{0\,1,\,2} = \frac{\Delta v}{g}\,[t_0\, g + c\,(1 \pm \sqrt{1 + 2 t_0 g \frac{1}{\Delta v}}\,)]. \qquad (2.\,165)$$

Mit Zahlenwerten ergibt sich die Höhe zu

$$h_{0\,1,\,2} = 33{,}13\text{ s }[98{,}1\,\frac{m}{s} + 333\,\frac{m}{s}\,(1 \pm \sqrt{1{,}604}\,)] \qquad (2.\,166)$$

$$h_{0\,1} = 33{,}13\text{ s }[98{,}1\,\frac{m}{s} + 754{,}7\,\frac{m}{s}\,] = 28253{,}5\text{ m} \approx 28\text{ km} \qquad (2.\,167)$$

Das ist keine sinnvolle Lösung, da die Erdatmosphäre ca. 17 km hoch ist. Damit ist die gesuchte Höhe

$$h_{0\,2} = 33{,}13\text{ s }[98{,}1\,\frac{m}{s} - 87{,}9\,\frac{m}{s}\,] = 337{,}9\text{ m}. \qquad (2.\,168)$$

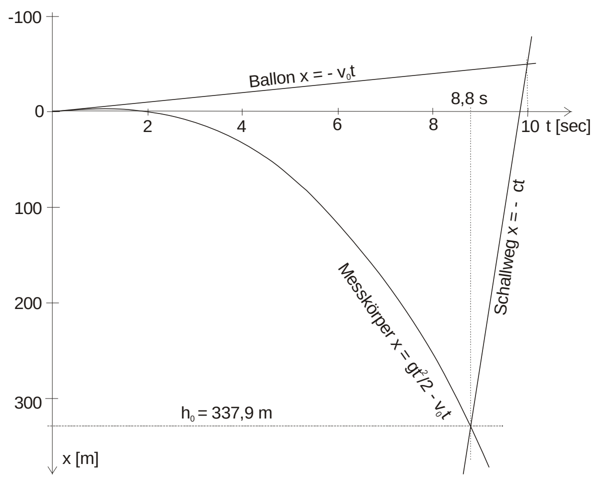


Bild 2. 20 Weg- Zeit- Verläufe

Aufgabe 2. 6

- Geradlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im kartesischen Koordinaten

Ein LKW hebt über ein dehnstarres Seil (Länge 2 H), das über eine masselose, kleine Rolle geführt wird, ein Gewicht an. Der LKW fährt aus dem Stand mit konstanter Beschleunigung a_0 los. Zum Zeitpunkt t = 0 fallen die Punkte A, B und C zusammen.

gegeben: H, die Länge des Seils soll so lang sein, dass sie den Bewegungsablauf nicht beeinflusst, a_0

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit $v_G(t)$ und der Beschleunigung $a_G(t)$ des Gewichts mit der Kontrolle durch eine Grenzbetrachtung. Wie groß ist $v_G(y)$, bzw. $a_G(y)$?

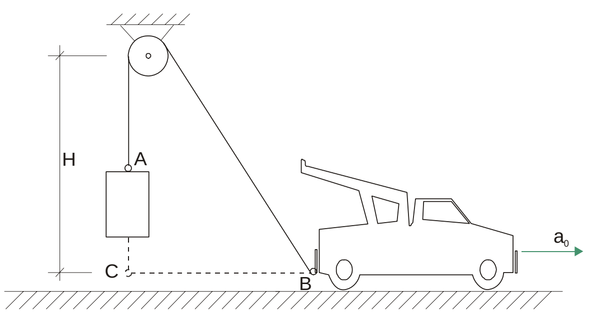


Bild 2. 21 LKW hebt über ein dehnstarres Seil ein Gewicht an

Lösung

Die Beschleunigung des LKWs ist

$$a_{LKW}(t) = a_0, \qquad (2.\,169)$$

die Geschwindigkeit mit der Anfangsbedingung $v_{LKW}(0) = 0$

$$v_{LKW}(t) = a_0\, t + v_0 = a_0\, t \qquad (2.\,170)$$

und der Weg mit der Anfangsbedingung $x_{LKW}(0) = 0$

$$x_{LKW}(t) = \frac{1}{2}\,a_0\, t^2 + x_0 = \frac{1}{2}\,a_0\, t^2 \qquad (2.\,171)$$

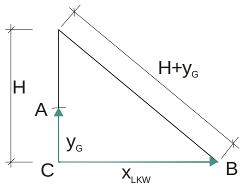


Bild 2. 22 Geometrie

Nach PYTHAGORAS (Bild 2. 22) gilt

$$(H + y_G)^2 = H^2 + x_{LKW}{}^2 \qquad (2.\,172)$$

Daraus folgt

$$y_G{}^2 + 2\, y_G\, H - x_{LKW}{}^2 = 0 \;\Rightarrow\; y_{G1,2} = -\,H \pm \sqrt{H^2 + x_{LKW}{}^2}\,. \qquad (2.\,173)$$

Das negative Vorzeichen ist nicht sinnvoll, der Weg des Gewichts ist

$$y_G = -\,H + \left|\,\sqrt{H^2 + x_{LKW}{}^2}\,\right|. \qquad (2.\,174)$$

Zur Zeit t hat der LKW die Strecke $x_{LKW}(t) = \frac{1}{2}\,a_0\,t^2$ und das Gewicht die Strecke $y = y_G(t)$ zurückgelegt.
Der Weg des Gewichts ist also (2. 174), damit ergibt sich als Geschwindigkeit

$$v_G(t) = \frac{dy_G}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{a_0^2 t^3}{\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4}} \qquad (2.\,175)$$

und als Beschleunigung

$$a_G(t) = \frac{d^2 y_G}{dt^2} = \frac{1}{2}\,[\frac{3a_0^2 t^2}{\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4}} - \frac{\frac{1}{2}a_0^4 t^6}{\sqrt{(H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4)^3}}\,]$$

$$= \frac{a_0^2 t^2}{\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4}}\,[\frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}a_0^2 t^4}{H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4}\,] = \frac{a_0^2 t^2}{\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4}}\;\frac{6H^2 + \frac{1}{2}a_0^2 t^4}{4(H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4)}$$

$$= \frac{a_0^2 t^2 (12H^2 + a_0^2 t^4)}{\sqrt{(4H^2 + a_0^2 t^4)^3}}\,. \qquad (2.\,176)$$

Die Kontrolle als Grenzbetrachtung für den Wert $t \to \infty$ ergibt

$$v_G \lim_{t \to \infty} = \frac{1}{2}\,\frac{a_0^2 t^3}{\frac{1}{2}a_0 t^2} = a_0\, t \qquad (2.\,177)$$

und

$$a_G \lim_{t \to \infty} = \frac{a_0^2 t^2 a_0^2 t^4}{a_0^2 t^4 a_0 t^2} = a_0. \qquad (2.\,178)$$

Die Berechnung von $v_G(y)$, bzw. $a_G(y)$ folgt mit (2. 174), (2. 175) und(2. 176) nach Eliminination von t

$$y + H = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4} \qquad |\text{quadr.} \quad (2.\,179)$$

$$y^2 + 2\, y\, H + H^2 = H^2 + \frac{1}{4}a_0^2 t^4\,. \qquad (2.\,180)$$

Daraus folgt

$$t^4 = 4\,\frac{y^2}{a_0^2} + 8\,\frac{yH}{a_0^2} = 4\,\frac{y^2}{a_0^2}(1 + 2\,\frac{H}{y}) \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt[4]{\frac{4y^2}{a_0^2}\,(1 + 2\frac{H}{y}\,)} \qquad (2.\,181)$$

in $v_G(t)$ eingesetzt

$$v_G(y) = \frac{a_0^2 \sqrt[4]{\left(\frac{4y^2}{a_0^2}\left(1+2\frac{H}{y}\right)\right)^3}}{2\sqrt{\frac{4y^2}{a_0^2}\left(H^2+\frac{1}{4}a_0^2\right)\left(1+2\frac{H}{y}\right)}} = \frac{a_0^3 \sqrt[4]{\left(\frac{4y^2}{a_0^2}\left(1+2\frac{H}{y}\right)\right)^3}}{4y\sqrt{H^2+\frac{1}{4}a_0^2+2\frac{H^3}{y}+\frac{1}{2}a_0^2\frac{H}{y}}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{a_0^{12}\frac{64y^6}{a_0^6}\left(1+2\frac{H}{y}\right)^3}}{\sqrt{4H^2y(y+2h)+a_0^2y(y+2H)}} = \frac{\sqrt[4]{64y^6a_0^6\left(1+6\frac{H}{y}+12\frac{H^2}{y^2}+8\frac{H^3}{y^3}\right)}}{\sqrt{y(4H^2+a_0^2)(y+2H)}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{64y^3a_0^6\left((y+2H)^3\right)}}{\sqrt{y(4H^2+a_0^2)(y+2H)}} \qquad (2.182)$$

und in $a_G(t)$ eingesetzt

$$a_G(y) = \frac{a_0^2t^2(12H^2+a_0^2t^4)}{\sqrt{(4H^2+a_0^2t^4)^3}} = \frac{2ya_0\sqrt{\left(1+2\frac{H}{y}\right)\left(12H^2+a_0^2\left(\frac{4y^2}{a_0^2}\left(1+2\frac{H}{y}\right)\right)\right)}}{\sqrt{\left(4H^2+a_0^2\left(\frac{4y^2}{a_0^2}\left(1+2\frac{H}{y}\right)\right)\right)^3}}$$

$$= \frac{4a_0\sqrt{(y+2H)\left(3H^2y+y^3+2y^2H\right)}}{8(H+y)^3} = \frac{a_0\sqrt{y(y+2H)\left(3H^2+y^2+2yH\right)}}{2(H+y)^3}. \qquad (2.183)$$

Aufgabe 2. 7

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung in Polarkoordinaten

Ein Punkt bewegt sich auf einer ebenen Kurve $r(\varphi)$. Auf ihr dreht er sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi = \omega$. Die Geschwindigkeit des Punktes in radialer Richtung ist v_0 = const.

gegeben: $r(\varphi)$, $\dot\varphi = \omega$; v_0 = const.

gesucht: Bestimmung der Bahngeschwindigkeit v(t) des Punktes P, der Radial- $a_r(t)$ und Zirkularbeschleunigung $a_\varphi(t)$ von P, der Gleichung der Kurve $r(\varphi)$ mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = 0$ und $r(t = 0) = 0$.

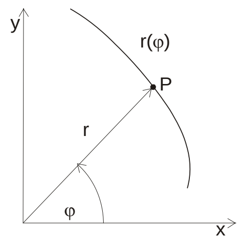


Bild 2. 23 Punkt auf einer ebenen Kurve r

Lösung

Die Bahngeschwindigkeit v ist

$$v = |\vec v| = \sqrt{\dot r^2 + (r\omega)^2}\,, \qquad (2.87)$$

mit $\dot r = v_0$ folgt nach Integration für den Ortsvektor

$$r = v_0\, t + C_1 \qquad (2.184)$$

mit der Anfangsbedingung r(t=0) = 0 folgt

$$C_1 = 0. \qquad (2.185)$$

Daraus folgt die Bahngeschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_0^2 + (v_0 t\omega)^2} = v_0\sqrt{1+t^2\omega^2} \qquad (2.186)$$

Die Beschleunigungen des Punktes P sind

$$\vec a = a_r\,\vec e_r + a_\varphi\,\vec e_\varphi\,, \qquad (2.88)$$

mit der Radialbeschleunigung mit $\dot r = v_0$ = const. und $\ddot r = 0$

$$a_r = \ddot r - r\,\omega^2 = -\,\omega^2\, v_0\, t \qquad (2.187)$$

und der Zirkularbeschleunigung mit $\dot\varphi = \omega$ = const. und $\dot\omega = 0$

$$a_\varphi = 2\dot r\,\omega + r\,\dot\omega = 2\,\omega\, v_0 \qquad (2.188)$$

Die Bahnkurve für Punkt P ergibt sich mit

$$\varphi = \omega\, t + C_2 \qquad (2.189)$$

und mit der Anfangsbedingung

$$\varphi(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \qquad (2.190)$$

ergibt sich nach Elimination von t die ARCHIMEDsche Spirale

$$r = \frac{v_0}{\omega}\,\varphi. \qquad (2.191)$$

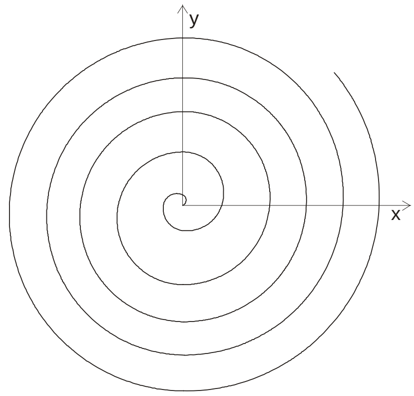


Bild 2. 24 Archimedische Spirale

Aufgabe 2. 8

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung in Polarkoordinaten

In einer Ebene bewegt sich ein Punkt P mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v_0 längs der Bahnkurve $r(\varphi) = b\,e^{\varphi}$. Zum Zeitpunkt t = 0 sei r = b.

gegeben: $r(\varphi) = b\,e^{\varphi}$, r(0) = b

gesucht: Man ermittle die Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ in Abhängigkeit von φ und in Abhängigkeit von t sowie die Radialgeschwindigkeit $\dot r$.

Lösung

Zur Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ (t) wird die Bahnkurve mit der Anfangsbedingung r(t=0) = b bestimmt

$$r(\varphi) = b\,e^{\varphi}\,. \qquad (2.192)$$

mit der konstanten Bahngeschwindigkeit

$$|v| = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2} = v_0 \qquad (2.193)$$

und dem Ortsvektor

$$\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = b\,e^{\varphi}\,\dot\varphi \qquad (2.194)$$

folgt die Bahngeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{b^2e^{2\varphi}\dot\varphi^2 + b^2e^{2\varphi}\dot\varphi^2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \pm\, b\,e^{\varphi}\dot\varphi\,\sqrt{2}\,. \qquad (2.195)$$

Beide Ergebnisse der Wurzel sind sinnvoll. Daraus folgt die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Winkel φ

$$\dot\varphi\,(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2\,b\,e^{\varphi}} \qquad (2.196)$$

Mit Hilfe der Trennung der Veränderlichen folgt

$$e^{\varphi}\,d\varphi = \frac{v_0\sqrt{2}}{2\,b}\,dt\,, \qquad (2.197)$$

$$e^{\bar\varphi}\Big|_0^{\varphi} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2\,b}\,\bar t\,\Big|_0^{t}\,, \qquad (2.198)$$

$$e^{\varphi} - 1 = \frac{v_0\sqrt{2}}{2\,b}\,t, \qquad (2.199)$$

$$e^{\varphi} = 1 + \frac{v_0\sqrt{2}}{2\,b}\,t\,, \qquad (2.200)$$

eingesetzt in $\dot\varphi(\varphi)$ folgt die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von t

$$\dot\varphi\,(t) = \frac{v_0\sqrt{2}}{2\,b}\,\frac{1}{1+\frac{v_0\sqrt{2}}{2\,b}\,t} = \frac{1}{\left(t+\sqrt{2}\,\frac{b}{v_0}\right)} \qquad (2.\,201)$$

Die Berechnung der Radialgeschwindigkeit ergibt

$$\dot r = b\,e^{\varphi}\,\dot\varphi = \frac{\sqrt{2}\,v_0}{2} = \text{const.} \qquad (2.\,202)$$

Aufgabe 2. 9

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im Polarkoordinaten

Ein Punkt P bewegt sich im Polarkoordinatensystem r, φ.

gegeben: Radialgeschwindigkeit $\dot r$ = c = const., Radialbeschleunigung a_r = - a = const., Anfangsbedingungen r(0) = 0, $\varphi(0) = 0$

gesucht: Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ (t), der Bahnkurve r(φ) und der Zirkularbeschleunigung $a_\varphi(t)$

Lösung

Aus der Radialbeschleunigung

$$a_r = -\,a = \ddot r - r\,\dot\varphi^2 \qquad (2.\,203)$$

mit $\dot r$ = const. folgt $\ddot r$ = 0 in (2. 203)

$$-\,a = -\,r\,\dot\varphi^2 \qquad (2.\,204)$$

Daraus folgt Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ (t)

$$\dot\varphi = \sqrt{\frac{a}{r}}\,. \qquad (2.\,205)$$

Aus der Integration der radialen Geschwindigkeit mit der Anfangsbedingung $r(t{=}0) = r_0 = 0$ folgt

$$r(t) = c\,t + r_0 = c\,t \qquad (2.\,206)$$

$$\dot\varphi(t) = \sqrt{\frac{a}{c\,t}} \qquad (2.\,207)$$

Die Bahnkurve r(φ) ergibt aus (2.206) und der Winkelfunktion mit der Anfangsbedingung $\varphi(t{=}0) = \varphi_0 = 0$

$$\varphi(t) = \int_0^t \dot\varphi(\bar t)\,d\bar t + \varphi_0 \qquad (2.\,208)$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{a}{c}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\bar t}}\,d\bar t = \sqrt{\frac{a}{c}}\;2\,\sqrt{t} = 2\,\sqrt{\frac{a\,t}{c}} \qquad (2.\,209)$$

Nach Elimination von t folgt

$$\varphi^2 = 4\,\frac{a\,t}{c} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\varphi^2\,c}{4\,a} \qquad (2.\,210)$$

die Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{1}{4}\,\frac{c^2}{a}\,\varphi^2. \qquad (2.\,211)$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit (2. 207), der Radialgeschwindigkeit $\dot r$ = c, der Bahnkurve (2. 206) und der Winkelbeschleunigung

$$\ddot\varphi(t) = \frac{d\dot\varphi}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{\frac{a}{c\,t}}\right)}{dt} = \sqrt{\frac{a}{c}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{t}} = -\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c\,t^3}} \qquad (2.\,212)$$

folgt die Zirkularbeschleunigung $a_\varphi(t)$

$$a_\varphi(t) = 2\,\dot r\,\dot\varphi + r\,\ddot\varphi = 2\,c\sqrt{\frac{a}{c\,t}} - c\,t\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c\,t^3}} = 2\sqrt{\frac{c^2\,a}{c\,t}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2\,t^2\,a}{c\,t^3}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{c\,a}{t}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c\,a}{t}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{c\,a}{t}}\,. \qquad (2.\,213)$$

Aufgabe 2. 10

- Krummlinige Bewegung des Massenpunktes
- Bewegung im Bogenkoordinaten

Ein Punkt P bewegt sich entlang einer Kreisbahn. Sein Weg, gerechnet vom festen Punkt A aus, beträgt s.

gegeben: Radius r, Weg $s = c\,t^2$

gesucht: Bestimmung der x- und y- Komponente der Geschwindigkeit v(t), die Geschwindigkeit v_B in Punkt B und die Tangential- und Normalbeschleunigung an einer Stelle s.

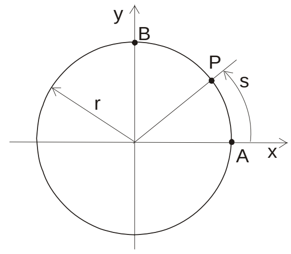


Bild 2. 25 Punkt P auf einer Kreisbahn

Lösung

Aus dem Weg

$$s = c\,t^2 \qquad (2.\,214)$$

und der Bahngeschwindigkeit

$$v = \dot s = 2\,c\,t \qquad (2.\,215)$$

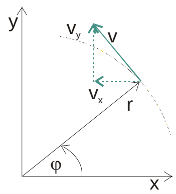


Bild 2. 26 Geschwindigkeitskomponenten

folgen die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y- Richtung

$$v_x = -\,v\,\sin\varphi, \qquad (2.\,216)$$

$$v_y = v\,\cos\varphi. \qquad (2.\,217)$$

Der Winkel ergibt sich als Bogenlänge durch den Radius

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{c\,t^2}{r} \qquad (2.\,218)$$

Damit folgen die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y- Richtung in Abhängigkeit von r und t

$$v_x = -\,2\,c\,t\,\sin\frac{c\,t^2}{r}\,, \qquad (2.\,219)$$

$$v_y = 2\,c\,t\,\cos\frac{c\,t^2}{r}\,. \qquad (2.\,220)$$

In Punkt B ist die Geschwindigkeitskomponente tangential, das heißt in y- Richtung Null

$$v_y = 2\,c\,t\,\cos\frac{c\,t^2}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{c\,t^2}{r} = 0. \qquad (2.\,221)$$

Aus (2. 218) bei $t = t_B$ folgt

$$\varphi_B = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; t_B^{\,2} = \frac{r\,\pi}{2\,c} \qquad (2.\,222)$$

oder die Bogenlänge in B

$$s_B = s(B) = \frac{2\,\pi\,r}{4} = \frac{1}{2}\,\pi\,r \qquad \Rightarrow \qquad t_B = t(B) = \sqrt{\frac{s_B}{c}} = \sqrt{\frac{r\,\pi}{2\,c}}\,. \qquad (2.\,223)$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit v_B

$$v_B = v(B) = 2\,c\,\sqrt{\frac{r\,\pi}{2\,c}} = \sqrt{2\,\pi\,r\,c}\,. \qquad (2.\,224)$$

Die Tangential- und Normalbeschleunigung an einer Stelle s ergeben sich aus der Beschleunigung mit $\dot r = 0$ und $\ddot r = 0$ (Kreisbahn)

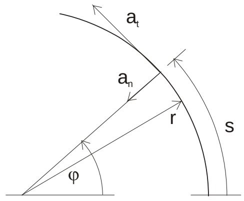


Bild 2. 27 Bogenkoordinaten

$$\vec a = \left[\,r\,\omega^2\right]\vec e_n + \left[r\,\dot\omega\,\right]\vec e_t\,. \qquad (2.\,225)$$

Mit der Winkelfunktion (2. 218), der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot\varphi = \frac{\dot s}{r} = \frac{2\,c\,t}{r} \qquad (2.\,226)$$

und der Winkelbeschleunigung

$$\ddot\varphi = \frac{\ddot s}{r} = \frac{2\,c}{r} \qquad (2.\,227)$$

folgt die Radialbeschleunigung

$$a_t = r\,\ddot\varphi = 2c \qquad (2.\,228)$$

und die Normalbeschleunigung zum Kreismittelpunkt hin gerichtet

$$a_n = r\,\dot\varphi^2 = \frac{4\,c^2\,t^2}{r} = \frac{4\,c\,s}{r}\,. \qquad (2.\,229)$$

3 Kinetik des Massenpunktes

Aufgabe 3. 1

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen in x- und y- Richtung
- Schwingungsdifferentialgleichung mit Lösungen

Auf den Massenpunkt m wirkt eine Kraft F in Richtung auf das Zentrum Z die proportional zum Abstand r ist. Zur Zeit t = 0 befindet sich die Masse im Punkt P_0 und hat dort die Geschwindigkeitskomponenten $v_x = v_0$ und $v_y = 0$

gegeben: r_0, F = k r, v_0, α

gesucht: Bestimmung der Bahnkurve x(t) und y(t), auf der sich der Massenpunkt bewegt.

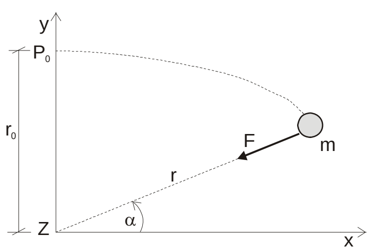


Bild 3. 19 Massenpunkt m mit einer Kraft F in Richtung Z

Lösung

NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$\rightarrow:\quad m\,\ddot x = -\,F\cos\alpha \qquad (3.\,127)$$

$$\uparrow:\quad m\,\ddot y = -\,F\sin\alpha \qquad (3.\,128)$$

mit der proportionalen Kraft

$$F = k \qquad (3.\,129)$$

Geometrie

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad (3.\,130)$$

(3. 129) und (3. 130) in (3. 127)und (3. 128)

$$m\,\ddot x = -\,k\,r\,\frac{x}{r} = -\,k\,x \quad\Rightarrow\quad m\,\ddot x + k\,x = 0 \qquad (3.\,131)$$

$$m\,\ddot y = -\,k\,r\,\frac{y}{r} = -\,k\,y \quad\Rightarrow\quad m\,\ddot y + k\,y = 0 \qquad (3.\,132)$$

mit $k^* = \frac{k}{m}$ folgen die Schwingungsdifferentialgleichungen

$$\ddot x + k^*\,x = 0 \qquad (3.\,133)$$

$$\ddot y + k^*\,y = 0 \qquad (3.\,134)$$

Mit dem allgemeinen Lösungsansatz folgt für homogene Schwingungsdifferentialgleichungen für den Weg in x- und y- Richtung

$$x = A\sin\sqrt{k^*}\,t + B\cos\sqrt{k^*}\,t\,, \qquad (3.\,135)$$

$$y = C\sin\sqrt{k^*}\,t + D\cos\sqrt{k^*}\,t \qquad (3.\,136)$$

mit den Geschwindigkeiten in x- und y- Richtung aus den Ableitungen

$$\dot x = \sqrt{k^*}\,(A\cos\sqrt{k^*}\,t - B\sin\sqrt{k^*}\,t\,), \qquad (3.\,137)$$

$$\dot y = \sqrt{k^*}\,(C\cos\sqrt{k^*}\,t - D\sin\sqrt{k^*}\,t\,) \qquad (3.\,138)$$

Mit den Anfangsbedingungen zur Bestimmung der Konstanten A, B, C und D

$$x(t{=}0) = 0 \quad\Rightarrow\quad B = 0, \qquad (3.\,138)$$

$$\dot x\,(t{=}0) = v_0 \quad\Rightarrow\quad A = \frac{v_0}{\sqrt{k^*}}\,, \qquad (3.\,139)$$

$$y(t{=}0) = r_0, \quad\Rightarrow\quad D = r_0 \qquad (3.\,140)$$

$$\dot y\,(t{=}0) = 0 \quad\Rightarrow\quad C = 0 \qquad (3.\,141)$$

lassen sich die noch nicht definierten Konstanten bestimmen

Die Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichungen erhält man durch Einsetzen der Konstanten in die Lösungsansätze (k^* resubstituiert)

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\,, \qquad (3.\,142)$$

$$y = r_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad (3.\,143)$$

Die Bahnkurve durch Eliminieren von t entspricht damit der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{v_0^{\,2}\,\frac{m}{k}} + \frac{y^2}{r_0^{\,2}} = 1 = \sin^2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \cos^2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad (3.\,144)$$

Aufgabe 3. 2

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen in x- und y- Richtung und auf einer Kreisbahn
- Schiefe Ebene mit Reibung
- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Berechnung des Normaldrucks

Eine Masse m wird ohne Anfangsgeschwindigkeit in P_0 losgelassen. Sie bewegt sich unter Einwirkung der Schwerkraft zunächst auf einer rauhen, schiefen Ebene (Reibungskoeffizient μ, Neigung β, Länge l) und anschließend auf einer glatten Kreisbahn (Radius r). Die schiefe Ebene schließt im P_1 tangential an die Kreisbahn an.

gegeben: m, μ, β, l, r

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit der Masse in P_3, der Komponenten des Beschleunigungsvektors im P_2 und der Normalkraft N zwischen Masse und Bahn im P_2

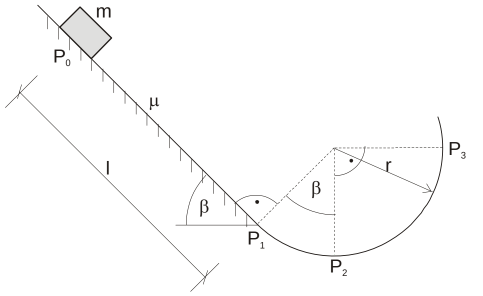


Bild 3. 20 Masse m auf einer rauhen, schiefen Ebene mit anschließender glatter Kreisbahn

Lösung

Berechnung der Geschwindigkeit v_3

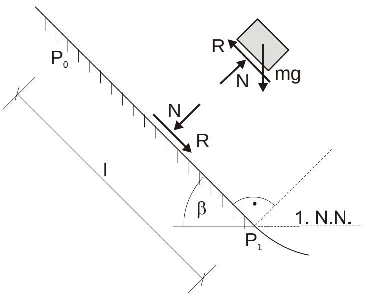


Bild 3. 21 Definition des 1. Nullniveaus und Schnittbild

Berechnung der Geschwindigkeit v_1 mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes mit der Normalkraft

$$N = m\,g\cos\beta \qquad (3.145)$$

und dem Reibungsgesetz

$$R = \mu N \qquad (3.146)$$

$$m\,g\,l\sin\beta = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + m\,g\,\mu\,l\cos\beta \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gl(\sin\beta - \mu\cos\beta)} \qquad (3.147)$$

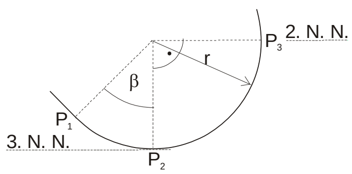


Bild 3. 22 Definition des 2. und 3. Nullniveaus

Energiesatz

$$-m\,g\,r\cos\beta + \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_3^2$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{2g(-r\cos\beta + l(\sin\beta - \mu\cos\beta))} \qquad (3.148)$$

Beschleunigungskomponenten in P_2

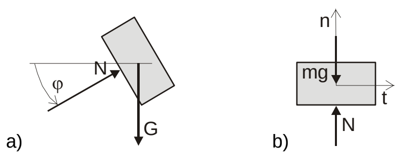


Bild 3. 23 Schnittbild a) allgemeine Lage φ; in P_2 für $\varphi = \beta$

Mit dem Kreis als Sonderfall der gekrümmten Bahn $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ und G = m g ergeben sich die NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$\searrow: \quad m\,(r\,\ddot{\varphi}) = m\,g\cos\varphi \qquad (3.64)$$

Für $\varphi = 90^0$ in Punkt P_2 lautet die NEWTONsche Bewegungsgleichung in tangentialer Richtung

$$\rightarrow: \quad m\,a_t = 0 \Rightarrow \quad a_t = 0 \qquad (3.149)$$

Die Beschleunigung in Richtung der Normalen ist nach (2. 78)

$$a_n = \frac{v_2^2}{r}\,. \qquad (3.150)$$

Mit Energiesatz ergibt sich

$$m\,g\,r\,(1-\cos\beta) + \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(1-\cos\beta)r + v_1^2} = \sqrt{2g[r(1-\cos\beta) + l(\sin\beta - \mu\cos\beta)]} \qquad (3.151)$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 2\,g\,(1-\cos\beta + \frac{l}{r}\,(\sin\beta - \mu\cos\beta)) \qquad (3.152)$$

Normaldruckkraft N in P_2

Die NEWTONsche Bewegungsgleichung in Richtung zum Kreismittelpunkt ergibt

$$\uparrow: \quad m\,a_n = N - m\,g \qquad (3.153)$$

Daraus folgt die Normalkraft

$$N = m\,(a_n + g) = 2\,m\,g\,(-\cos\beta + \frac{l}{r}\,(\sin\beta - \mu\cos\beta)) + 3\,m\,g \qquad (3.154)$$

Aufgabe 3. 3

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf einer Kreisbahn
- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Unterschied einer geführten Bewegung und einer mit einem Drehpunkt verbundenen Masse

Ein Massenpunkt m gleitet (Bild 3. 24 a) auf einer Kreisbahn (Radius l) reibungsfrei, bzw. (Bild 3. 24 b) ist durch eine starre, masselose Stange (Länge l) mit O verbunden.

gegeben: m, l, $\beta = 60^0$

gesucht: Bestimmung der kleinsten Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Masse m, damit sie von der Anfangslage A die Lage B erreicht.

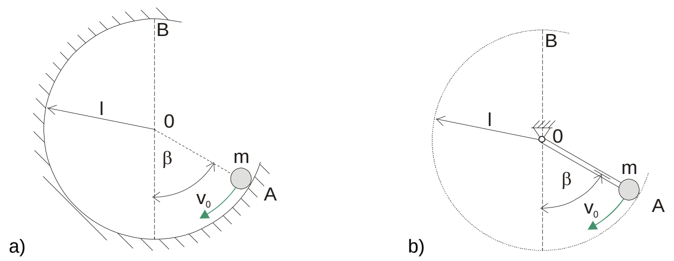


Bild 3. 24 Geführter Massenpunkt m a) auf einer Kreisbahn; b) durch eine starre, masselose Stange mit O verbunden

Lösung

a) reibungsfreies Gleiten auf einer Kreisbahn

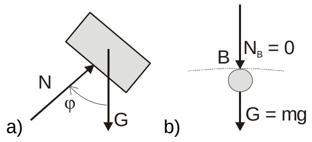


Bild 3. 25 Schnittbild a) allgemeine Lage φ; b) in B

$\nearrow$: $\quad m\, a_n = N - mg \cos\varphi$ (3. 155)

für $\varphi = 180^0$ in B folgt

Bedingung in Punkt B:

Die Masse verläßt die Bahn, wenn die Normalkraft

$N_B = 0.$ (3. 156)

$\uparrow$: $\quad m\, a_n = m \dfrac{v_B^2}{l} = m\, g$

$\Rightarrow \quad v_B^2 = g\, l$ (3. 157)

Energiesatz:

$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = m\, g\, h + \frac{1}{2}\, m\, v_B^2$ (3. 158)

mit $h = l + l \cos 60^0 = \frac{3}{2}\, l$ folgt

$v_A = \sqrt{4gl} = v_0$ (3. 159)

b) starre, masselose Stange

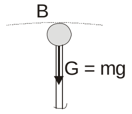


Bild 3. 26 Schnittbild

Bedingung in Punkt B:

Kinetische Energie ist Null, daraus folgt

$v_B = 0.$ (3. 160)

Energiesatz:

$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = m\, g\, h$ (3. 161)

$v_A = \sqrt{3gl} = v_0$ (3. 162)

Aufgabe 3. 4

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf einer Bahn
- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Rauhe Ebene mit Reibung
- Berechnung der Zeit t zum Durchfahren einer Strecke

Im Punkt A auf der in Bild 3. 27 skizzierten Bahn liegt ein Massenpunkt m in Ruhe. Er wird losgelassen und gleitet längs der glatten gekrümmten Bahn bis zum Punkt B. Von B ab ist die Bahn horizontal und rau.

gegeben: h, l, m

gesucht: Bestimmung des Reibungskoeffizients μ, wenn der Massenpunkt in C liegen bleiben soll

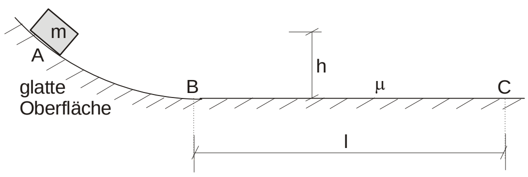


Bild 3. 27 Massenpunkt auf der Bahn ABC

1. Lösungsmöglichkeit mit Energiesatz bei Reibung

Mit dem Nullniveau in B ergibt sich

$T_A + W_A = T_C + W_C - W_{Rges}$ (3. 163)

Die Arbeit der Reibungskraft ist

$W_{Rges} = \int \vec{R}\, d\vec{s} = -\int_B^C R\, ds = -R\, l = -\mu\, N\, l = -\mu\, m\, g\, l.$ (3. 164)

Mit der kinetische Energie in A und in C, mit der Bedingung, dass die Masse in C zur Ruhe kommt $v_C = 0$ folgt

$T_A = 0,\; T_C = m \dfrac{v_1^2}{2} = 0$ (3. 165)

Die potentielle Energie ist in A und C

$W_A = m\, g\, h,\; W_C = 0$ (3. 166)

in (3. 163)folgt

$m\, g\, h = -(-\mu\, m\, g\, l) \quad \Rightarrow \quad \mu = \dfrac{h}{l}$ (3. 167)

2. Lösungsmöglichkeit mit den NEWTONschen Bewegungsgleichungen

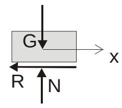


Bild 3. 28 Schnittbild

Reibungsgesetz

$R = \mu\, N$ (3. 168)

NEWTONsche Bewegungsgleichungen:

$\rightarrow$: $\quad m\, \ddot{x} = -R = -\mu\, N$ (3. 169)

In y- Richtung als geführte Bewegung

$\uparrow$: $\quad m\, \ddot{y} = mg - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$ (3. 170)

(3. 166) in (3. 168) und in (3. 165) ergibt

$\ddot{x} = -\mu\, g$ (3. 171)

Nach Integration und den Anfangsbedingungen folgt mit $v_B = \sqrt{2\,g\,h}$ aus Energiesatz zwischen Punkt A und Punkt B

$\dot{x} = -\mu\, g\, t + v_B = -\mu\, g\, t + \sqrt{2\,g\,h}\,.$ (3. 172)

Nur die Strecke $\overline{BC}$ wird betrachtet

$x = -\frac{1}{2}\, \mu\, g\, t^2 + v_B\, t + x_B = -\frac{1}{2}\, \mu\, g\, t^2 + \sqrt{2\,g\,h}\; t + 0$ (3. 173)

Bedingungen für Punkt C

$x_C = l,\; \dot{x}_C = 0$ (3. 174)

(3. 174) in (3. 172) ergibt die Ankunftszeit in C

$t_C = \dfrac{1}{\mu\, g} \sqrt{2\,g\,h}$ (3. 175)

(3. 175) in (3. 172) eingesetzt ergibt den Weg

$l = -\frac{1}{2}\, \mu\, g\, \dfrac{2\,g\,h}{\mu^2\, g^2} + \dfrac{2\,g\,h}{\mu\, g} \quad \Rightarrow \quad \mu = \dfrac{h}{l}$ (3. 176)

Aufgabe 3. 5

- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf einer Kreisbahn
- Bestimmung der Ruhelage H

Ein Massenpunkt m durchläuft, beginnend in der Ruhelage P_A, die skizzierte Bahn, die aus einer schiefen Ebene mit anschließendem Kreisbogen besteht.

gegeben: m, b, $\beta = 60^0$

gesucht: Bestimmung der Ruhelage H, damit er gerade den Scheitel P_C der Kreisbahn erreicht, der Geschwindigkeit $v(\varphi)$ und der Normalkraft $N(\varphi)$ in einem beliebigen Punkt P_D der Kreisbahn, des Winkels und des Auftreffpunktes des Massenpunktes nach Verlassen der Kreisbahn auf der schiefen Ebene

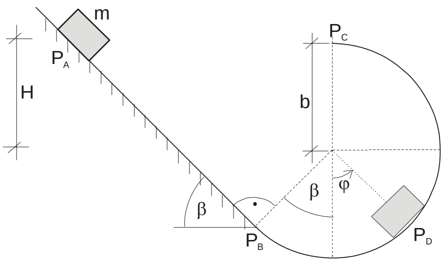


Bild 3. 29 Massenpunkt m auf einer schiefen Ebene mit anschließendem Kreisbogen

Lösung

Geschwindigkeit v(φ) und Normalkraft N(φ) in einem beliebigen Punkt D der Kreisbahn

Der Energiesatz mit dem Nullniveau im Kreisbahnmittelpunkt ergibt

$$T_A + W_A = T_D + W_D \quad \Rightarrow \quad 0 + m\, g\, H = \frac{1}{2} m\, v(\varphi)^2 - m\, g\, b \cos\varphi \qquad (3.\ 177)$$

daraus folgt die Geschwindigkeit

$$v(\varphi)^2 = 2\, g\, (b \cos\varphi + H) \qquad (3.\ 178)$$

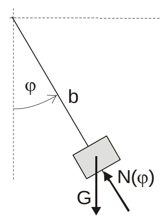


Bild 3. 30 Schnittbild

NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$\nwarrow: \quad m\, a_n = N - G \cos\varphi \qquad (3.\ 179)$$

Die Kinematik ist die Kreisbeschleunigung in Normalenrichtung

$$a_n = \frac{v^2}{b}, \qquad (3.\ 180)$$

mit (3. 178) in (3. 17) aus (3. 179) folgt die Normalkraft

$$m\, \frac{1}{b}\, 2\, g\, (b \cos\varphi + H) = N(\varphi) - m\, g \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad N(\varphi) = m\, g\, (3 \cos\varphi + 2 \frac{H}{b}) \qquad (3.\ 181)$$

Bestimmung der Ruhelage H

Die Bedingung ist, dass der Körper in C gerade abhebt ($\cos\varphi = -1$), das heißt die Normalkraft wird gerade zu Null

$$N(\varphi) = 0 \qquad (3.\ 182)$$

in (3. 181) folgt

$$0 = m\, g\, (-3 + 2 \frac{H}{b}) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{3}{2}\, b \qquad (3.\ 183)$$

Auftreffwinkel und Auftreffpunkt des Massenpunkts

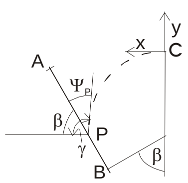


Bild 3. 31 Schiefer Wurf

Der Massepunkt beschreibt die Wurfparabel

$$y = x \tan\alpha - g \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \qquad (3.\ 15)$$

mit der horizontalen Abwurfgeschwindigkeit $\alpha = 0$, $v_0^2 = v^2(\varphi = \pi) = g\, b$ folgt

$$y = -g \frac{x^2}{2\, g\, b} = -\frac{x^2}{2\, b}. \qquad (3.\ 184)$$

Der Auftreffpunkt P ist der Schnittpunkt der Wurfparabel mit der Geraden (AB) mit der Geradengleichung $y = m\, x + c$ (Steigung $m = 60^0 = \sqrt{3}$, Achsenabschnitt $c = -3\, b$)

$$y = \sqrt{3}\, x - 3\, b \qquad (3.\ 185)$$

Schnittpunktsermittlung durch Gleichsetzen

$$\sqrt{3}\, x - 3\, b = -\frac{x^2}{2\, b} \qquad (3.\ 186)$$

Der Schnittpunkt ist

$$x_P = -\sqrt{3}\, b + \sqrt{9\, b^2} = b\, (3 - \sqrt{3}),\ y_P = -3\, b\, (2 - \sqrt{3}), \qquad (3.\ 187)$$

bei dem nur das positive Vorzeichen sinnvoll ist.

Der Auftreffwinkel ist

$$\Psi_P = \gamma - 60° \qquad (3.\ 188)$$

Aus der Ableitung der Wurfparabel an der Stelle $x = x_P$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{b}\, x \Big|_{x = x_P} = -(3 - \sqrt{3}) = \tan\gamma \qquad (3.\ 189)$$

$$\gamma = \arctan(-3 + \sqrt{3}) = 128{,}26^0 \Rightarrow \qquad \Psi_P = 68{,}26° \qquad (3.\ 190)$$

Aufgabe 3. 6

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf eine rauhe schiefe Ebene
- Bestimmung der Zeit t, für das beide Systeme dieselbe Geschwindigkeit haben
- Reibung als bremsende Kraft auf das eine und als antreibende Kraft auf das zweite System

Auf ein schräges Förderband (Winkel α), das sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegt, wird eine Kiste mit dem Gewicht G gesetzt.

gegeben: v_0, G, μ, α

gesucht: Bestimmung der Zeit t_R , zu der die Kiste die gleiche Geschwindigkeit wie das Förderband erreicht, wenn der Reibungskoeffizient μ bekannt ist.

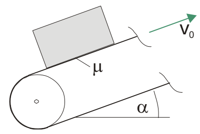


Bild 3. 32 Schräges Förderband mit Kiste

Lösung

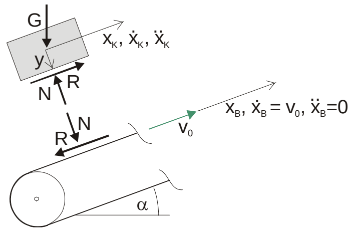


Bild 3. 33 Schnittbild; die Kiste (x_K, $\dot{x}_K$, $\ddot{x}_K$) bewegt sich relativ zum Band (x_B, $\dot{x}_B$, $\ddot{x}_B$) nach unten

Die beiden Systeme haben unterschiedliche Koordinatensysteme.

NEWTONsche Bewegungsgleichungen für die Kiste

$$\nearrow: \quad m\, \ddot{x} = R - G \sin\alpha \qquad (3.\ 191)$$

$$\nwarrow: \quad 0 = N - G \cos\alpha \qquad (3.\ 192)$$

Reibungsgesetz

$$R = \mu\, N \qquad (3.\ 193)$$

in (3. 191) eingesetzt, folgt

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \mu\, g \cos\alpha - g \sin\alpha = g\,(\mu \cos\alpha - \sin\alpha) \qquad (3.\ 194)$$

Nach Integration

$$\int_{v(0)}^{v(t_R)} d\dot{x} = g\,(\mu \cos\alpha - \sin\alpha) \int_0^{t_R} d\tau \qquad (3.\ 195)$$

mit den Anfangsbedingungen und der Bedingung, dass $v_0 = \dot{x}_K\,(t_R)$ ist

$$v(0) = 0 \text{ und } v(t_R) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = g\,(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)\, t_R. \qquad (3.\ 196)$$

Daraus folgt

$$t_R = \frac{v_0}{g\,(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{v_0}{g\,(\mu - \tan\alpha)\cos\alpha} \qquad (3.\ 197)$$

Das Ergebnis ist physikalisch nur sinnvoll, wenn $\mu > \tan\alpha$ und damit $t_R > 0$ ist, sonst rutscht die Kiste sofort nach unten weg.

Zahlenbeispiel für Winkel $\alpha \neq 0$

$$v_0 = 3{,}6\ \frac{m}{s},\ \mu = 0{,}3,\ \alpha = 10^0,\ t_R = \frac{3{,}6}{9{,}81(0{,}3\ - 0{,}17632)\, 0{,}9848} \approx 3\ s \qquad (3.\ 198)$$

Auf einem horizontalen Förderband mit $\alpha = 0^0$ ergibt sich

$$t_R = \frac{v_0}{g\,\mu} = 1{,}2\ s \qquad (3.\ 199)$$

Grenzwert α_{gr}, an dem die Kiste immer rutscht

$$\mu = 0{,}3 \geq \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_{gr} = 16{,}7^0 \qquad (3.\ 200)$$

Wenn der Winkel des Förderbands steiler als $\alpha_{gr} = 16{,}7^0$, rutscht die Kiste immer.

Aufgabe 3. 7

- Anwendung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen auf einer Kreisbahn
- Bestimmung des zeitabhängigen Momentes auf einen Kragarm

An einer Schaukel hängt eine Punktmasse m. Sie wird aus der horizontalen Lage C losgelassen.

gegeben: l, m, r

gesucht: Bestimmung des Einspannmoments $M = M(\varphi)$ in B und des Winkels φ, an dem das Moment M maximal ist.

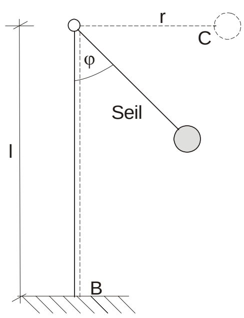


Bild 3. 34 Schaukel mit einer Punktmasse m

Lösung

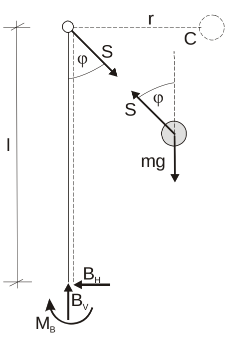


Bild 3. 35 Schnittbild

NEWTONsche Bewegungsgleichungen

am Balken

$$B: \quad M_B = M(\varphi) = -\, S\, l \sin\varphi \qquad (3.\ 201)$$

an der Kugel

$$m\, a_n = \frac{m\, v^2}{r} = S - m\, g \cos\varphi \qquad (3.\ 202)$$

Mit dem Energiesatz

$$m\, g\, r \cos\varphi = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \qquad (3.\ 203)$$

ergibt sich die Seilkraft zu

$$S = 2\, m\, g \cos\varphi + m\, g \cos\varphi = 3\, mg \cos\varphi. \qquad (3.\ 204)$$

Das Einspannmoment ist damit

$$M_B = M(\varphi) = -\, 3\, m\, g\, l \cos\varphi \sin\varphi \qquad (3.\ 205)$$

Das maximale Moment M_{max} ergibt sich für $\varphi = \pm 45°$ ($\pm 135°$), wobei hier nur $\varphi = \pm 45°$ interessiert

$$\frac{dM}{d\varphi} = -\, 3\, m\, g\, l\, (-\sin\varphi \sin\varphi + \cos\varphi \cos\varphi)$$
$$= -\, 3\, m\, g\, l\, (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = -\, 3\, m\, g\, l\, (\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) = 0 \qquad (3.\ 206)$$

$$\frac{d^2M}{d^2\varphi} = 3\, m\, g\, l\, (2 \cos\varphi \sin\varphi)\ \Big|_{+45^0} > 0 \text{ Minimum,}$$
$$\frac{d^2M}{d^2\varphi} = 3\, m\, g\, l\, (2 \cos\varphi \sin\varphi)\ \Big|_{-45^0} < 0 \text{ Maximum} \qquad (3.\ 207)$$

Aufgabe 3. 8

- Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Bestimmung der Geschwindigkeiten
- Freier Flug mit Anfangsgeschwindigkeit

Ein Massenpunkt m erhält im Punkt A eine Geschwindigkeit v_A. Er bewegt sich bis zum Punkt E (Höhe h) längs einer glatten, schrägen Rampe und soll dann nach freiem Flug im Punkt L auftreffen.

gegeben: m, h, l, α

gesucht: Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit v_A

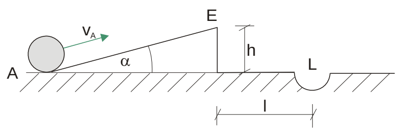


Bild 3. 36 Massenpunkt m längs einer glatten, schrägen Rampe

Lösung

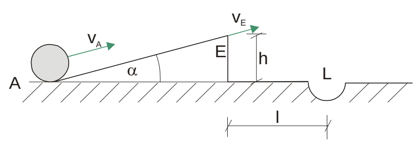


Bild 3. 37 Anfangsgeschwindigkeit v_A und Abfluggeschwindigkeit v_E

Energiesatz

$$\frac{1}{2}\, m\, v_A^{\,2} = \frac{1}{2}\, m\, v_E^{\,2} + m\, g\, h \qquad (3.\ 208)$$

mit der Abfluggeschwindigkeit v_E aus dem Energieerhaltungssatz

$$v_E = \sqrt{v_A^{\,2} - 2\, g\, h} \qquad (3.\ 209)$$

Nach dem Abflug gilt die Wurfparabel. Es handelt sich um einen freien Flug

$$z = x \tan\alpha - g\, \frac{x^2}{2 v_0^{\,2} \cos^2\alpha} \qquad (3.\ 15)$$

mit der Abfluggeschwindigkeit v_E, der Wurfweite l und der Wurfhöhe h ergibt sich zum Auftreffzeitpunkt t^*

$$x = l = x(t^*), \qquad (3.\ 210)$$

$$z = -\, h = z(t^*) \qquad (3.\ 211)$$

Daraus folgt eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der Höhe h

$$- h = l \tan\alpha - g \frac{l^2}{2 v_E^2 \cos^2\alpha}, \qquad (3.212)$$

und für die Wurfweite l

$$l^2 - \frac{1}{g} \tan\alpha \; 2 v_E^2 \cos^2\alpha \; l - \frac{1}{g} h \; 2 v_E^2 \cos^2\alpha = 0 \qquad (3.213)$$

Daraus folgt die Länge

$$l = \frac{1}{g} \tan\alpha v_E^2 \cos^2\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{1}{g} \tan\alpha \, v_E^2 \cos^2\alpha\right)^2 + \frac{1}{g} h \, 2 v_E^2 \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{g} v_E^2 \sin\alpha \cos\alpha \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 g h}{v_E^2 \sin^2\alpha}}\right). \qquad (3.214)$$

Daraus kann die Anfangsgeschwindigkeit v_A berechnet werden

$$l g - v_E^2 \sin\alpha \cos\alpha = \pm v_E^2 \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{1 + \frac{2 g h}{v_E^2 \sin^2\alpha}} \;) \quad |\text{quadr.} \qquad (3.215)$$

$$\Rightarrow \quad l^2 g^2 + v_E^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha - 2 l g v_E^2 \sin\alpha \cos\alpha$$
$$= v_E^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha + 2 g h v_E^2 \cos^2\alpha \qquad (3.216)$$

$$\Rightarrow \quad v_E^2 \, 2 \cos\alpha \, (l \sin\alpha + h \cos\alpha) = l^2 g \qquad (3.217)$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit am Ende der Rampe

$$v_E^2 = \frac{g l^2}{2 \cos\alpha \, (h \cos\alpha + l \sin\alpha)} \qquad (3.218)$$

in (3. 208) ergibt für die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_A^2 = 2 g h + v_E^2 = g \frac{l^2 + 4 h \cos\alpha \, (h \cos\alpha + l \sin\alpha)}{2 \cos\alpha \, (h \cos\alpha + l \sin\alpha)}. \qquad (3.218)$$

4 Kinematik und Kinetik eines Systems von Massenpunkten

Aufgabe 4. 1

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Reibung

Auf der Plattform eines Wagens m_1 (masselose Räder) liegt eine Kiste m_2. An dem bis dahin ruhenden Wagen greift eine Kraft F an, die den Wagen so stark beschleunigt, dass die Kiste rutscht.

gegeben: m_1, m_2, F, l, μ

gesucht: Bestimmung der Zeit t^*, an der die Kiste vom Wagen herunterfällt.

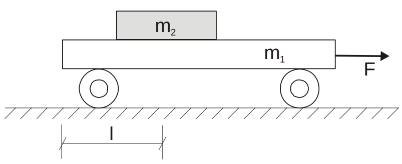


Bild 4. 8 Wagens m_1 mit Kiste m_2

Lösung

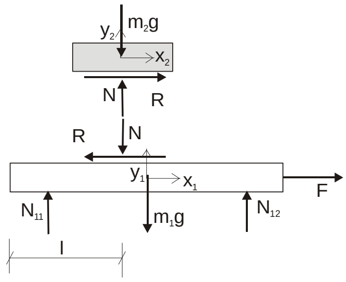


Bild 4. 9 Schnittbild

Die Anfangsbedingungen für beide Körper in Ruhe sind

$$\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0 \qquad (4.30)$$

$$x_{10} = x_{20} = 0 \qquad (4.31)$$

Die x_1-, bzw. x_2- Koordinate werden von t = 0, das heißt von der Ruhelage aus gezählt. Wenn Reibung herrscht, haben beide Massenpunkte ein eigenes, voneinander unabhängiges Koordinatensystem

$$\dot{x}_1 \neq \dot{x}_2, \quad \ddot{x}_1 \neq \ddot{x}_2. \qquad (4.32)$$

NEWTONsche Bewegungsgleichungen

Für den Wagen

$$\rightarrow: \quad m_1 \ddot{x}_1 = F - R, \qquad (4.33)$$

und für die Kiste

$$\rightarrow: \quad m_2 \ddot{x}_2 = R, \qquad (4.34)$$

$$\uparrow: \quad m_2 \ddot{y}_2 = N - m_2 g. \qquad (4.35)$$

Mit dem Reibungsgesetz folgt

$$R = \mu N. \qquad (4.36)$$

Wahl der Richtung von R

Wenn der Wagen mit F beschleunigt wird, bewegt er sich in die x_1- Richtung, also in Richtung der Kraft, aber die Reibung verzögert diesen Vorgang. Ohne die Reibung würde der Wagen unter der Kiste wegrutschen. Die Kiste bewegt sich in die negative x_2- Richtung. Die Reibung beschleunigt die Kiste.

Da beide Körper geführt sind, gilt

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0 \qquad (4.37)$$

Daraus folgt

$$N = m_2 g \qquad (4.38)$$

(4. 36) in (4. 34) in (4. 32) und (4. 33)

$$m_1 \ddot{x}_1 = F - \mu m_2 g \qquad (4.39)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = \mu m_2 g \qquad (4.40)$$

Durch die Masse m_1, bzw. m_2 geteilt folgt

$$\ddot{x}_1 = \frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g \qquad (4.41)$$

$$\ddot{x}_2 = \mu g \qquad (4.42)$$

Nach Integration mit den Anfangsbedingungen folgen die Geschwindigkeiten

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g\right) t + \dot{x}_{10} = \left(\frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g\right) t \qquad (4.43)$$

$$\dot{x}_2 = \mu g t + \dot{x}_{20} = \mu g t \qquad (4.44)$$

und die Wege

$$x_1 = \left(\frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g\right) \frac{t^2}{2} + x_{10} = \left(\frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g\right) \frac{t^2}{2} \qquad (4.45)$$

$$x_2 = \mu g \frac{t^2}{2} + x_{20} = \mu g \frac{t^2}{2} \qquad (4.46)$$

Die Bedingung ist, dass die Kiste herunterfällt, wenn

$$x_1(t^*) = x_2(t^*) + l \qquad (4.47)$$

In (4. 44) und (4. 45) eingesetzt, ergibt sich die Zeit t*

$$\left(\frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g\right) \frac{t^{*2}}{2} = \mu g \frac{t^{*2}}{2} + l \qquad (4.\,48)$$

$$\left(\frac{F}{m_1} - \mu \frac{m_2}{m_1} g - \mu g\right) \frac{t^{*2}}{2} = l \qquad (4.\,49)$$

$$t^{*2} = \frac{l}{\frac{1}{2}\left(\frac{F}{m_1} - \mu g\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)} \quad \Rightarrow \quad t^{*} = \sqrt{\frac{2 l m_1}{F - \mu g (m_1 + m_2)}} \qquad (4.\,50)$$

Aufgabe 4. 2

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Haftung
- Aufstellen einer Schwingungsdifferentialgleichung

Beim Auffahren eines Güterwagens (Gewicht G) auf einen Prellbock (Federsteifigkeit c) kommt eine auf der rauhen Plattform (Haftungskoeffizient μ_0) liegende flache Kiste (Gewicht Q) ins Rutschen. Die Massen der Räder und des Prellbockpuffers sind vernachlässigbar klein.

gegeben: G, Q, μ_0, c

gesucht: Bestimmung der Mindestgeschwindigkeit v des Wagens, die zum Aufprall notwendig gewesen ist.

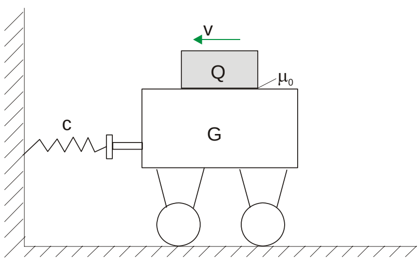


Bild 4. 10 Güterwagen fährt auf einen Prellbock

Lösung

Die Kiste kommt ins Rutschen, wenn die Haftung $|H| \le \mu_0 N$ überwunden wird, das heißt, wenn die Kraft auf den Prellbock $F > \mu_0 N$ größer als die Haftung ist.

Der Bewegungsablauf setzt sich aus drei Bewegungen zusammen: vorher gilt zwischen Kiste und Wagen Haftung $|H| < \mu_0 N$, beim Beginn des Rutschens tritt die Grenzhaftung $|H| = \mu_0 N$ auf, wenn die Kiste die Grenzhaftung überwunden hat, tritt Rutschen auf $R = \mu N < \mu_0 N$.

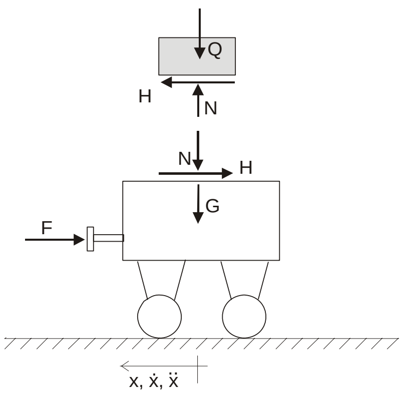


Bild 4. 11 Schnittbild

Wenn Haftung herrscht, haben beide Massenpunkte dasselbe Koordinatensystem

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}, \; \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}. \qquad (4.\,51)$$

Die Richtung von H durch das Betragzeichen beliebig wählbar.

Die NEWTONsche Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} = H. \qquad (4.\,52)$$

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = -H - F. \qquad (4.\,53)$$

(4. 51) in (4. 52) und dem Federgesetz

$$F = c\,x \qquad (4.\,54)$$

$$\left(\frac{Q}{g} + \frac{G}{g}\right) \ddot{x} = -c\,x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{c \cdot g}{G+Q} x \qquad (4.\,55)$$

in (4. 52)

$$H = -\frac{Q}{G+Q} c\,x \qquad (4.\,56)$$

Die Bedingung für Grenzhaftung ist

$$|H| = \mu_0 N = \mu_0 Q \quad \Rightarrow \quad x = \mu_0 Q \frac{G+Q}{c \cdot Q} = \mu_0 \frac{G+Q}{c}. \qquad (4.\,57)$$

Berechnung der Geschwindigkeit mit dem Energiesatz

$$\frac{1}{2} \frac{G+Q}{g} v^2 = \frac{1}{2} c\,x^2. \qquad (4.\,58)$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit

$$v^2 = \frac{c \cdot g}{G+Q} \mu_0^2 \left(\frac{G+Q}{g}\right)^2. \qquad (4.\,59)$$

Die Mindestgeschwindigkeit ist somit unabhängig vom Gewichtsverhältnis $\frac{Q}{G}$

$$v_{min} = \mu_0 \sqrt{\frac{g}{c}(G+Q)} = \mu_0 \sqrt{\frac{g}{c} G_{ges}} \qquad (4.\,60)$$

Aufgabe 4. 3

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Reibung

Ein Brett (Masse M) ruht auf zwei masselosen Rollen. Auf dem einen Ende des Brettes liegt ein Klotz (Masse m). Den Klotz stößt eine Punktmasse (ebenfalls Masse m) mit der Geschwindigkeit v_0. Der Stoß sei voll elastisch. Zwischen Brett und Klotz herrscht der Reibungskoeffizient μ.

gegeben: M, m, v_0, e = 1, μ

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit w von Brett und Klotz, wenn der Klotz relativ zum Brett zur Ruhe gekommen ist und die Dauer des Rutschvorgangs.

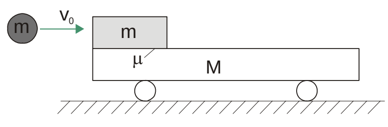


Bild 4. 12 Brett mit zwei masselosen Rollen, auf dem ein Klotz liegt

Lösung

Der Bewegungsablauf setzt sich aus zwei Bewegungen zusammen: zuerst gibt es einen Stoß von der Punktmasse auf den Klotz, danach beginnt das Rutschen des Klotzes auf dem Brett.

Zentraler, gerader Stoß

Mit der Stoßbedingung mit der Geschwindigkeit der Masse $v_1 = v_0$ und des Klotzes $v_2 = 0$ vor dem Stoß und der Geschwindigkeit der Masse w_1 und des Klotzes w_2 nach dem Stoß

$$e = -\frac{w_2 - w_1}{0 - v_0} \qquad (4.\,61)$$

und dem Impulserhaltungssatz (4. 24) mit $m_1 = m_2 = m$

$$m\,v_0 = m\,w_1 + m\,w_2 \qquad (4.62)$$

folgt mit voll elastisch Stoß e = 1 in (4. 61)

$$w_2 - w_1 = v_0 \qquad (4.63)$$

und aus (4. 62)

$$w_2 + w_1 = v_0 \qquad (4.64)$$

Aus (4. 63) und (4. 64) folgt

$$w_2 = v_0,\; w_1 = 0. \qquad (4.65)$$

Die Masse hat nach dem Stoß keine Geschwindigkeit mehr (voll plastischer Stoß).

Da während des Stoßes Reibungs- und Haftungskräfte unberücksichtigt bleiben, "weiß das Brett noch nichts".

Rutschvorgang

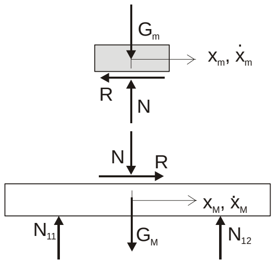


Bild 4. 13 Schnittbild

Die x_m-, bzw. x_M- Koordinate werden von t = 0, das heißt unmittelbar nach dem Stoßvorgang aus gezählt. Wenn Reibung herrscht, haben beide Massenpunkte ein eigenes, voneinander unabhängiges Koordinatensystem

$$\dot{x}_m \neq \dot{x}_M,\; \ddot{x}_m \neq \ddot{x}_M. \qquad (4.66)$$

Die NEWTONsche Bewegungsgleichungen lauten für den Klotz

$$\rightarrow:\quad m\,\ddot{x}_m = -R \qquad (4.67)$$

$$\uparrow:\quad m\,\ddot{y}_m = G_m - N = 0 \qquad (4.68)$$

und für das Brett

$$\rightarrow:\quad M\,\ddot{x}_M = R. \qquad (4.69)$$

Das Reibungsgesetz ist

$$R = \mu N = \mu\, m\, g \qquad (4.70)$$

Die Berechnung der Geschwindigkeiten durch Integration für den Klotz mit der Anfangsbedingung $\dot{x}_{m0} = w_2 = v_0$

$$\dot{x}_m = -\mu g t + \dot{x}_{m0} = -\mu g t + v_0 \qquad (4.71)$$

und für das Brett mit der Anfangsbedingung $\dot{x}_{M0} = w_1 = 0$ folgt

$$\dot{x}_M = \mu g \frac{m}{M} t + \dot{x}_{M0} = \mu g \frac{m}{M} t. \qquad (4.72)$$

Die Bedingung für das Ende des Rutschens zur Zeit t^* ist

$$\dot{x}_m(t^*) = \dot{x}_M(t^*) \qquad (4.73)$$

Daraus folgt die Zeit t^*

$$-m g t^* + v_0 = -m g \frac{m}{M} t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{v_0}{\mu g}\frac{M}{m+M} \qquad (4.74)$$

Eine Kontrolle für Geschwindigkeit w_{Brett} nach dem Rutschen ist

$$w_{Brett} = \dot{x}_M(t^*) = m g \frac{m}{M} t^* = \frac{m}{m+M} v_0. \qquad (4.75)$$

Aufgabe 4. 4

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Ein Golfball (Masse m) stößt mit der Geschwindigkeit v_1 gegen ein Hindernis (Masse M), das anfänglich in Ruhe ist.

gegeben: m, v_1, μ, M = 5 m, e

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit w_1, die der Ball zurückrutscht, wenn eine Stoßzahl e angenommen wird und den Weg des Klotzes M über die rauhe Unterlage (Reibungskoeffizient μ).

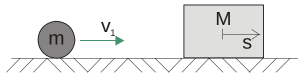


Bild 4. 14 Golfball und Hindernis

Lösung

Es handelt sich um einen zentralen, geraden Stoß.

Stoßbedingung

$$e = -\frac{w_2 - w_1}{v_2 - v_1} \qquad (4.76)$$

Impulssatz

$$m\,v_1 + M\,v_2 = m\,w_1 + M\,w_2 \qquad (4.77)$$

aus (4. 76) mit $v_2 = 0$ folgt

$$w_2 = e\,v_1 + w_1, \qquad (4.78)$$

in (4. 77)

$$m\,v_1 = m\,w_1 + M\,w_2 \qquad (4.79)$$

Berechnung der Geschwindigkeit

in (4. 79)

$$w_1 = \frac{m-eM}{m+M} v_1 = \frac{(1-5e)}{6} v_1 \qquad (4.80)$$

Diskussion der Stoßzahl (0 < e < 1) für M = 5m

Für den plastischen Stoß e = 0 gilt

$$w_1 = \frac{1}{6} v_1, \qquad (4.81)$$

für den elastischen Stoß e = 1 gilt

$$w_1 = -\frac{2}{3} v_1 \qquad (4.82)$$

und für e = 0,5

$$w_1 = -\frac{1}{4} v_1. \qquad (4.83)$$

Diskussion der Stoßzahl (0 < e < 1) für M = m

Für den plastischen Stoß e = 0 gilt

$$w_1 = \frac{(1-e)}{2} v_1 = \frac{1}{2} v_1, \qquad (4.84)$$

für den elastischen Stoß e = 1 gilt

$$w_1 = 0 \qquad (4.85)$$

und für e = 0,5

$$w_1 = \frac{1}{4} v_1. \qquad (4.86)$$

Abhängig von den Massen und der Stoßzahl verändern sich die Richtung und Größe der Geschwindigkeit der Masse m nach dem Stoß.

Wegberechnung mit dem Arbeitssatz

Es gilt

$$T - T_0 = \int F ds \qquad (3.77)$$

$$\frac{1}{2} M (w_2^{*2} - w_2^2) = -R\,s \qquad (4.87)$$

mit $R = \mu N = \mu M g$ und $w_2^* = 0$, wenn das Rutschen beendet ist

$$-\frac{1}{2} M w_2^2 = -\mu M g s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{w_2^2}{2\mu g} \qquad (4.88)$$

mit $w_2 = \frac{m(1+e)}{m+M} v_1$ folgt

$$s = \frac{m^2(1+e)^2}{2\mu g (m+M)^2} v_1^2 \qquad (4.89)$$

Aufgabe 4. 5

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß
- Bestimmung des Energieverlusts bei plastischem Stoß

Man berechne den relativen Energieverlust $\Delta\Pi$ beim plastischen Stoß zweier Körper in Abhängigkeit vom Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$. Vor dem Stoß sei $v_2 = 0$.

gegeben: $\frac{m_1}{m_2}$, v_1, $v_2 = 0$, $e = 0$

gesucht: Energieverlust $\Delta\Pi = \frac{(\Pi_0 - \Pi_1)}{\Pi_0}$

Lösung

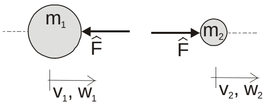


Bild 4. 15 Schnittbild zum Stoßzeitpunkt

Impulsgleichungen

$$m_1 (w_1 - v_1) = - \hat{F} \qquad (4.\ 90)$$

$$m_2 (w_2 - v_2) = \hat{F} \qquad (4.\ 91)$$

Die Stoßbedingung für den plastischen Stoß mit e = 0

$$0 = - \frac{w_1 - w_2}{v_1 - v_2} \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_2 = w. \qquad (4.\ 92)$$

Energieverlust mit e = 0 (ideal plastischer Stoß)

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 \qquad (4.\ 93)$$

mit (4. 93) und $v_2 = 0$ folgt aus (4. 91)

$$m_2\, w = \hat{F} \qquad (4.\ 94)$$

(4. 93) in (4. 90)

$$m_1\, w - m_1\, v_1 = - \hat{F} \qquad (4.\ 95)$$

(4. 94) und (4. 95) wie aus dem Impulserhaltungssatz: "Impuls nach dem Stoß = Impuls vor dem Stoß"

$$(m_1 + m_2)\, w = m_1\, v_1 \qquad (4.\ 96)$$

Daraus folgt

$$w = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (4.\ 97)$$

Der relative Energieverlust berechnet sich aus der Energie vorher

$$\Pi_0 = \frac{m_1}{2} v_1^2 \qquad (4.\ 98)$$

und der Energie nachher

$$\Pi_1 = \frac{(m_1 + m_2)\, w^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2}{2} v_1^2 = \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 \qquad (4.\ 99)$$

In (4. 21) folgt

$$\Delta\Pi = \frac{\left(\frac{m_1}{2} - \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)}\right) v_1^2}{\frac{m_1}{2} v_1^2} = \frac{m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}}{m_1} = \frac{m_1(m_1 + m_2) - m_1^2}{m_1(m_1 + m_2)}$$

$$= \frac{m_1^2 + m_1 m_2 - m_1^2}{m_1^2 + m_1 m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \qquad (4.\ 100)$$

Aufgabe 4. 6

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Eine aus zwei Punktmassen und einer masselosen Verbindungsstange bestehende Hantel fällt mit der Vertikalgeschwindigkeit v_0 auf eine glatte, schiefe Ebene.

gegeben: m, a, v_0, α

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten der Hantel nach einem teilelastischen Stoß

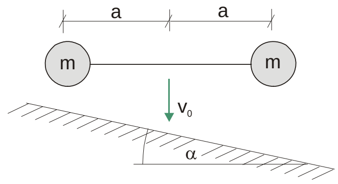


Bild 4. 16 Hantel aus zwei Punktmassen und masselosen Verbindungsstange

Lösung

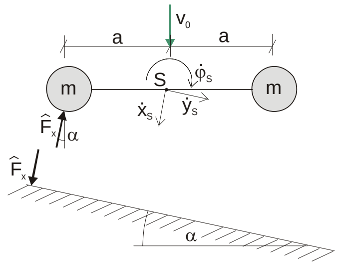


Bild 4. 17 Schwerpunktskoordinaten und Stoßkraft $\hat{F}_x$

Impulssätze für den Schwerpunkt S

$$2\, m\, (\dot{x}_{Sn} - \dot{x}_{Sv}) = - \hat{F}_x \qquad (4.\ 101)$$

$$2\, m\, (\dot{y}_{Sn} - \dot{y}_{Sv}) = 0 \qquad (4.\ 102)$$

$$\Theta\, (\dot{\varphi}_{Sn} - \dot{\varphi}_{Sv}) = - \hat{F}_x\, a \cos\alpha \qquad (4.\ 103)$$

Die Stoßbedingung für Stoßpunkt P mit $\dot{x}_{Sv} = v_0 \cos\alpha$, $\dot{\varphi}_{Sv} = 0$ und $s_n = - a \cos\alpha$ ergibt

$$e = - \frac{\dot{x}_{P\,rel,nachher}}{\dot{x}_{P\,rel,vorher}} = - \frac{\dot{x}_{Sn} + \dot{\varphi}_{Sn} s_P}{\dot{x}_{Sv} + \dot{\varphi}_{Sv} s_P} = - \frac{\dot{x}_{Sn} + \dot{\varphi}_{Sn}(-a\cos\alpha)}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad - e\, v_0 \cos\alpha = \dot{x}_{Sn} - \dot{\varphi}_{Sn}\, a \cos\alpha \qquad (4.\ 104)$$

(4. 104) in (4. 101) und (4. 103) eingesetzt ergibt mit $\Theta = 2\, m\, a^2$

$$\dot{x}_{Sn} = \frac{\cos^2\alpha - e}{\cos^2\alpha + 1} v_0 \cos\alpha, \quad \dot{\varphi}_{Sn} = \frac{\cos^2\alpha(1 + e)}{\cos^2\alpha + 1}\frac{v_0}{a}. \qquad (4.\ 105)$$

Aus (4. 102) folgt

$$\dot{y}_{Sn} = \dot{y}_{Sv} = v_0 \sin\alpha. \qquad (4.\ 106)$$

Aufgabe 4. 7

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der Impulserhaltungssätze
- Gerader, zentraler Stoß

Zwei Jungen (Masse m_1 und m_2) stehen am Heck eines ruhenden Bootes (Masse M). Zunächst läuft der erste Junge zum Bug und springt mit einer Geschwindigkeit v_0 relativ zum Boot in Wasser. Dann läuft der zweite Junge zum Bug und springt ebenfalls mit einer Geschwindigkeit v_0 relativ zum Boot ins Wasser. Das Boot gleite reibungsfrei im Wasser.

gegeben: m_1, m_2, M, v_0

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit des Bootes nach Absprung des zweiten Jungen und die Änderung der Geschwindigkeit des Bootes, wenn die beiden Jungen gleichzeitig zum Bug laufen und gleichzeitig mit der Geschwindigkeit v_0 relativ zum Boot ins Wasser springen.

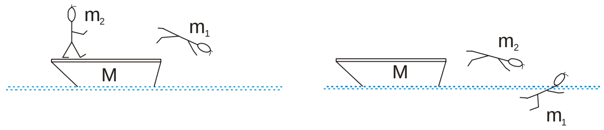


Bild 4. 18 Zwei Jungen am Heck eines ruhenden Bootes

Lösung

Vor dem Springen ist das Boot in Ruhe. Der Gesamtimpuls für das Gesamtsystem ist Null

$$v_i = 0. \qquad (4.107)$$

Impulserhaltungssatz "Impuls vorher = Impuls nachher"

$$m_1\, v_1 + m_2\, v_2 = m_1\, w_1 + m_2\, w_2 \qquad (4.108)$$

Die Geschwindigkeit des Bootes nach dem Absprung beider Jungen nacheinander mit dem Impulserhaltungssatz

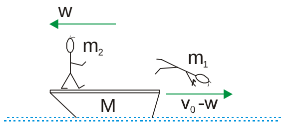


Bild 4. 19 Erster Junge springt ab

$$\underbrace{(m_2 + M)\, w}_{\text{nachher}} + \underbrace{m_1(-v_0 + w)}_{\text{vorher}} = 0 \qquad (4.109)$$

$$w = \frac{m_1}{M + m_1 + m_2}\, v_0 \qquad (4.110)$$

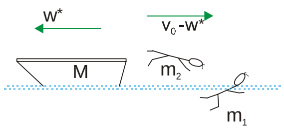


Bild 4. 20 Zweiter Junge springt ab

Die Geschwindigkeit des Bootes, nachdem der zweite Junge abgesprungen ist, mit dem Impulserhaltungssatz

$$\underbrace{M\, w^* + m_2(-v_0 + w^*)}_{\text{nachher}} = \underbrace{(m_2 + M)\, w}_{\text{vorher}} \qquad (4.111)$$

$$w^* = w + \frac{m_2}{M + m_2}\, v_0 = \left(\frac{Mm_1 + Mm_2 + 2m_1m_2 + m_2^2}{(M + m_1 + m_2)(M + m_2)}\right) v_0 \qquad (4.112)$$

Die Geschwindigkeit des Bootes nach dem Absprung beider Jungen gleichzeitig mit dem Impulserhalungssatz

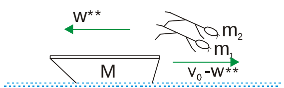


Bild 4. 21 Beide Jungen springen gleichzeitig ab

$$\underbrace{M\, w^{**}}_{\text{nachher}} + \underbrace{(m_1 + m_2)(-v_0 + w^{**})}_{\text{vorher}} = 0 \qquad (4.113)$$

$$w^{**} = \frac{m_1 + m_2}{M + m_1 + m_2}\, v_0 \qquad (4.114)$$

Mit den Zahlenwerten m_1 = 70 kg, m_2 = 50 kg, M = 200 kg und $v_0 = 3\ \frac{m}{s}$ ergibt sich

$$w^* = \left(\frac{200 \cdot 70 + 200 \cdot 50 + 2 \cdot 70 \cdot 50 + 50 \cdot 50}{(200 + 70 + 50)(200 + 50)}\right) 3\ \frac{m}{s} = 1{,}256\ \frac{m}{s} \qquad (4.115)$$

$$w^{**} = \frac{70 + 50}{200 + 70 + 50}\, 3\ \frac{m}{s} = 1{,}125\ \frac{m}{s} \qquad (4.116)$$

Aufgabe 4. 8

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Physikalische Bindung durch Reibung
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Ein PKW 2 (Masse m_2) schleudert auf regennasser Straße und bleibt quer stehen. Ein nachfolgender PKW 1 (Masse m_1) kommt mit der Geschwindigkeit v_1 heran, erkennt das Hindernis und beginnt im Abstand s_1 vom querstehenden PKW 2 (VW) eine Vollbremsung (Rutschen, Reibungskoeffizient μ_1). Der Bremsweg reicht nicht aus, es kommt zum Zusammenstoß (Stoßzahl e). Der querstehende PKW 2 (VW) wird um die Strecke s_2 (Reibungskoeffizient μ_2) weitergeschoben.

gegeben: m_1, m_2, s_1, s_2, μ_1, μ_2

gesucht: Wie groß war die Geschwindigkeit v_{10} des nachfolgenden PKW 1. Vor Gericht bestreitet der PKW 1- Fahrer die Überschreitung der zulässige Höchstgeschwindigkeit (50 $\frac{km}{h}$). Für die Zahlenwerte: m_1 = 2 m_2 = 2 m, $g \approx 10\frac{m}{s^2}$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$, $s_1 = 2\, s_2$ = 40 m, e = $\frac{1}{2}$ ist zu überprüfen, ob die Aussage glaubwürdig ist.

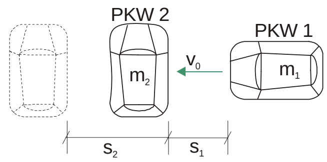


Bild 4. 22 PKW 2 querstehend auf regennasser Straße und nachfolgender PKW 1

Lösung

Die Restgeschwindigkeit v_1 bei einer Vollbremsung bis vor dem Stoß wird über die NEWTONschen Bewegungsgleichung berechnet

$$m_1\, \ddot{x}_1 = -\mu_1\, m_1\, g \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = \frac{d\dot{x}_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\dot{x}_1}{dx_1}\, \dot{x}_1 = -\mu_1\, g \qquad (4.117)$$

Durch Integration folgt die Restgeschwindigkeit

$$\int_{\dot{x}=0}^{\dot{x}=\dot{x}_{s_1}} m_1 \dot{x}_1\, d\dot{x}_1 = \int_{x=0}^{x=s_1} -\mu_1 m_1 g\, dx_1 \quad \Rightarrow \quad m_1\, \frac{1}{2}\left(\dot{x}_{s_1}^2 - v_0^2\right) = -\mu_1\, m_1\, g\, s_1 \qquad (4.118)$$

Mit dem Energiesatz ergibt sich der Weg s_1

$$v_1^2 = \dot{x}_{s_1}^2 = -2\, \mu_1\, g\, s_1 + v_{10}^2 \qquad (4.119)$$

Der Zusammenstoß erfolgt mit der Stoßzahl e unter der Stoßbedingung

$$e = -\frac{w_2 - w_1}{v_2 - v_1}. \qquad (4.120)$$

Aus dem Impulserhaltungssatz

$$m_1\, v_1 + m_2\, v_2 = m_1\, w_1 + m_2\, w_2 \qquad (4.121)$$

folgt die Geschwindigkeit w_2

$$w_2 = \frac{m_1\, v_1 + m_2\, v_2 + e\, m_1\,(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \qquad (4.122)$$

mit $v_2 = 0$ ergibt sich dann

$$w_2 = \frac{m_1(1 + e)}{m_1 + m_2}\, v_1. \qquad (4.123)$$

Das Rutschen des PKW 2 mit Energiesatz ergibt

$$m_2\, \frac{1}{2}\, w_2^2 = \mu_2\, m_2\, g\, s_2 \qquad (4.124)$$

$$\Rightarrow \quad m_2\left(\frac{m_1(1 + e)}{m_1 + m_2}\, v_1\right)^2 = 2\, \mu_2\, m_2\, g\, s_2. \qquad (4.125)$$

Laut Vermessung mit $s_2 = \frac{1}{2}\, s_1$ ergibt sich

$$\left(\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}v_1\right)^2 = 2\,\mu_2\, g\, \frac{1}{2}\, s_1 = \mu_2\, g\, s_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1^2(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2}\left(-2\,\mu_1\, g\, s_1 + v_{10}^2\right) = \mu_2\, g\, s_1 \qquad (4.\ 126)$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit des PKW 1- Fahrers zu

$$v_{10}^2 = \mu_2\, g\, s_1 \frac{(m_1+m_2)^2}{m_1^2(1+e)^2} + 2\,\mu_1\, g\, s_1 = g\, s_1 \left(\mu_2 \frac{(1+\frac{m_2}{m_1})^2}{(1+e)^2} + 2\,\mu_1\right) \qquad (4.\ 127)$$

Mit den Zahlenwerten $m_1 = 2\, m_2 = 2$ m, $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$, $s_1 = 2\, s_2 = 40$ m und $e = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$v_{10}^2 = 10 \frac{m}{s^2}\ 40\, m \left(\frac{1}{3} \frac{(1+\frac{1}{2})^2}{(1+\frac{1}{2})^2} + 2\, \frac{1}{3}\right) = 400\, \frac{m^2}{s^2}\,. \qquad (4.\ 128)$$

Damit war die Geschwindigkeit des PKWs 1- Fahrers

$$v_{10} = 20\, \frac{m}{sec} = 72\, \frac{km}{h} > 50\, \frac{km}{h} \qquad (4.\ 129)$$

Aufgabe 4. 9

- System von zwei Massenpunkten
- Aufstellen der NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Aufstellen der Impulsgleichungen
- Gerader, zentraler Stoß

Über eine in A drehbar gelagerte Rolle (masselos, Radius r) ist ein masseloses Seil geschlungen, an dem die beiden Massen m_1 und m_2 befestigt sind. Die Länge des Seils ist so groß, daß es gerade gespannt ist, wenn beide Massen die Lage z = 0 einnehmen. Die Masse m_1 wird nun um h_1 angehoben und fallen gelassen, während m_2 auf der Unterlage liegen bleibt.

gegeben: m_1, m_2, h_1, h_2, r

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit v, mit der die Masse m_1 am Boden (z = - h_2) ankommt, wenn sie in der beschriebenen Lage (z = h_1) losgelassen wird.

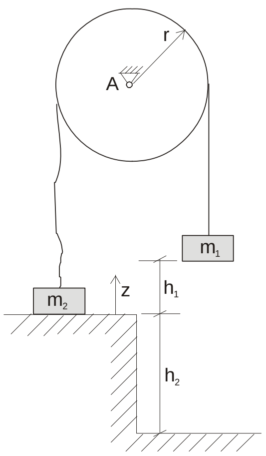


Bild 4. 23 Massen m_1 und m_2

Lösung

Es liegen 3 Phasen der Bewegung vor.

Die erste Bewegungsphase ist eine gleichförmige Bewegung von z = h_1 bis z = 0. Mit einer masselosen Rolle und der freifallenden Masse m_1 folgt aus dem Energieerhaltungssatz

$$T - W = \text{const.} \qquad (3.\ 77)$$

für den freien Fall die Geschwindigkeit bei z = 0

$$v_1 = \sqrt{2 g h_1}\,. \qquad (2.\ 74)$$

Die zweite Bewegungsphase ist ein plastischer Stoß mit der Stoßzahl e = 0. Der Drall um den Drehpunkt A bleibt erhalten, aber nicht der Impuls, da eine Stoßkraft im Lager A auftritt.

Drallsatz

$$r\, m_1\, v_1 + 0 = r\, m_1\, v_2 + r\, m_2\, v_2 \qquad (4.\ 130)$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit der Masse m_2 nach dem Stoß

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, v_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \sqrt{2 g h_1}\,. \qquad (4.\ 131)$$

Die erste Bewegungsphase ist eine gleichförmige Bewegung von z = 0 bis z = - h_2 mit dem Energieerhaltungssatz

$$T_1 + W_1 = T_2 + W_2 \qquad (3.\ 77)$$

$$\frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v_2^2 + 0 = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v^2 - (m_1 - m_2)\, g\, h_2 \qquad (4.\ 132)$$

$$v^2 = v_2^2 + 2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g\, h_2 = 2\, g \left(h_1 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 + h_2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (4.\ 133)$$

folgt die Geschwindigkeit v am Boden

$$v = \sqrt{2\, g \left(h_1 \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} + h_2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)}\,. \qquad (4.\ 134)$$

5 Bewegung des starren Körpers

Aufgabe 5. 1

- Bestimmung der Massenträgheitsmomente verschiedener Querschnitte bezüglich einer Achse z

Folgende massebehaftete Körper sind gegeben a) Stab (Länge l, Masse m); b) Kreisplatte (Radius r, Masse m); c) Rechteckplatte (Seitenlängen a, b, Masse m); d) Kugel (Radius r, Masse m); e) Kegel (Radius r, Höhe h, Masse m); f) Winkel (Schenkellänge a, Schenkelmasse m).

gegeben: l, r, a, b, h, a, t, a >> t

gesucht: Bestimmung der Massenträgheitsmomente bezüglich einer Achse z durch 0, die senkrecht zur Zeichenebene steht.

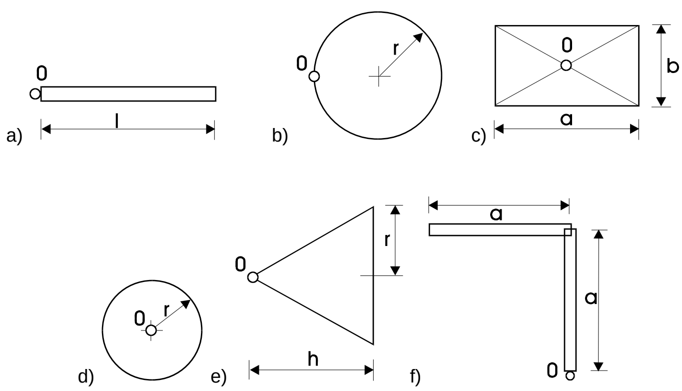


Bild 5. 17 Verschiedene massebehaftete Körper; a) Stab; b) Kreisplatte; c) Rechteckplatte; d) Kugel; e) Kegel; f) Winkel

Lösung

a) Stab

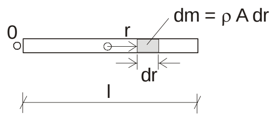


Bild 5. 18 a) Stab mit infinitesimalem Massenelement dm

Massenträgheitsmoment mit A = Stabquerschnitt und ρ = Dichte folgt Θ_S auf den Schwerpunkt bezogen

$$\Theta_S = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2 \cdot dm = \rho A \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2 \cdot dr = \frac{\rho A}{3}\, r^3 \Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{\rho A}{12}\, l^3 = \frac{m}{12}\, l^2, \qquad (5.85)$$

Θ_O auf die Achse z bezogen

$$\Theta_z = \int_0^l r^2 \cdot dm = \frac{\rho A}{3}\, r^3 \Big|_0^l = \frac{1}{3}\, m\, l^2 \qquad (5.86)$$

oder mit dem STEINER- Anteil

$$\Theta_z = \Theta_S + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m = \frac{m}{12}\, l^2 + \frac{m}{4}\, l^2 = \frac{1}{3}\, m\, l^2. \qquad (5.87)$$

b) Kreisplatte

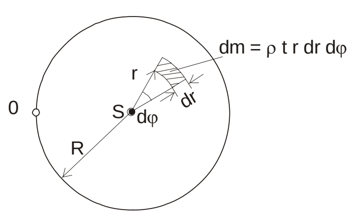


Bild 5. 19 b) Kreisplatte mit infinitesimalem Massenelement dm

Massenträgheitsmoment mit Scheibendicke t auf den Schwerpunkt S bezogen

$$\Theta_S = \int_m r^2 dm = \rho\, t \int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 \cdot dr \cdot d\varphi = 2\,\pi\,\rho\, t\, \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\, m\, R^2 \qquad (5.88)$$

Θ_O auf die Achse z bezogen

$$\Theta_O = \Theta_S + m\, R^2 = \frac{3}{2}\, m\, R^2. \qquad (5.89)$$

c) Rechteckplatte

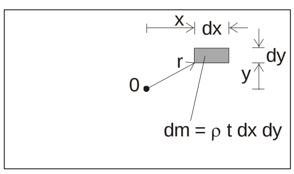


Bild 5. 20 c) Rechteckplatte mit infinitesimalem Massenelement dm

Massenträgheitsmoment mit Plattendicke t auf den Schwerpunkt S bezogen

$$\Theta_S = \Theta_Z = \int_m r^2 \cdot dm = \rho\, t \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \rho\, t \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right) dy\ \Big|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}$$

$$= \rho\, t \left(\frac{x^3 y}{3} + \frac{y^3 x}{3}\right) \Big|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \qquad (5.90)$$

Θ_O auf die Achse z bezogen

$$\Theta_O = \rho\, t \left[\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3}\, b + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3}\, a\right] = \frac{1}{12}\, m\, (a^2 + b^2). \qquad (5.91)$$

d) Kugel mit Scheibe von infinitesimal kleiner Dicke dz

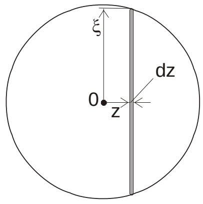


Bild 5. 21 d) Kugel mit Scheibe von infinitesimaler Dicke dz

Kugel in Scheiben zerlegen (Radius ξ, Dicke dz) auf den Schwerpunkt S = O bezogen

$$\Theta_{SKugel} = \Sigma\, \Theta_{SScheibe} = \int_{-r}^{+r} \pi\, \rho\, \frac{\xi^4}{2}\, dz = \frac{\rho\pi}{2} \int_{-r}^{+r} (r^2 - z^2)^2\, dz$$

$$= \frac{\rho\pi}{2} \left[r^4 z - \frac{2}{3}\, r^2 z^3 + \frac{1}{5}\, z^5\right] \Big|_{-r}^{+r} = \frac{8}{15}\, \rho\, \pi\, r^5 = \frac{2}{5}\, m\, r^2. \qquad (5.92)$$

e) Kegel

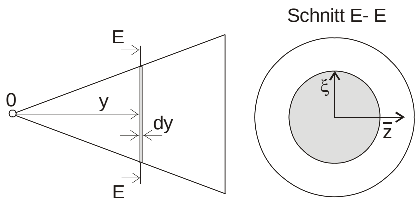


Bild 5. 22 e) Kegel mit Scheibe von infinitesimaler Dicke dz

Der Kegel wird in Scheiben (Radius ξ, Dicke dy) zerlegt. Das Eigenträgheitsmoment einer Scheibe aus Integration oder Tabelle 5. 1

$$\Theta_{\bar{z}\ Scheibe} = \int_m \xi^2\, dm = \frac{1}{4}\, \rho \int_{(y)} \xi^4\, \pi\, dy \qquad (5.93)$$

Θ_O auf die Achse z bezogen

$$\Theta_{O\ Scheibe} = \Theta_{\bar{z}\ Scheibe} + \int_{(y)} y^2\, \rho\, \xi^2\, \pi\, dy = \rho\, \pi \int_{(y)} \left[\frac{\xi^4}{4} + y^2\, \xi^2\right] dy \qquad (5.94)$$

mit $\xi = \frac{r}{h}$ folgt

$$\Theta_{O\ Scheibe} = \rho\, \pi \int_y \left[\frac{r^4}{4h^4}\, y^4 + \frac{r^2}{h^2}\, y^4\right] dy. \qquad (5.95)$$

$$\Theta_{O\ Kegel} = \Sigma\, \Theta_{O\ Scheibe} = \rho\ \pi\ \frac{r^2}{h^2} \left(1 + \frac{r^2}{4h^2}\right) \int_0^h y^4\, dy = \frac{1}{5}\ \rho\ \pi\, r^2 \left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right) h$$

$$= \frac{3}{5}\ m\ \left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right) \qquad (5.96)$$

f) Winkel

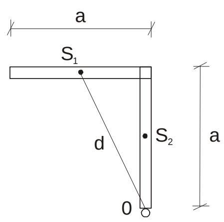


Bild 5. 23 f) Winkel

Massenträgheitsmoment mit STEINER- Anteilen

$$\Theta_{O\ ges} = \Theta_{S1} + m\, r^2 + \Theta_{S2} + m \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (5.97)$$

mit $\Theta_{S1} = \Theta_{S2} = \frac{m}{12}\, a^2$ und $d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5}{4}\, a^2$ ergibt

$$\Theta_{O\ ges} = 2\left(\frac{m}{12}\, a^2\right) + \frac{5}{4}\, m\, a^2 + \frac{1}{4}\, m\, a^2 = \frac{5}{3}\, m\, a^2 \qquad (5.98)$$

Aufgabe 5. 2

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Bestimmung des Zeitpunkts, an dem die Zylinder aufeinander rollen
- Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten

Ein Vollzylinder (G_1, r_1) ist an einer gewichtslosen Stange drehbar befestigt. Ein zweiter Vollzylinder (G_2, r_2) ist um A drehbar gelagert. Der Zylinder 2 ruht zunächst. Der Zylinder 1, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ dreht, wird auf ihn gesetzt, so daß beide aufeinander rutschen (Reibungskoeffizient μ).

gegeben: G_1, r_1, G_2, r_2, $\dot{\varphi}_0$, μ.

gesucht: Bestimmung der Zeit t_r, nach der beide Zylinder aufeinander rollen, und die Größe der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$.

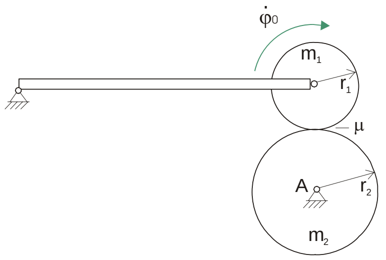


Bild 5. 24 Zwei Vollzylinder

Lösung

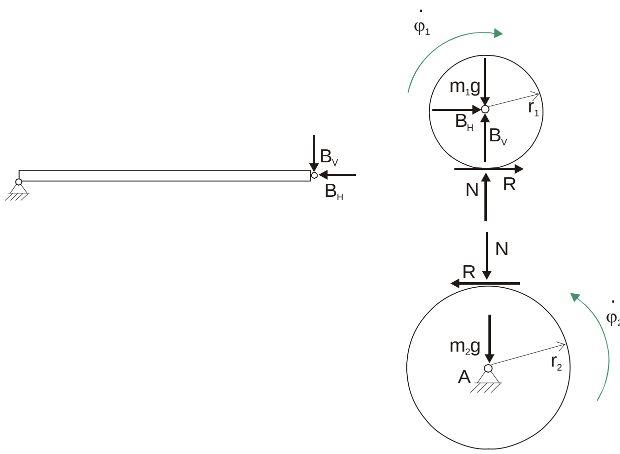


Bild 5. 25 Schnittbild

Die Momentensätze an den beiden Zylinder liefern

$$\Theta_1 \, \ddot{\varphi}_1 = - R \, r_1, \qquad (5.\ 99)$$

$$\Theta_2 \, \ddot{\varphi}_2 = R \, r_2. \qquad (5.\ 100)$$

Mit dem Reibungsgesetz

$$R = \mu N \qquad (5.\ 101)$$

und der Statik an der masselosen Stange

$$N = m_1 \, g, \; B_V = 0 \qquad (5.\ 102)$$

und den Massenträgheitsmomenten

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} \, m_1 \, r_1^2, \; \Theta_2 = \frac{1}{2} \, m_2 \, r_2^2 \qquad (5.\ 103)$$

ergeben sich in (5. 99) und (5. 100) eingesetzt die Winkelbeschleunigungen der Zylinder

$$\ddot{\varphi}_1 = - 2 \, \mu \, \frac{g}{r_1} \qquad (5.\ 104)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = 2 \, \mu \, \frac{g}{r_2} \, \frac{m_1}{m_2} \qquad (5.\ 105)$$

nach Integration folgen mit $\dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_0$ und $\dot{\varphi}_{20} = 0$ Die Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\varphi}_1 = - 2 \, \mu \, \frac{g}{r_1} \, t + \dot{\varphi}_0 \, , \qquad (5.\ 106)$$

$$\dot{\varphi}_2 = 2 \, \mu \, \frac{g}{r_2} \, \frac{m_1}{m_2} \, t \qquad (5.\ 107)$$

Für die Bestimmung der Zeit t_r, an der die Zylinder Walzen aufeinander abrollen, ist die Bedingung, daß die gleiche Umfangsgeschwindigkeit herrscht. Es gilt

$$r_1 \, \dot{\varphi}_1 (t_r) = r_2 \, \dot{\varphi}_2 (t_r). \qquad (5.\ 108)$$

Daraus ergibt sich die Zeit t_r

$$- 2 \, \mu \, g \, t_r + r_1 \, \dot{\varphi}_0 = 2 \, \mu \, g \, \frac{m_1}{m_2} \, t_r \Rightarrow \qquad t_r = \frac{r_1 \dot{\varphi}_0}{2 \mu g (1 + \frac{m_1}{m_2})} \qquad (5.\ 109)$$

Zu diesem Zeitpunkt sind die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$

$$\dot{\varphi}_1 (t_r) = - 2 \, \mu \, \frac{g}{r_1} \, \frac{r_1 \dot{\varphi}_0}{2 \mu g (1 + \frac{m_1}{m_2})} + \dot{\varphi}_0 = - \frac{\dot{\varphi}_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}} + \dot{\varphi}_0 \, , \qquad (5.\ 110)$$

$$\dot{\varphi}_2 (t_r) = 2 \, \mu \, \frac{g}{r_2} \, \frac{m_1}{m_2} \, \frac{r_1 \dot{\varphi}_0}{2 \mu g (1 + \frac{m_1}{m_2})} = \frac{r_1}{r_2} \, \frac{m_1}{m_2} \, \frac{\dot{\varphi}_0}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \, . \qquad (5.\ 111)$$

Aufgabe 5. 3

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Bestimmung des Antriebsmoments

Auf einer homogenen zylindrischen Walze wird ein masseloses dehnstarres Seil aufgewickelt, an dem die Masse m_2 hängt.

gegeben: m_1, m_2, r, $\ddot{x} = a$

gesucht: Bestimmung des Antriebsmoments M_0, das aufgewandt werden muß, um die Masse m_2 mit $\ddot{x} = a$ zu beschleunigen.

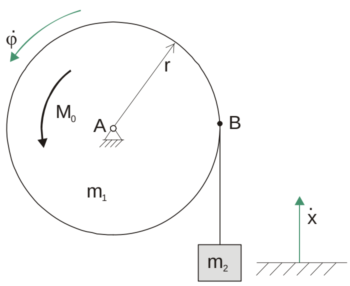


Bild 5. 26 Homogene zylindrische Walze mit Seil

Lösung

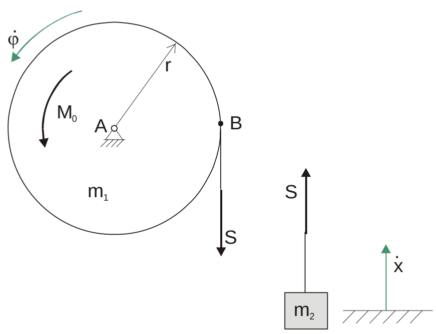


Bild 5. 27 Schnittbild

Der Momentensatz für die Rolle lautet

$A\curvearrowleft$: $\Theta_A\,\ddot{\varphi} = M_0 - r\,S$ (5. 112)

und die NEWTONschen Bewegungsgleichungen für den Körper sind

$\uparrow$: $m_2\,\ddot{x} = m_2\,a = S - m_2\,g.$ (5. 113)

Die Kinematik an der Rolle

$\dot{x} = r\,\dot{\varphi} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} = a = r\,\ddot{\varphi}$ (5. 114)

Damit folgt aus (5. 113)

$S = m_2\,\ddot{x} + m_2\,g = m_2\,(a+g)$ (5. 115)

und aus (5. 112)

$M_0 = \Theta_A\,\ddot{\varphi} + r\,S$ (5. 116)

mit $\Theta_A = \frac{1}{2}\,m_1\,r^2$ und $\ddot{\varphi} = \frac{a}{r}$ ergibt sich das Antriebsmoment

$M_0 = \frac{1}{2}\,m_1\,r^2\,\frac{a}{r} + r\,m_2\,(a+g) = \frac{1}{2}\,m_1\,r\,a + r\,m_2\,(a+g).$ (5. 117)

Aufgabe 5. 4

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d´ ALEMBERTSCHEN Prinzip
- Bestimmung der Lagerreaktionen
- Reibung zwischen Balken und Klotz
- Massebehaftete Umlenkrolle

Am freien Ende eines in B starr eingespannten, masselosen Brettes (Länge l) ist eine Rolle (Radius r, Masse m) reibungsfrei drehbar gelagert. Über die Rolle läuft ein masseloses, dehnstarres Seil, an dessen Enden die Punktmassen 1 und 2 (Masse jeweils m) befestigt sind. Die Punktmasse 1 rutscht (Reibungskoeffizient μ) auf dem Brett.

gegeben: l, r, $m_1 = m_2 = m$, $\Theta = \frac{1}{2} m\,r^2$, μ

gesucht: Bestimmung der Lagerreaktionen in B in Abhängigkeit von der Lage x des Körpers 1.

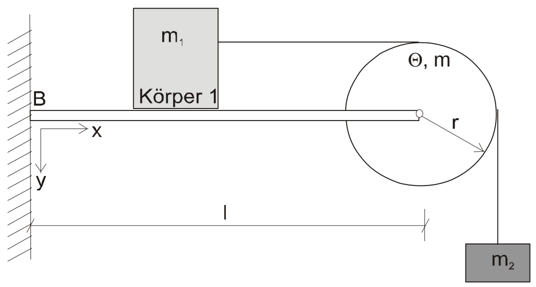


Bild 5. 28 In B starr eingespanntes, masseloses Brett mit Rolle

1. Lösungsmöglichkeit durch Schneiden

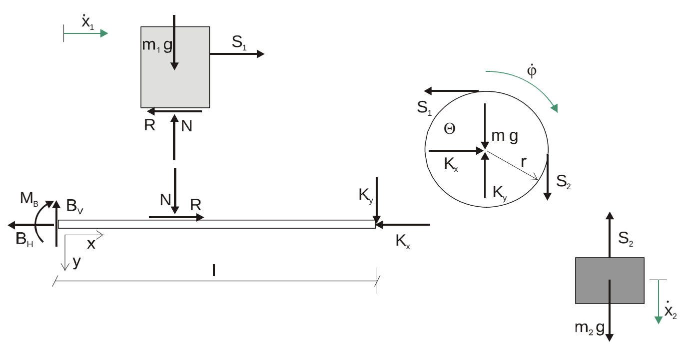


Bild 5. 29 Schnittbild

Zur Ermittlung der Lagerkräfte müssen die Seilkräfte S_1 und S_2 berechnet werden. Dazu ist das Aufstellen der Bewegungsgleichungen notwendig. Für Körper 1 mit $m_1 = m$

$\rightarrow$: $m\,\ddot{x}_1 = S_1 - R,$ (5. 118)

$\uparrow$: $0 = m\,g - N,$ (5. 119)

für die Masse 2

$\downarrow$: $m\,\ddot{x}_2 = m\,g - S_2,$ (5. 121)

und für die Rolle gilt

$\curvearrowleft$: $\Theta\,\ddot{\varphi} = (S_2 - S_1)\,r.$ (5. 122)

Das Reibungsgesetz lautet

$R = \mu\,N = \mu\,m\,g.$ (5. 120)

Die Gleichgewichtsbedingungen an der Rolle sind

$\uparrow$: $0 = K_y - m\,g - S_2,$ (5. 123)

$\rightarrow$: $0 = K_x - S_1.$ (5. 124)

Die Kinematik an der Rolle ergibt die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten

$\dot{x}_1 = \dot{\varphi}\,r = \dot{x}_2 = \dot{x}$ (5. 125)

(5. 125) mit (5. 119) und (5. 121) in (5. 118) ergibt

$m\,\ddot{x} = S_1 - \mu\,m\,g.$ (5. 126)

(5. 125) in (5. 122) ergibt

$m\,\ddot{x} = m\,g - S_2.$ (5. 127)

(5. 126) + (5. 127) ergibt

$2\,m\,\ddot{x} = m\,g\,(1-\mu) + S_1 - S_2.$ (5. 128)

Aus (5. 120) folgt

$\frac{1}{2}\,m\,\ddot{x} = -S_1 + S_2.$ (5. 129)

(5. 129) in (5. 128) ergeben die Beschleunigung der Masse

$2\,m\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\,m\,\ddot{x} = m\,g\,(1-\mu) + S_1 - S_2 - S_1 + S_2$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{2}{5}\,g\,(1-\mu).$ (5. 130)

(5. 130) in (5. 126) ergeben die Seilkraft S_1

$S_1 = m\,(\frac{2}{5}\,g\,(1-\mu) + \mu\,g) = m\,g\,\frac{2+3\mu}{5}$ (5. 131)

und in (5. 130) in (5. 127) ergeben die Seilkraft S_2

$S_2 = -\,m\,g\,(\frac{2}{5}\,g\,(1-\mu)) + m\,g = m\,g\,\frac{3+2\mu}{5}.$ (5. 132)

Aus (5. 123) folgt

$K_y = m\,g\,\frac{8+2\mu}{5},$ (5. 133)

aus (5. 124)

$K_x = m\,g\,\frac{2+3\mu}{5}.$ (5. 134)

Damit ergeben sich die Lagerreaktionen für den Balken

$\rightarrow$: $B_H = R - K_x = \frac{2}{5}\,m\,g\,(\mu - 1),$ (5. 135)

$\uparrow$: $B_V = N + K_y = m\,g\,\frac{13+2\mu}{5},$ (5. 136)

$\curvearrowleft$: $M_B = -\,N\,x - K_y\,l = m\,g\,(-\,x - l\,\frac{8+2\mu}{5}).$ (5. 137)

2. Lösungsmöglichkeit mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

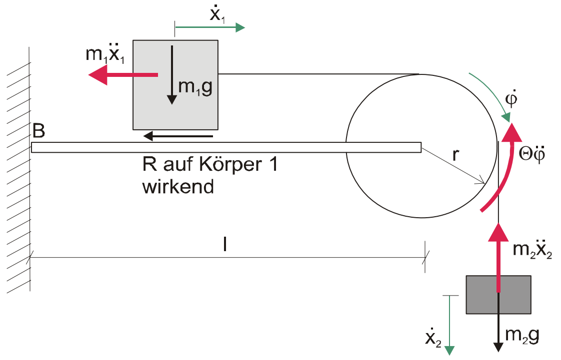


Bild 5. 30 Einführen der Vorzeichen, der äußeren Kräfte, der d´ ALEMBERTschen Scheinkräfte und der Reibungskraft

Hier wird die Reibungsarbeit in den Ausdruck miteinbezogen. Für den Klotz ist es eine negative Arbeit, für den Balken ist sie Null, weil er sich nicht bewegt.

$$\delta W = - \Theta\ \ddot{\varphi}\ \ \delta\varphi - R\ \delta x_1 - m_2\ \ddot{x}_2\ \delta x_2 + m_2\ g\ \delta x_2 - m\ \ddot{x}_1\ \delta x_1 = 0 \qquad (5.\ 138)$$

Mit der Kinematik aus (5. 125) eingesetzt, folgt

$$\delta W = \left(-\ \frac{1}{2}\ m\ r^2\ \frac{1}{r^2}\ \ddot{x}\ -\mu\ m\ g - m\ \ddot{x}\ + m\ g - m\ \ddot{x}\right)\delta x = 0 \qquad (5.\ 139)$$

mit $\delta x \neq 0$ folgt

$$\ddot{x}\ = \frac{2}{5}\ g\ (1 - \mu). \qquad (5.\ 140)$$

Lagerreaktionen ergeben sich durch Schneiden am Balken wie oben.

Aufgabe 5. 5

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip
- Masselose Umlenkrolle
- Haftung zwischen Rolle 1 und Rolle2
- Bestimmung der Beschleunigung
- Bestimmung der Lagerkraft

Mit dem skizzierten System wird das Gewicht (Masse m_3) nach oben gezogen. Die Rollen 1 (Masse m_1, Massenträgheitsmoment Θ_1) und 2 (Masse m_2, Massenträgheitsmoment Θ_2) sind reibungsfrei gelagert. Die Umlenkrolle ist masselos. Das konstante Antriebsmoment MB_0 greift an der Rolle 1 an. Zwischen beiden Rollen besteht Haftung.

gegeben: m_1, m_2, m_3, M_0, r_1, r_2, Θ_1, Θ_2, μ_0

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung $\ddot{x}$ des Gewichtes nach oben und der Auflagerkraft in A.

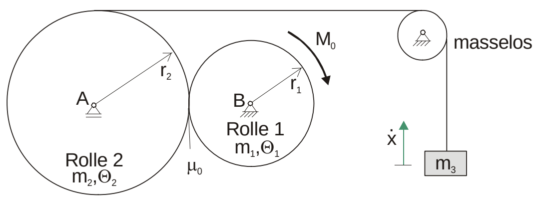


Bild 5. 31 Rollensystem mit der Masse m_3

1. Lösungsmöglichkeit durch Schneiden

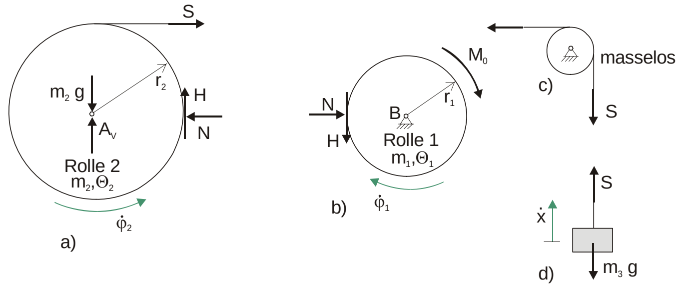


Bild 5. 32 Schnittbild; a) Rolle 1; b) Rolle 2, c) Umlenkrolle; d) Gewicht

Der Momentensatz und die NEWTONschen Bewegungsgleichungen für die Rolle 2

↺: $\Theta_2\ \ddot{\varphi}_2 = H\ r_2 - S\ r_2$ (5. 141)

↑: $A_V = m_2\ g - H,$ (5. 142)

die Rolle 1

↺: $\Theta_1\ \ddot{\varphi}_1 = M_0 - H\ r_1$ (5. 143)

und für das Gewicht mit $S_1 = S_2 = S$ an der Umlenkrolle

↑: $m_3\ \ddot{x}\ = S - m_3\ g.$ (5. 144)

Mit der Kinematik für das Gewicht, das über ein Seil mit der Rolle 2 verbunden ist, gilt

$\dot{x}\ = r_2\ \dot{\varphi}_2$ (5. 145)

und für die Rolle 1, die auf der Rolle 2 rollt, gilt

$r_1\ \dot{\varphi}_1 = r_2\ \dot{\varphi}_2.$ (5. 146)

Mit sechs Unbekannten $\dot{\varphi}_1$, H, S, A_V, $\dot{\varphi}_2$, $\ddot{x}$ folgt aus den sechs Gleichungen

$$\ddot{x}\ = \frac{\dfrac{M_0}{r_1} - m_3\ g}{\left(\dfrac{1}{r_1^2}\ \Theta_1 + \dfrac{1}{r_2^2}\ \Theta_2 + m_3\right)}. \qquad (5.\ 147)$$

Aus (5. 141) folgt die Bestimmung der Auflagerkraft

$$H = (m_3\ \ddot{x}\ + m_3\ g) + \Theta_2\ \frac{\ddot{x}}{r_2^2}, \qquad (5.\ 148)$$

in (5. 142) folgt die Lagerkraft

$$A_V = m_2\ g - H = m_2\ g - (m_3\ \ddot{x}\ + m_3\ g) + \frac{\Theta_2\ \ddot{x}}{r_2^2} = m_2\ g - m_3\ g - \left(m_3 + \frac{\Theta_2}{r_2^2}\right)\ddot{x} \qquad (5.\ 149)$$

2. Lösungsmöglichkeit mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

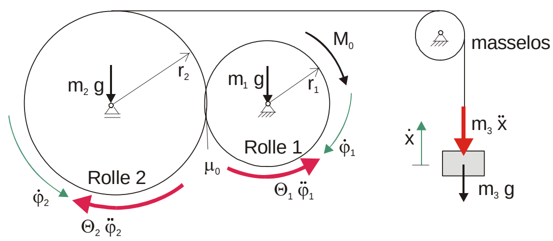


Bild 5. 33 Einführen der Vorzeichen, der äußeren Kräfte und der d´ ALEMBERTschen Scheinkräfte

$$\delta W = - \Theta_2\ \ddot{\varphi}_2\ \delta\varphi_2 - \Theta_1\ \ddot{\varphi}_1\ \delta\varphi_1 + M_0\ \delta\varphi_1 - m_3\ \ddot{x}\ \ \delta x - m_3\ g\ \delta x = 0 \qquad (5.\ 150)$$

Mit der Kinematik aus (5. 145) und (5. 146) in (5. 150) und eingesetzt

$$\delta W = - \Theta_2\ \frac{\ddot{x}}{r_2}\ \frac{\delta x}{r_2} - \Theta_1\ \frac{\ddot{x}}{r_1}\ \frac{\delta x}{r_1} + M_0\ \frac{\delta x}{r_1} - m_3\ \ddot{x}\ \ \delta x - m_3\ g\ \delta x = 0, \qquad (5.\ 151)$$

Die virtuelle Verrückung ausgeklammert

$$\delta x\ \left(- \Theta_2\ \frac{1}{r_2}\ \frac{1}{r_2}\ \ \ddot{x}\ - \Theta_1\ \frac{1}{r_1}\ \frac{1}{r_1}\ \ \ddot{x}\ + M_0\ \frac{1}{r_1}\ - m_3\ \ddot{x}\ - m_3\ g\right) = 0 \qquad (5.\ 152)$$

mit $\delta x \neq 0$ folgt

$$\ddot{x} = \frac{\frac{M_0}{r_1} - g m_3}{(\frac{1}{r_1^2}\Theta_1 + \frac{1}{r_2^2}\Theta_2 + m_3)} \qquad (5.153)$$

Die Auflagerkraft A_V ergibt sich durch Schneiden wie im oberen Lösungsweg.

Aufgabe 5. 6

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

Ein Fahrzeug, vereinfacht durch zwei homogene, zylindrische Walzen (Massen m) dargestellt, die durch einen Balken (Masse m_0) verbunden sind, rollt auf einer horizontalen Bahn infolge eines Moments M_0, das vom Motor auf die hintere Walze (ideale Lagerung) abgegeben wird.

gegeben: m, r, m_0, M_0

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung $\ddot{x}$ des Fahrzeugs und der Kräfte in den Radlagern A und B.

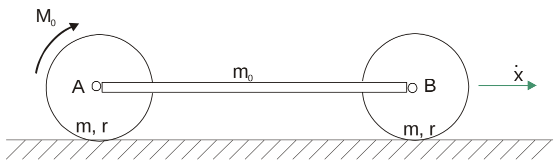


Bild 5. 34 Fahrzeug, vereinfacht durch zwei homogene, zylindrische Walzen dargestellt

1. Lösungsmöglichkeit durch Schneiden

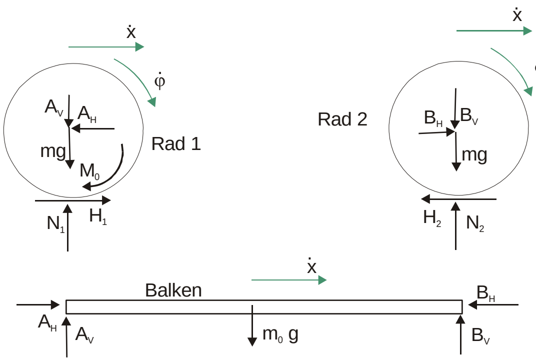


Bild 5. 35 Schnittbild

Die NEWTONschen Bewegungsgleichungen und Momentensätze für das Rad 1

$$m\ \ddot{x} = - A_H + H_1, \qquad (5.154)$$

$$\Theta_A\ \ddot{\varphi} = - H_1 r + M_0, \qquad (5.155)$$

und das Rad 2

$$m\ \ddot{x} = B_H - H_2, \qquad (5.156)$$

$$\Theta_B\ \ddot{\varphi} = H_2 r. \qquad (5.157)$$

Mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta_A = \frac{1}{2} m r^2$ folgt aus (5. 155)

$$\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\varphi} = - H_1 r + M_0, \qquad (5.158)$$

mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta_B = \frac{1}{2} m r^2$ folgt aus (5. 157)

$$\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\varphi} = H_2 r. \qquad (5.159)$$

Für den Balken gilt

$$m_0\ \ddot{x} = A_H - B_H, \qquad (5.160)$$

und aus der Statik wegen der geführten Bewegung

$$A_V = \frac{1}{2} m_0 g, \qquad (5.161)$$

$$B_V = \frac{1}{2} m_0 g. \qquad (5.162)$$

Die Kinematik liefert

$$\dot{x} = r\ \dot{\varphi}. \qquad (5.163)$$

Aus (5. 159) mit (5. 163)

$$H_2 = \frac{1}{2} m\ \ddot{x} \qquad (5.164)$$

aus (5. 156) mit (5. 164) folgt

$$B_H = \frac{3}{2} m\ \ddot{x} \qquad (5.165)$$

aus (5. 159)

$$H_1 = -\frac{1}{2} m\ \ddot{x} + \frac{1}{r} M_0 \qquad (5.166)$$

aus (5. 154)

$$A_H = \frac{1}{r} M_0 - \frac{3}{2} m\ \ddot{x} \qquad (5.169)$$

in (5. 160) liefert die Beschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{M_0}{r(m_0+3m)}. \qquad (5.170)$$

Die Auflagerkräfte liefern (5. 161), (5. 162), (5. 165) und (5. 169)

$$A_H = \frac{M_0(m_0+\frac{3}{2}m)}{r(m_0+3m)},\ A_V = \frac{1}{2} m_0 g,\ B_H = \frac{\frac{3}{2}M_0 m}{r(m_0+3m)},\ B_V = \frac{1}{2} m_0 g. \qquad (5.171)$$

2. Lösungsmöglichkeit mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

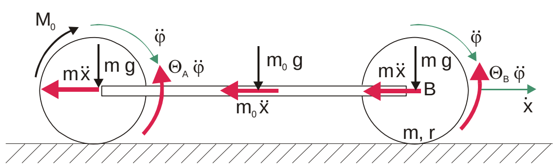


Bild 5. 36 Einführen der Vorzeichen, der äußeren Kräfte und der d´ ALEMBERTschen Scheinkräfte

Der Arbeitssatz liefert

$$\delta W = (M_0 - \Theta_A\ \ddot{\varphi})\ \delta\varphi - \Theta_B\ \ddot{\varphi}\ \delta\varphi - 2\ m\ \ddot{x}\ \delta x - m_0\ \ddot{x}\ \delta x = 0 \qquad (5.170)$$

Mit der Kinematik aus (5. 163) und den Massenträgheitsmomenten $\Theta_A = \frac{1}{2} m r^2$ und $\Theta_B = \frac{1}{2} m r^2$ folgt

$$\delta W = (M_0 - \frac{1}{2} m r^2 \frac{1}{r} \ddot{x}) \frac{1}{r} \delta x - \frac{1}{2} m r^2 \frac{1}{r} \ddot{x} \frac{1}{r} \delta x - 2\ m\ \ddot{x}\ \delta x - m_0\ \ddot{x}\ \delta x = 0, \qquad (5.171)$$

$$\delta W = ((M_0 \frac{1}{r} - \frac{1}{2} m\ \ddot{x}) - \frac{1}{2} m\ \ddot{x} - 2\ m\ \ddot{x} - m_0\ \ddot{x})\ \delta x = 0 \qquad (5.172)$$

mit der virtuellen Verrückung $\delta x \neq 0$ folgt die Beschleunigung

$$M_0 \frac{1}{r} = (3\ m + m_0)\ \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{M_0}{r(m_0+3m)} \qquad (5.173)$$

Die Schnittkräfte erhält man durch Schneiden wie in der oberen Lösungsmethode.

Aufgabe 5. 7

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und Momentensatz am starren Körper
- Lösung durch Schneiden

In dem skizzierten Planetengetriebe ist das Zahnrad 1 in 0 reibungsfrei drehbar gelagert, Zahnrad 2 läuft einerseits auf Zahnrad 1, andererseits in einem feststehenden Zahnkranz, dessen Mittelpunkt in 0 liegt. Die Zahnräder (homogene Scheiben) haben gleiche Massen m und gleiche Radien r.

gegeben: m, r, ψ_0.

gesucht: Bestimmung der Beschleunigungen $\ddot{\varphi}_1(\psi)$ und $\ddot{\psi}(\psi)$ und der Größe der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ für $\psi = 90^0$, wenn das System ohne Anfangsgeschwindigkeit aus der Lage $\psi_0 = 60^0$ losgelassen wird.

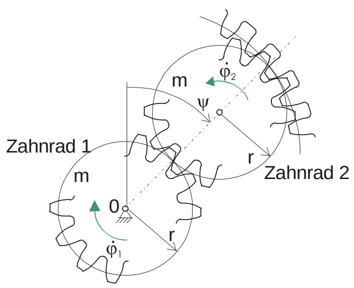


Bild 5. 37 Planetengetriebe

Lösung

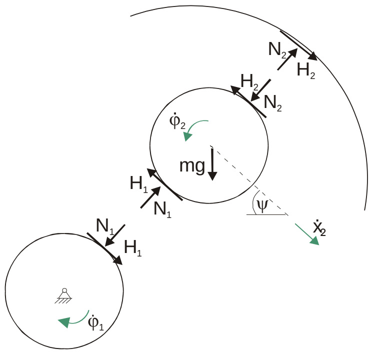


Bild 5. 38 Schnittbild

Die Momentensätze und NEWTONschen Bewegungsgleichungen für das Zahnrad 1 lautet

$\Theta\,\ddot{\varphi}_1 = H_1 r,$ (5. 174)

das Zahnrad 2

$\Theta\,\ddot{\varphi}_2 = H_2 r - H_1 r,$ (5. 175)

$m\,\ddot{x}_2 = m g \sin\psi - H_1 - H_1.$ (5. 176)

Die Kinematik folgt aus Bild 5. 39

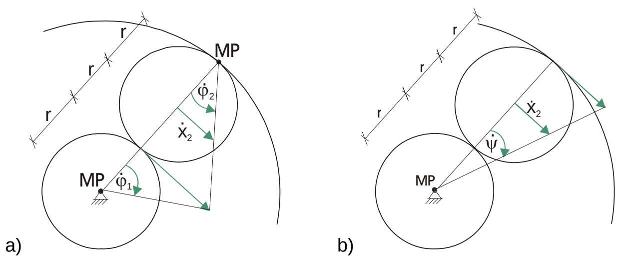


Bild 5. 39 Kinematik des Systems; a) Geschwindigkeiten der beiden Zahnräder, die aufeinander abrollen; b) Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ der Verbindungsgeraden

$r\,\dot{\varphi}_1 = 2\,r\,\dot{\varphi}_2,$ (5. 177)

$\dot{x}_2 = r\,\dot{\varphi}_2,$ (5. 178)

$\dot{x}_2 = 2\,r\,\dot{\psi} = r\,\dot{\varphi}_2.$ (5. 179)

Der Momentanpol des Zahnrads 2 ist nur für kleine Bewegungen in Ruhe (siehe Geschwindigkeitsverteilung Bild 5. 39 a und b).

Die Berechnung der Beschleunigungen erfolgt mit $\Theta = \frac{1}{2}\,m\,r^2$ und (5. 175) in (5. 178) und (5. 179) * r

$\frac{3}{2} m\,r\,\ddot{x}_2 = r\,m\,g\,\sin\psi - 2\,H_1\,r,$ (5. 180)

mit (7)/ 2, (4) und (5. 175) folgt

$\frac{7}{4} m\,r\,\ddot{x}_2 = \frac{1}{2} r\,m\,g\,\sin\psi.$ (5. 181)

Daraus folgen die Beschleunigungen des Planetengetriebes

$\ddot{x}_2 = \frac{2}{7} g \sin\psi\,,\ \ddot{\varphi}_1 = \frac{4}{7}\frac{g}{r}\sin\psi,\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{2}{7}\frac{g}{r}\sin\psi,\ \ddot{\psi} = \frac{1}{7}\frac{g}{r}\sin\psi$ (5. 182)

Aus der Trennung der Veränderlichen

$\ddot{\psi} = \frac{d\dot{\psi}}{dt} = \frac{d\dot{\psi}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\dot{\psi}}{d\psi}\dot{\psi} \quad\Rightarrow\quad \dot{\psi}\,d\dot{\psi} = \frac{1}{7}\frac{g}{r}\sin\psi\,d\psi$ (5. 183)

und mit der Integration folgt

$\int_0^{\dot{\psi}}\dot{\psi}\,d\dot{\psi} = \frac{1}{7}\frac{g}{r}\int_{\psi_0=60°}^{\psi=90°}\sin\psi\,d\psi \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 = \frac{1}{7}\frac{g}{r}(-\,0 + \cos 60^0).$ (5. 184)

Daraus folgt die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$

$\dot{\psi}(\psi) = \sqrt{\frac{g}{7r}}\,.$ (5. 185)

Aufgabe 5. 8

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

Zwei Walzen 1 und 2 sind auf einer gemeinsamen Achse A gelagert. Sie können sich unabhängig voneinander drehen. Die Walze 1 rollt auf einer horizontalen Ebene und ist über ein Seil S_1 mit der Masse 3 verbunden. Das um die Walze 2 geschlungene Seil S_2 ist an der Wand befestigt.

gegeben: m_1, m_2, m_3, Θ_1, Θ_2, r, R

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung $\ddot{x}_1$ der gemeinsamen Achse A und der Seilkraft S_1

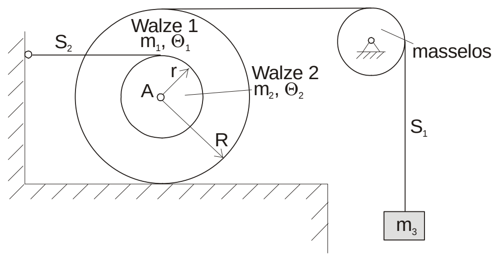


Bild 5. 40 Zwei Walzen 1 und 2 auf einer gemeinsamen Achse A

1. Lösungsmöglichkeit durch Schneiden

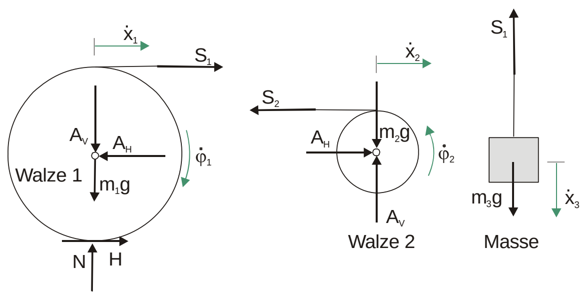


Bild 5. 41 Schnittbild

Die NEWTONschen Bewegungsgleichungen und die Momentensätze lauten für die Walze 1

$m_1\,\ddot{x}_1 = S_1 - A_H + H,$ (5. 186)

$\Theta_1\,\ddot{\varphi}_1 = S_1 R - H R,$ (5. 187)

für die Walze 2

$m_2\,\ddot{x}_2 = A_H - S_2,$ (5. 188)

$\Theta_2\,\ddot{\varphi}_2 = S_2\,r$ (5. 189) und für die Masse

$$m_3\,\ddot{x}_3 = m_3\,g - S_1. \qquad (5.190)$$

Mit der Kinematik in Bild 5. 42 folgt

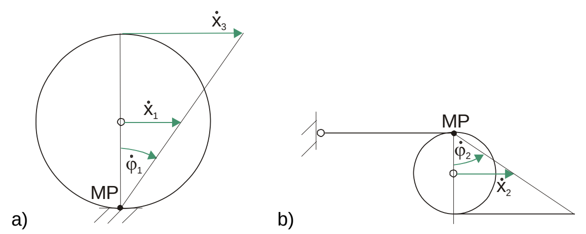


Bild 5. 42 Kinematik a) an der Walze 1; b) an der Walze 2

$$\dot{x}_3 = 2\,\dot{x}_1 \qquad (5.191)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{x}_1}{R} \qquad (5.192)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_2}{r} \qquad (5.193)$$

Die Geschwindigkeit der gemeinsame Achse A

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x} \qquad (5.194)$$

Mit der Kinematik aus (5. 191), (5. 192) und (5. 193) und nach der Elimination von S_1, S_2, H, A_H folgt die Beschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{2gm_3}{m_1+m_2+4m_3+\frac{\Theta_1}{R^2}+\frac{\Theta_2}{r^2}}. \qquad (5.195)$$

Aus (5. 190) folgt die Seilkraft mit (5. 195)

$$S_1 = m_3\,g\,\frac{m_1+m_2+\frac{1}{R^2}\Theta_1+\frac{1}{r^2}\Theta_2}{m_1+m_2+4m_3+\frac{1}{R^2}\Theta_1+\frac{1}{r^2}\Theta_2}. \qquad (5.196)$$

2. Lösungsmöglichkeit mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

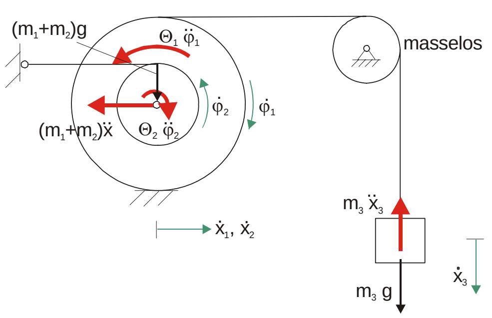


Bild 5. 43 Einführen der Vorzeichen, der äußeren Kräfte und der d´ ALEMBERTschen Scheinkräfte

Der Arneitsatz liefert

$$\delta W = (m_3\,g - m_3\,\ddot{x}_3)\,\delta x_3 - (m_1+m_2)\,\ddot{x}\,\delta x - \Theta_1\,\ddot{\varphi}_1\,\delta\varphi_1 - \Theta_2\,\ddot{\varphi}_2\,\delta\varphi_2 = 0. \qquad (5.197)$$

Mit der Kinematik aus (5. 191), (5. 192) und (5. 193) in Bild 5. 42 folgt

$$\delta W = (m_3\,g - m_3\,2\,\ddot{x})\,2\,\delta x - (m_1+m_2)\,\ddot{x}\,\delta x - \Theta_1\,\frac{1}{R^2}\,\ddot{x}\,\delta x - \Theta_2\,\frac{1}{r^2}\,\ddot{x}\,\delta x = 0, \qquad (5.198)$$

$$\left(2\,m_3\,g - \left(4\,m_3 - m_1 - m_2 - \frac{\Theta_1}{R^2} - \frac{\Theta_2}{r^2}\right)\ddot{x}\right)\delta x = 0. \qquad (5.199)$$

Mit der virtuellen Verrückung $\delta x \neq 0$ folgt die Beschleunigung

$$\ddot{x}_1 = \frac{2gm_3}{m_1+m_2+4m_3+\frac{\Theta_1}{R^2}+\frac{\Theta_2}{r^2}}. \qquad (5.200)$$

Bestimmung der Stabkraft S_1 durch Schneiden wie in der oberen Lösungsmöglichkeit.

Aufgabe 5. 9

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung mit dem Energiesatz
- Lösung mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

Eine Stufenrolle 1 (Masse m_1, Gesamtmassenträgheitsmoment Θ_1, Radien r und r + R) rollt auf einer schiefen Ebene und ist mit einem dehnstarren, masselosen Seil über die in A reibungsfrei drehbar gelagerte Rolle 2 (m_2, R) mit der Rolle 3 (m_3, R) verbunden. Über die Rolle 3 ist ein weiteres Seil geführt, das einerseits bei B befestigt ist und an dessen anderem Ende die Masse M hängt.

gegeben: m_1, $m_2 = m$, $m_3 = m$, M, r, R, Θ_1,α

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung $\ddot{x}_1$ des Schwerpunktes der Stufenrolle 1 und der Größe der Masse M, damit das System in Ruhe ist.

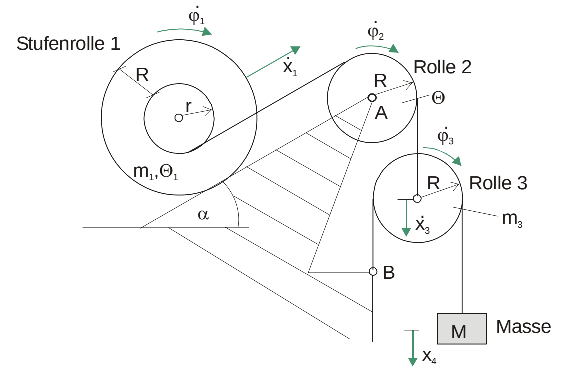


Bild 5. 44 Stufenrolle 1 auf einer schiefen Ebene

1. Lösungsmöglichkeit mit dem Energiesatz

Der Energieerhaltungssatz lautet mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta = \frac{1}{2}\,m\,r^2$

$$m_1\,g\sin\alpha\;x_1 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\Theta_1\dot{\varphi}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\Theta\,\dot{\varphi}_2^{\,2} + \frac{1}{2}\Theta\,\dot{\varphi}_3^{\,2} + \frac{1}{2}m\,\dot{x}_3^{\,2} - m\,g\,x_3 - M\,g\,x_4 + \frac{1}{2}M\,\dot{x}_4^{\,2} = \text{const.} \qquad (5.201)$$

nach Ableitung nach der Zeit $\frac{d}{dt}$ (5. 201) folgt

$$m_1\,g\sin\alpha\;\dot{x}_1 + m_1\,\dot{x}_1\,\ddot{x}_1 + \Theta_1\,\dot{\varphi}_1\,\ddot{\varphi}_1 + \Theta\,\dot{\varphi}_2\,\ddot{\varphi}_2 + \Theta\,\dot{\varphi}_3\ddot{\varphi}_3 + m\,\dot{x}_3\ddot{x}_3 - m\,g\,\dot{x}_3 - M\,g\,\dot{x}_4 + M\,\dot{x}_4\,\ddot{x}_4 = 0. \qquad (5.202)$$

Die Kinematik liefert nach Bild 5. 45

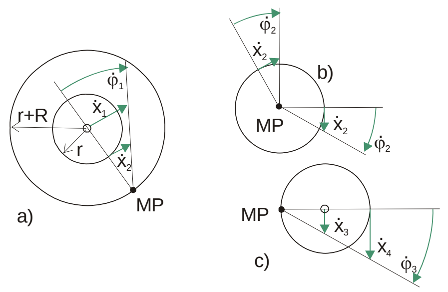


Bild 5. 45 Kinematik; a) Stufenrolle 1; b) Rolle 2; c) Rolle 3

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1\,(r+R) \qquad (5.203)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi}_1\,R \qquad (5.204)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi}_2\,R \qquad (5.205)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\varphi}_3\,R \qquad (5.206)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 \qquad (5.207)$$

$$\dot{x}_4 = 2\,\dot{x}_3 \qquad (5.208)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 \qquad (5.209)$$

(5. 203) bis (5. 209) in (5. 202) ergibt

$$\dot{x}_1 \ddot{x}_1 \left(m_1 + \Theta_1 \frac{1}{(1+R)^2} + 2\,\Theta \frac{1}{(r+R)^2} + m \frac{1}{(r+R)^2} R^2 + M \frac{1}{(r+R)^2} 4R^2\right)$$

$$= \dot{x}_1 \left(-m_1 g \sin\alpha + m g \frac{R}{(r+R)} + M g \frac{2R}{(r+R)}\right). \qquad (5.210)$$

Daraus folgt für $\dot{x}_1 \neq 0$ die Beschleunigung $\ddot{x}_1$

$$\ddot{x}_1 = g \frac{\left[m \frac{R}{(r+R)} + M \frac{2R}{(r+R)} - m_1 \sin\alpha\right]}{m_1 + \Theta_1 \frac{1}{(1+R)^2} + 2\Theta \frac{1}{(r+R)^2} + m \frac{R^2}{(r+R)^2} + 4MR^2 \frac{1}{(r+R)^2}}$$

$$= \frac{g(r+R)(mR+2MR-m_1(r+R)\sin\alpha)}{m_1(r+R)^2 + mR^2 + 4MR^2 + \Theta_1 + 2\Theta_2}. \qquad (5.211)$$

Zur Bestimmung der Masse M, für die das System in Ruhe ist, gilt

$$\ddot{x}_1 = 0. \qquad (5.212)$$

Dann folgt

$$m R + 2 M R - m_1 (r + R) \sin\alpha = 0 \qquad (5.213)$$

und die Masse M

$$M = \frac{1}{2} m_1 \frac{(r+R)\sin\alpha}{R} - \frac{1}{2} m. \qquad (5.214)$$

2. Lösungsmöglichkeit mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

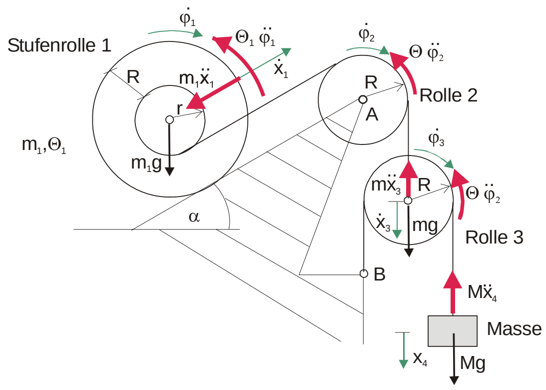


Bild 5. 46 Einführen der Vorzeichen, den äußeren Kräften und der d´ ALEMBERTschen Scheinkräfte

Der Arbeitssatz lautet

$$\delta W = \delta x_1 (-m_1 g \sin\alpha - m_1 \ddot{x}_1) + \delta\varphi_1 (-\Theta_1 \ddot{\varphi}_1) + \delta\varphi_2 (-\Theta \ddot{\varphi}_2) + \delta x_3 (m g - m \ddot{x}_3)$$
$$+ \delta\varphi_3 (-\Theta_1 \ddot{\varphi}_3) + \delta x_4 (M g - M \ddot{x}_4) = 0 \qquad (5.215)$$

Mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta = \frac{1}{2} m r^2$ und der Kinematik (5. 203) bis (5. 209) in (5. 215) folgt

$$0 = \delta x_1 [(-m_1 g \sin\alpha - m_1 \ddot{x}_1) + (-\Theta_1 \frac{1}{(r+R)^2} \ddot{x}_1) + (-\Theta \frac{1}{(r+R)^2} \ddot{x}_1)$$
$$+ (\frac{R}{(r+R)} (-m g + m \frac{R}{(r+R)} \ddot{x}_1)) + (-\Theta_1 \frac{1}{(r+R)^2} \ddot{x}_1)$$
$$+ (2 \frac{R}{(r+R)} (-M g + M 2 \frac{R}{(r+R)} \ddot{x}_1))] \qquad (5.216)$$

Ausdruck in den eckigen Klammern muß Null sein, da die virtuelle Verrückung $\delta x_1 \neq 0$. Dann ergibt sich die Beschleunigung $\ddot{x}_1$ zu

$$\ddot{x}_1 = \frac{g(r+R)(mR+2MR-m_1(r+R)\sin\alpha)}{m_1(r+R)^2 + mR^2 + 4MR^2 + \Theta_1 + 2\Theta_2}. \qquad (5.217)$$

Die Massenberechnung für das ruhende System erhält man durch die Berechnung wie im oberen Lösungsansatz.

Aufgabe 5. 10

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichungen und des Momentensatzes am starren Körper
- Lösung durch Schneiden
- Lösung mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

Eine Walze (Masse m_2, Radius r) rollt eine rauhe, schiefe Ebene hinab. Um die Walze ist ein masseloses Seil geschlungen, an das ein Wagen (Masse m_1, masselose Räder) angehängt ist.

gegeben: m_1, m_2, r, α

gesucht: Bestimmung der Beschleunigung des Schwerpunktes $\ddot{x}$ der Walze und der Seilkraft S.

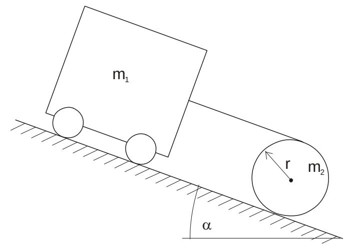


Bild 5. 47 Walze auf einer rauhen, schiefen Ebene

Lösung

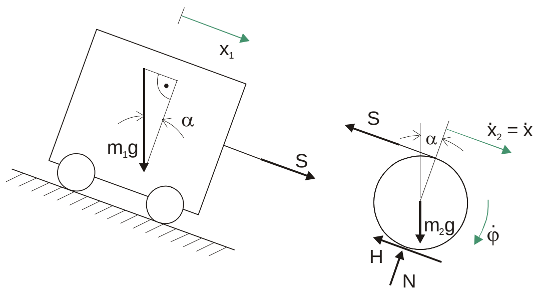


Bild 5. 48 Schnittbild

Die NEWTONsche Bewegungsgleichungen für den Wagen lauten

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin\alpha + S \qquad (5.218)$$

und der Momentensatz für die Walze

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \sin\alpha - S - H, \qquad (5.219)$$

$$0 = N - m_2 g \cos\alpha, \qquad (5.220)$$

$$\Theta_{2S} \ddot{\varphi} = H r - S r. \qquad (5.221)$$

Mit der Kinematik folgt

$$\ddot{\varphi}\, 2 r = \ddot{x}_1, \qquad (5.222)$$

$$\ddot{\varphi}\, r = \ddot{x}_2 = \ddot{x}, \qquad (5.223)$$

$$\ddot{x}_1 = 2 \ddot{x}. \qquad (5.224)$$

Aus (5. 218) folgt

$$S = m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g \sin\alpha, \qquad (5.225)$$

in (5. 219)

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \sin\alpha - m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g \sin\alpha - H. \qquad (5.226)$$

Daraus folgt

$$m_2 \ddot{x}_2 + m_1 \ddot{x}_1 = g \sin\alpha (m_2 + m_1) - H. \qquad (5.227)$$

Aus (5. 221) folgt

$$H = \Theta_{2S}\,\frac{\ddot{\varphi}}{r} + m_1\,\ddot{x}_1 - m_1\,g\sin\alpha \qquad (5.\,228)$$

in (5. 224)

$$m_2\,\ddot{x}_2 + m_1\,\ddot{x}_1 + \Theta_{2S}\,\frac{\ddot{\varphi}}{r} = m_2\,g\sin\alpha + m_1\,g\sin\alpha + m_1\,g\sin\alpha. \qquad (5.\,229)$$

Mit (5, 6, 7) in (9) und dem Massenträgheitsmoment $\Theta_{2S} = \frac{1}{2}\,m_2\,r^2$ ergibt

$$(4\,m_1 + \frac{3}{2}\,m_2)\;\ddot{x} = g\sin\alpha\,(2m_1 + m_2). \qquad (5.\,230)$$

Die Beschleunigung der Walze ist

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\alpha\,(2\,m_1 + m_2)}{4\,m_1 + \frac{3}{2}m_2}. \qquad (5.\,231)$$

(5. 231) in (5. 225) ergibt die Seilkraft

$$S = m_1\,2\;\ddot{x} - m_1\,g\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}m_2\,g\sin\alpha}{4\,m_1 + \frac{3}{2}m_2}. \qquad (5.\,232)$$

Aufgabe 5. 11

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Vollplastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß
- Berechnung der maximalen Federauslenkung mit dem Energiesatz

Eine Punktmasse m_1 stößt plastisch mit der Geschwindigkeit v_0 auf einen homogenen Balken (Masse m_2, Länge l), der in A drehbar gelagert ist und bei B durch eine Feder (Federsteifigkeit c) gehalten wird.

gegeben: m_1, m_2, l, v_0, c, die Feder hat auf den Stoßvorgang keinen Einfluß

gesucht: Bestimmung der Größe der maximalen Federauslenkung x_{max}.

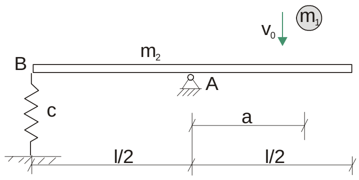


Bild 5. 49 Punktmasse m_1 stößt plastisch auf einen homogenen Balken

Lösung

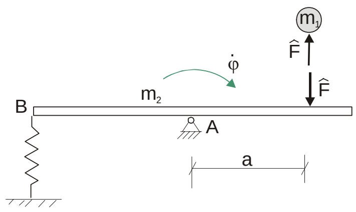


Bild 5. 50 Stoßschnittbild

Der Impulssatz für die Masse m_1

$$m_1\,(\dot{x}_n - \dot{x}_v) = -\,\hat{F}, \qquad (5.\,233)$$

und der Drehimpulssatz für den Balken lautet, wobei die Feder auf den Stoßvorgang keinen Einfluß hat,

$$\Theta_2^{(A)}\,(\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_v) = a\,\hat{F}. \qquad (5.\,234)$$

Mit der Stoßbedingung folgt

$$w_2 - w_1 = -e\,(v_2 - v_1), \qquad (5.\,235)$$

mit der Stoßzahl e = 0 für den vollplastischen Stoß, $v_1 = \dot{x}_V = v_0$, $v_2 = a\,\dot{\varphi}_V = 0$ ergibt sich

$$w_1 = \dot{x}_n \text{ und } w_2 = a\,\dot{\varphi}_n. \qquad (5.\,236)$$

Aus (5. 233) folgt

$$m_1\,(\dot{x}_n - v_0) = -\,\hat{F}, \qquad (5.\,237)$$

aus (5. 234)

$$\Theta_2^{(A)}\,\dot{\varphi}_n = a\,\hat{F}, \qquad (5.\,238)$$

und aus (5. 235)

$$\dot{x}_n = a\,\dot{\varphi}_n. \qquad (5.\,239)$$

Mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta_2^{(A)} = \frac{1}{12}\,m_2\,l^2$ ergibt sich mit $\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit

$$a\,m_1\,(a\,\dot{\varphi} - v_0) + \Theta_2^{(A)}\,\dot{\varphi} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\varphi} = \frac{a v_0}{a^2 + \frac{1}{12}\frac{m_2}{m_1}l^2}. \qquad (5.\,240)$$

Der Energiesatz nach dem Stoß liefert die maximale Federauslenkung x_{max}

$$\frac{1}{2}\,[\Theta_2^{(A)} + m_1\,a^2]\;\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\,c\,x_{max}^2 - m_1\,g\,\frac{a}{\frac{l}{2}}\,x_{max}, \qquad (5.\,241)$$

$$x_{max}^2 - \frac{4ag}{lc}\,m_1\,x_{max} - \frac{\Theta_2^{(A)} + m_1 a^2}{c}\;\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad (5.\,242)$$

$$x_{max\,1,\,2} = \frac{2ag}{lc}\,m_1 \pm \sqrt{\frac{4a^2g^2}{l^2c^2}m_1^2 + \frac{(\Theta_2^{(A)} + m_1a^2)}{c}\dot{\varphi}^2}$$

$$= \frac{2ag}{lc}\,m_1\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{(\Theta_2^{(A)} + m_1a^2)\dot{\varphi}^2 c l^2}{4a^2g^2m_1^2}}\right\} \qquad (5.\,243)$$

Mit (5. 240) und $\Theta_2^{(A)}$ eingesetzt, folgt

$$x_{max\,1,\,2} = \frac{2agm_1}{lc}\;[1 + \sqrt{1 + \frac{c l^2 v_0^2}{4g^2m_1^2(a^2 + \frac{1}{12}m_2 l^2)}}\;]. \qquad (5.\,244)$$

Aufgabe 5. 12

- Aufstellung des Drallsatzes
- Berechnung der Winkelgeschwindigkeit
- Berechnung der maximalen Winkelbeschleunigung für Haften

Eine Kreisscheibe (Masse m_1, Radius r) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um ihre vertikale Achse. Ein dünner Stab (Masse m_2, Länge r), der gleichfalls um diese Achse rotieren kann, wird zur Zeit t = 0 ohne Anfangsgeschwindigkeit auf die rotierende Scheibe gelegt. Zunächst soll der Stab auf der Scheibe rutschen (Reibungskoeffizient μ).

gegeben: m_1, r, m_2, ω_0, μ, μ_0

gesucht: Bestimmung der Zeit t_1 und deren Größe, nach der beide Körper die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω_1 haben. Bestimmung der Größe der Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$, die die Scheibe nach Beendigung des Rutschvorgangs beschleunigt, wenn der Stab weiterhin auf der Scheibe haften soll (Haftungskoeffizient μ_0).

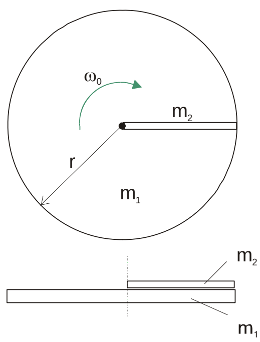


Bild 5. 51 Kreisscheibe mit dünnem Stab

Lösung

Die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit erhält man durch den Drallsatzes. Da kein äußeres Moment wirkt, folgt

$\vec{L}$ = const. $\quad\Rightarrow\quad L_0 = \Theta_1\ \dot\omega_0 = (\Theta_1 + \Theta_2)\ \omega_1 = L_1.$ (5. 245)

Mit dem Massenträgheitsmoment der Scheibe $\Theta_1 = \frac{1}{2}\ m_1\ r^2$ und des Stabes $\Theta_2 = \frac{1}{3}\ m_2\ r^2$ in (5. 245) eingesetzt und aufgelöst, ergibt Die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \omega_0\ \frac{1}{1+\frac{2m_2}{3m_1}}. \qquad (5.\ 246)$$

Der Momentensatz für die Scheibe ergibt

$$\Theta_2\ \dot\omega = R\ \frac{r}{2} = \mu\ m_2\ g\ \frac{r}{2}. \qquad (5.\ 247)$$

Der Stab wird durch Reibung zwischen Stab und Scheibe beschleunigt. Die Reibungskraft greift im Schwerpunkt des Stabes an. Das Reibungsgesetz lautet

$$R = \mu\ N = \mu\ m_2\ g. \qquad (5.\ 248)$$

Nach Integration von (5. 247) nach der Zeit mit den Anfangsbedingungen $\omega_0 = 0$ folgt

$$\Theta_2\ (\omega - 0) = \mu\ m_2\ g\ \frac{r}{2}\ t. \qquad (5.\ 249)$$

Daraus ergibt sich die Zeit

$$t = \frac{2\Theta_2}{\mu m_2 g r}\ \omega = \frac{2}{3}\frac{r\omega}{\mu g}. \qquad (5.\ 250)$$

Für gleiche Winkelgeschwindigkeiten $\omega = \omega_1$ ergibt sich die benötigte Zeit

$$t_1 = \frac{2}{3}\frac{r\omega_1}{\mu g}\ \frac{1}{1+\frac{2m_2}{3m_1}}. \qquad (5.\ 251)$$

Aus (5. 247) ergibt sich die maximale Winkelbeschleunigung

$$\Theta_2\ \dot\omega_{max} = M_{max} \Rightarrow \qquad \dot\omega_{max} = \frac{M_{max}}{\Theta_2}. \qquad (5.\ 252)$$

Wenn der Stab noch haften soll, gilt

$$M_{max} = H_{max}\ \frac{r}{2}, \qquad (5.\ 253)$$

mit der maximalen Haftkraft

$$H_{max} = \mu_0\ m_2\ g. \qquad (5.\ 254)$$

Daraus ergibt sich die maximale Winkelbeschleunigung

$$\dot\omega_{max} = \frac{3\mu_0 m_2 g r}{2 m_2 r^2} = \frac{3}{2}\mu_0\ \frac{g}{r}. \qquad (5.\ 255)$$

Aufgabe 5. 13

- Aufstellung des Momentensatzes
- Berechnung der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung
- Berechnung der Lagerkräfte

Ein dünner, homogener Stab ist in A frei drehbar gelagert und durch ein Seil in horizontaler Lage gehalten.

gegeben: l, m

gesucht: Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ und der Winkelbeschleunigung $\ddot\varphi$ nach dem Durchschneiden des Seils in Abhängigkeit von φ und die Lagerreaktionen in A für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

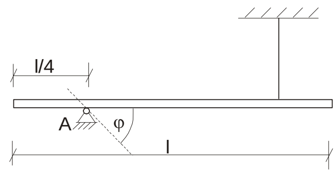


Bild 5. 52 Dünner, homogener Stab ist in A frei drehbar gelagert und durch ein Seil in horizontaler Lage gehalten

Lösung

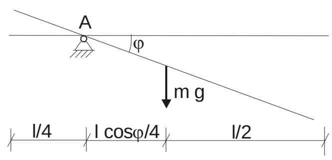


Bild 5. 53 Bewegung des Stabes nach Abtrennen des Seiles

Der Momentensatz um B liefert

$$\Theta_B\ \ddot\varphi = m\ g\ \frac{l}{4}\ \cos\varphi \qquad (5.\ 256)$$

mit dem Massenträgheitsmoment

$$\Theta_B = \frac{1}{12}\ m\ l^2 + m\ (\frac{1}{4}\ l)^2 = \frac{7}{48}\ m\ l^2 \qquad (5.\ 257)$$

folgt die Winkelbeschleubigung des Balkens

$$\frac{7}{48}\ m\ l^2\ \ddot\varphi = m\ g\ \frac{l}{4}\ \cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \ddot\varphi = \frac{12}{7}\ \frac{g}{l}\ \cos\varphi. \qquad (5.\ 258)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich durch die Integration

$$\ddot\varphi = \frac{d\dot\varphi}{dt} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\ \dot\varphi \quad\Rightarrow\quad \int\dot\varphi\cdot d\dot\varphi = \frac{12}{7}\ \frac{g}{l}\ \int\cos\varphi\cdot d\varphi \qquad (5.\ 259)$$

mit Anfangsbedingungen $\varphi = 0$, $\dot\varphi = 0$

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} = \frac{12}{7}\ \frac{g}{l}\ \sin\varphi \quad\Rightarrow\quad \dot\varphi = \sqrt{\frac{24}{7}\frac{g}{l}\sin\varphi}. \qquad (5.\ 260)$$

Die Lagerreaktionen in B berechnet sich aus der Winkelgeschwindigkeit für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\dot\varphi^2 = \frac{24}{7}\ \frac{g}{l} \qquad (5.\ 261)$$

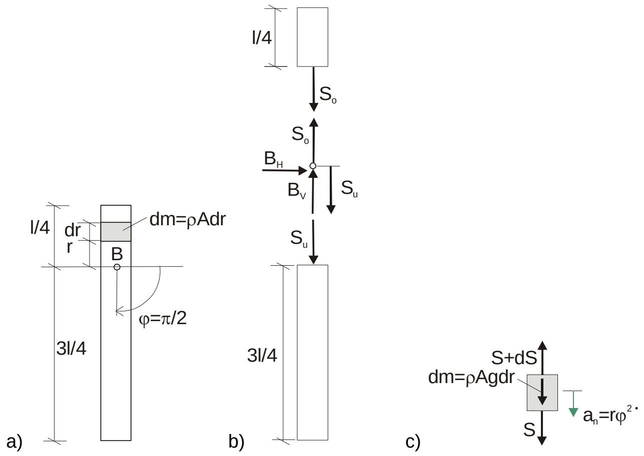


Bild 5. 54 a) Stab in B gelagert; b) Schnitt in B; c) am infinitesimalem Element dm

Die Bewegungsgleichung am Element lautet

$$dm\, a_n = \rho\, A\, g\, dr - dS \tag{5. 262}$$

mit der Masse

$$dm = \rho\, A\, dr \tag{5. 263}$$

und der Beschleunigung in Normalenrichtung

$$a_n = r\, \dot\varphi^{\,2} \tag{5. 264}$$

folgt mit

$$\rho\, A\, \dot\varphi^{\,2} \int_0^{\frac{l}{4}} r\, dr = \frac{l}{4}\, \rho\, A\, l\, g - \int_{S_o}^{0} dS \tag{5. 265}$$

die Stabkraft S_o

$$S_o = \frac{1}{32}\, m\, \dot\varphi^{\,2}\, l - \frac{1}{4}\, \rho\, A\, l\, g \tag{5. 266}$$

und die Stabkraft S_u

$$S_u = \frac{9}{32}\, m\, \dot\varphi^{\,2}\, l - \frac{3}{4}\, \rho\, A\, l\, g. \tag{5. 267}$$

Daraus ergeben sich die Lagerkräfte

$$A_V = S_u - S_o = \frac{13}{7}\, m\, g,\; A_H = 0. \tag{5. 268}$$

Aufgabe 5. 14

- Aufstellung der NEWTONsche Bewegungsgleichung und des Momentensatzes
- Berechnung des Abstands des Lagers

Eine Stange liegt symmetrisch auf zwei Lagern A und B. Wenn das Lager B plötzlich entfernt wird, ändert sich die Größe der Lagerkraft A.

gegeben: l, a, m

gesucht: Bestimmung des Abstands a, damit sich die Lagerkraft A zu Beginn der Bewegung nicht ändert.

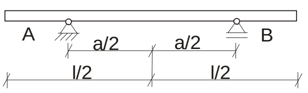


Bild 5. 55 Stange symmetrisch auf zwei Lagern A und B

Lösung

Wenn das System in Ruhe ist gilt

$$A_{H0} = A_H = 0,\; A_{V0} = B_{V0} = \frac{mg}{2} \tag{5. 269}$$

Nach Entfernen des Lagers in B erfolgt eine Drehung um A (Bild 5. 56).

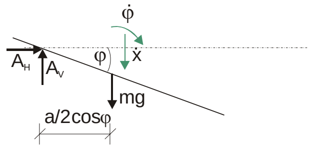


Bild 5. 56 Nach Entfernen des Lagers in B Drehung um A

Der Momentensatz um A lautet

$$\Theta_A\, \ddot\varphi = m\, g\, \frac{a}{2}\, \cos\varphi. \tag{5. 270}$$

Dies ist zu Beginn der Bewegung $\varphi = 0$

$$\Theta_A\, \ddot\varphi = m\, g\, \frac{a}{2}. \tag{5. 271}$$

Die NEWTONsche Bewegungsgleichung lautut

$$m\, \ddot x = m\, g - A_{V.} \tag{5. 272}$$

Die Kinematik de Balkens ist

$$\dot x = \frac{a}{2}\, \dot\varphi \quad\Rightarrow\quad \ddot x = \frac{a}{2}\, \ddot\varphi\, . \tag{5. 273}$$

Aus der Bedingung, dass sich $A_H = 0$ und $A_V = \frac{mg}{2}$ nicht verändert, ergibt sich aus (5. 272), (5. 273) und (5. 269)

$$m\, \frac{a}{2}\, \ddot\varphi = \frac{mg}{2} \quad\Rightarrow\quad \ddot\varphi = \frac{g}{a} \tag{5. 274}$$

in (5. 271) mit dem Massenträgheitsmoment

$$\Theta_A = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right) \tag{5. 275}$$

gilt

$$m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right)\frac{g}{a} = m\, g\, \frac{a}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}\, . \tag{5. 276}$$

Daraus folgt der Abstand

$$a = \frac{l}{\sqrt{3}}\, . \tag{5. 277}$$

Aufgabe 5. 15

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Plastischer Stoß mit Stoßzahl e
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Gegen die glatte, ruhende Seite einer in A drehbar aufgehängten Viertelkreisscheibe m_2 stößt eine Punktmasse m_1 mit der Anfluggeschwindigkeit v_0. Die Stoßzahl ist e.

gegeben: m_1, m_2, v_0, e, a, b

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeit der Punktmasse, sowie der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe nach dem Stoß.

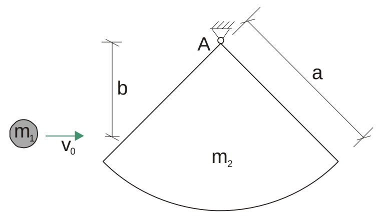


Bild 5. 57 In A drehbar aufgehängte Viertelkreisscheibe

Lösung

Es handelt sich um einen exzentrischer geraden Stoßvorgang. Die Massenmittelpunkte liegen außerhalb der Stoßnormalen (Bild 5. 58 a).

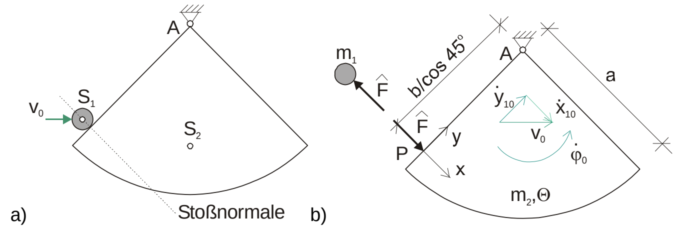


Bild 5. 58 a) Stoßnormale; b) Stoßschnittbild

Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß sind

$$\dot x_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0,\ \dot y_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0,\ \dot x_{20} = 0,\ \dot y_{20} = 0,\ \dot\varphi_{20} = 0, \qquad (5.\,278)$$

die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind $\dot x_1$, $\dot y_1$, $\dot x_2$, $\dot y_2$ und $\dot\varphi_2$.

Die Impulssätze für die Masse 1 lauten

$$\searrow:\quad m_1(\dot x_1 - \dot x_{10}) = -\hat F, \qquad (5.\,279)$$

$$\nearrow:\quad m_1(\dot y_1 - \dot y_{10}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot y_1 = \dot y_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0, \qquad (5.\,280)$$

und für die Viertelscheibe mit dem Drehimpulssatz um den Drehpunkt A

$$\curvearrowleft A:\quad \Theta_A(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_{20}) = \hat M_A = \hat F\ (b/\cos 45^o). \qquad (5.\,281)$$

Die Stoßbedingung am Stoßpunkt P lautet

$$e = -\frac{\dot x_{1P} - \dot x_{2P}}{\dot x_{10P} - \dot x_{20P}}. \qquad (5.\,282)$$

mit $\dot x_{10P} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,v_0$ und $\dot x_{1P} = \dot x_1$

Mit der Kinematik $\dot x_{20P} = 0$ und $\dot x_{2P} = \dot\varphi_2\,(b/\cos 45^o) = \dot\varphi_2\sqrt{2}\ b$ folgt

$$e = -\frac{\dot x_1 - \dot\varphi_2\sqrt{2}\,b}{\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 - 0}. \qquad (5.282a)$$

Das Massenträgheitsmoment der Scheibe läßt sich über die ganze Scheibe

$$\Theta_{Kreisscheibe} = \rho\,t\int_{(A)} r^2\,dA = \rho\,t\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\,dr\,d\varphi = \rho\,t\,\frac{a^4}{4}\,2\pi, \qquad (5.\,283)$$

und deren Viertel, der Viertelscheibe, berechnen

$$\Theta_A = \frac{1}{4}\left(\rho\,t\,\frac{a^4}{4}\,2\,\pi\right), \qquad (5.\,284)$$

mit der Masse einer Viertelscheibe $m_2 = \frac{1}{4}(\rho\,t\,\pi\,a^2)$ folgt

$$\Theta_A = \frac{1}{2}\,m_2\,a^2. \qquad (5.\,285)$$

In y- Richtung findet kein Stoß statt, weil es sich um eine glatte Fläche handelt, es wirkt keine Stoßkraft.

Aus (5. 278) in (5.282a) und mit der Kinematik $\dot x_2 = \dot\varphi_2\,(b/\cos 45^o)$ folgt

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0\,e = \sqrt{2}\ b\ \dot\varphi_2 - \dot x_1, \qquad (5.\,286)$$

Daraus folgt die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Scheibe nach dem Stoß

$$\dot x_1 = \sqrt{2}\ b\ \dot\varphi_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0\,e. \qquad (5.\,287)$$

Aus (5. 278), (5. 280), (5. 281) in (5. 283) folgt

$$\Theta_A\ \dot\varphi_2 = -m_1\left(\dot x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0\right)\sqrt{2}\ b, \qquad (5.\,288)$$

$$\frac{\Theta_A}{\sqrt{2}bm_1}\ \dot\varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0 - \sqrt{2}\ b\ \dot\varphi_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0\,e, \qquad (5.\,289)$$

$$\left(b + \frac{\Theta_A}{2bm_1}\right)\dot\varphi_2 = \frac{1}{2}\,v_0\,(1 + e). \qquad (5.\,290)$$

Daraus folgt

$$\dot\varphi_2\left(1 + \frac{\Theta_A}{2b^2m_1}\right) = \frac{1}{2b}\,v_0\,(1 + e), \qquad (5.\,291)$$

mit (5. 285) folgen die Geschwindigkeiten der Masse m_1 und die Winkelgeschwindigkeit der Viertelscheibe nach dem Stoß

$$\dot x_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\,\frac{1 - e\,\dfrac{m_2a^2}{4m_1b^2}}{1 + \dfrac{m_2a^2}{4m_1b^2}},\quad \dot y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_0,\quad \dot\varphi_2 = \frac{v_0}{2b}\,\frac{1+e}{1 + \dfrac{m_2a^2}{4m_1b^2}}. \qquad (5.\,292)$$

Aufgabe 5. 16

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Vollelastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß
- Berechnung des Massenverhältnisses $\frac{M}{m}$ für die Bewegung des Klotzes nach oben

Ein masseloses Seil ist mehrfach um eine frei drehbar gelagerte Walze (Masse M, Radius r) geschlungen. An seinem Ende ist ein Klotz (Masse m) befestigt. Das Seil strafft sich, wenn der Klotz um die Höhe h gefallen ist. Beim Stoß tritt kein Energieverlust auf.

gegeben: M, r, m, h

gesucht: Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi_M$ der Walze und der Geschwindigkeit v_m des Klotzes nach dem Stoß. Wie groß muß das Massenverhältnis $\frac{M}{m}$ mindestens sein, damit sich der Klotz nach dem Stoß nach oben bewegt?

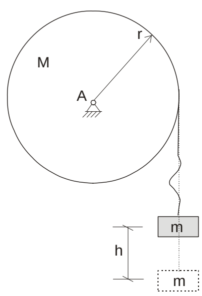


Bild 5. 59 Frei drehbar gelagerte Walze

Lösung

Vor dem Stoß wirkt die Geschwindigkeit aus dem freier Fall

$$\dot x_{m0} = \sqrt{2gh}\,. \qquad (5.\,293)$$

Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß sind

$$\dot x_{m0} = \sqrt{2gh},\ \dot\varphi_{M0} = 0, \qquad (5.\,294)$$

die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind $\dot x_m$ und $\dot\varphi_M$.

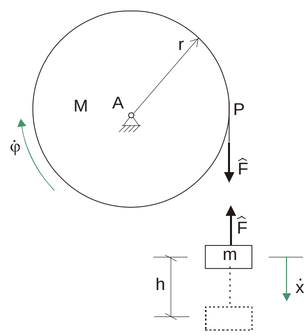


Bild 5. 60 Stoßschnittbild

Der Impulsatz für den Klotz

$$\downarrow:\quad m(\dot x_m - \dot x_{m0}) = -\hat F \qquad (5.\,295)$$

und der Drehimpulssatz für die Walze mit $\dot\varphi_{M0} = 0$ und dem Massenträgheitsmoment $\Theta_A = \frac{1}{2}\,M\,r^2$

$$\curvearrowleft A:\quad \Theta_A(\dot\varphi_M - \dot\varphi_{M0}) = r\,\hat F \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\,M\,r^2\,(\dot\varphi_M - 0) = r\,\hat F \qquad (5.\,296)$$

Die Stoßbedingung lautet

$$e = -\frac{\dot{x}_{MP} - \dot{x}_{mP}}{\dot{x}_{MP0} - \dot{x}_{mP0}}, \tag{5. 297}$$

mit dem vollelastischen Stoß e = 1 und der KInematik für den Stoßpunkt P

$$\dot{x}_{mP} = \dot{x}_{m},\ \dot{x}_{MP0} = \dot{x}_{m0},\ \dot{x}_{MP} = r\,\dot{\varphi}_{M},\ \dot{x}_{MP0} = 0. \tag{5. 298}$$

(5. 276) in (5. 275) ergibt

$$\sqrt{2gh} = r\,\dot{\varphi}_{M} - \dot{x}_{m} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_{m} = -\sqrt{2gh} + r\,\dot{\varphi}_{M}. \tag{5. 299}$$

(5) in (2) in (3) ergibt

$$\Theta_A\,\dot{\varphi}_{M} = -\,r\,m\,(-\sqrt{2gh} + r\,\dot{\varphi}_{M} - \sqrt{2gh}). \tag{5. 300}$$

Daraus folgt die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{M}$

$$\dot{\varphi}_{M} = \frac{2\sqrt{2gh}}{\frac{Mr^2}{2mr} + r} = \frac{4m}{2m+M}\,\frac{\sqrt{2gh}}{r} \tag{5. 301}$$

und mit (6) in (5) die Geschwindigkeit

$$\dot{x}_{m} = \frac{2m-M}{2m+M}\,\sqrt{2gh}\,. \tag{5. 302}$$

Der Klotz bewegt sich nach unten.

Das Massenverhältnis $\frac{M}{m}$, für das sich der Klotz sich nach oben $\dot{x}_{m} < 0$ bewegt, ergibt sich zu

$$2m < M \Rightarrow \qquad \frac{M}{m} > 2. \tag{5. 303}$$

?

Aufgabe 5. 17

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Vollelastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Eine Stange 1, die unter dem Winkel β gegen die Horizontale geneigt ist, fällt ohne zu rotieren senkrecht nach unten. Sie stößt mit der Geschwindigkeit v_1 elastisch auf das Ende einer in 0 drehbar gelagerten Stange 2. Beide Stangen haben gleiche Massen und Längen und sind glatt.

gegeben: l, m, v_1, β, $e = 1$

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte und der Winkelgeschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß

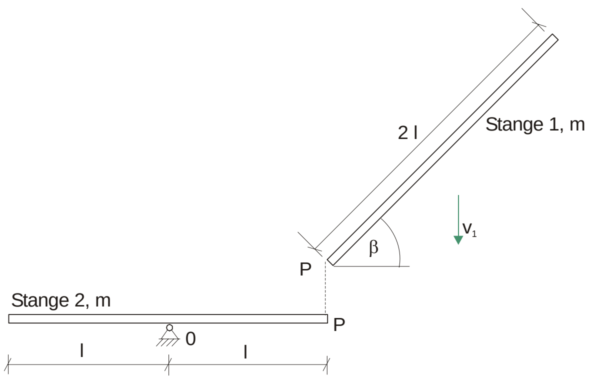


Bild 5. 61 Stange 1 und in 0 drehbar gelagerte Stange 2

Lösung

Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß sind

$$\dot{x}_{1v} = 0,\ \dot{y}_{1v} = v_1,\ \dot{\varphi}_{1v} = 0,\ \dot{x}_{2v} = 0,\ \dot{y}_{2v} = 0,\ \dot{\varphi}_{2v} = 0, \tag{5. 304}$$

die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind

$$\dot{x}_{1n},\ \dot{y}_{1n},\ \dot{\varphi}_{1n},\ \dot{x}_{2n} = 0,\ \dot{y}_{2n} = 0\ \text{(Auflager 0)},\ \dot{\varphi}_{2n}. \tag{5. 305}$$

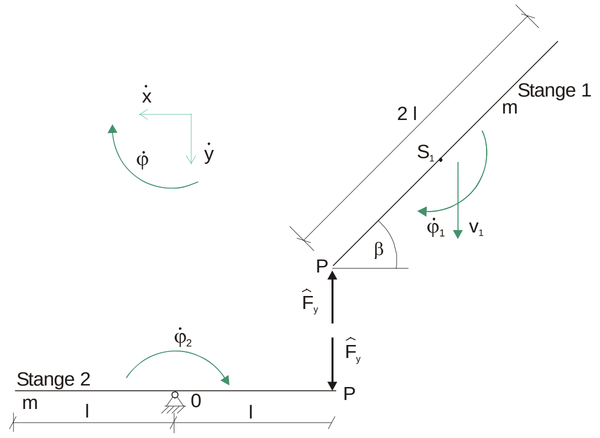


Bild 5. 62 Stoßschnittbild

Für glatten Stoß gilt

$$\hat{F}_x = 0. \tag{5. 306}$$

Die Impuls- und Drehimpulssätze für die Stange 1 lauten

$$\leftarrow: \quad m\,(\dot{x}_{1n} - 0) = 0 \Rightarrow \qquad \dot{x}_{1n} = 0, \tag{5. 307}$$

$$\downarrow: \quad m\,(\dot{y}_{1n} - v_1) = -\,\hat{F}_y, \tag{5. 308}$$

$$S\circlearrowleft: \quad \Theta\,(\dot{\varphi}_{1n} - 0) = \hat{F}_y\,l\cos\beta, \tag{5. 309}$$

für die Stange 2 um O

$$O\circlearrowleft: \quad \Theta\,(\dot{\varphi}_{2n} - 0) = \hat{F}_y\,l. \tag{5. 310}$$

Die Stoßbedingung lautet

$$e = 1 = -\frac{(\dot{y}_{1n} - \dot{\varphi}_{1n} l\cos\beta) - (0 + \dot{\varphi}_{2n} l)}{v_1 - 0}. \tag{5. 311}$$

Aus (5. 311) folgt

$$v_1 = -\,\dot{y}_{1n} + \dot{\varphi}_{1n}\,l\cos\beta + \dot{\varphi}_{2n}\,l, \tag{5. 312}$$

(5. 308) und (5. 310) mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta = \frac{1}{3}\,m\,l^2$ folgt

$$\dot{y}_{1n} + \frac{1}{3}\,\dot{\varphi}_{2n}\,l = v_1 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}_{1n} = v_1\,\frac{2+3\cos^2\beta}{4+3\cos^2\beta}, \tag{5. 313}$$

mit (5. 312) und (5. 313)

$$2\,v_1 = \dot{\varphi}_{1n}\,l\cos\beta + \frac{4}{3}\,\dot{\varphi}_{2n}\,l. \tag{5. 314}$$

Aus (5. 309) und (5. 310) folgt

$$\dot{\varphi}_{2n}\cos\beta = \dot{\varphi}_{1n}. \tag{5. 315}$$

Damit ergeben sich die Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{x}_{1n} = 0,\ \dot{y}_{1n} = v_1\,\frac{2+3\cos^2\beta}{4+3\cos^2\beta},$$

$$\dot{\varphi}_{1n} = \frac{6v_1}{l}\,\frac{\cos\beta}{4+3\cos^2\beta},\ \dot{\varphi}_{2n} = \frac{6v_1}{l}\,\frac{1}{4+3\cos^2\beta}. \tag{5. 316}$$

?

Aufgabe 5. 18

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Teilplastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Auf einer glatten, ebenen Unterlage liegt eine rechteckige Scheibe (Masse m_2) in Ruhe. Der Massenpunkt m_1 stößt mit der Geschwindigkeit v gegen die Mitte eines glatten Randes der Scheibe und trifft die Scheibe unter einem Winkel α. Die Stoßzahl ist e.

gegeben: α, m_1, m_2, e, v

gesucht: Bestimmung der Größe und Richtung der Geschwindigkeiten beider Massen nach dem Stoß.

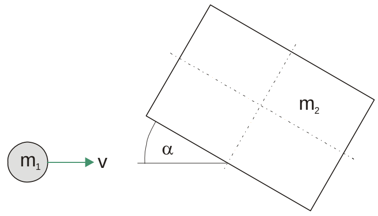


Bild 5. 63 Rechteckige Scheibe auf glatter, ebener Unterlage

Lösung

Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß sind

$$\dot{x}_{1v} = v\cos\alpha,\ \dot{y}_{1v} = v\sin\alpha,\ \dot{x}_{2v} = 0,\ \dot{y}_{2v} = 0,\ \dot{\varphi}_{2v} = 0, \qquad (5.\,317)$$

die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind

$$\dot{x}_{1n},\ \dot{y}_{1n},\ \dot{x}_{2n},\ \dot{y}_{2n},\ \dot{\varphi}_{2n}. \qquad (5.\,318)$$

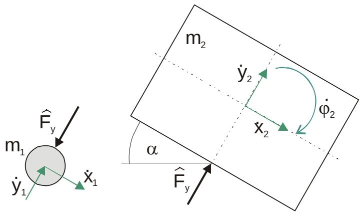


Bild 5. 64 Stoßschnittbild

Für den glatten Stoß gilt

$$\hat{F}_x = 0. \qquad (5.\,319)$$

Die Impulssätze lauten für Masse 1

$$\searrow:\quad m_1\,(\dot{x}_{1n} - v\cos\alpha) = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_{1n} = v\cos\alpha, \qquad (5.\,320)$$

$$\nearrow:\quad m_1\,(\dot{y}_{1n} - v\sin\alpha) = -\,\hat{F}_y, \qquad (5.\,321)$$

und für Masse 2

$$\searrow:\quad m_2\,(\dot{x}_{2n} - 0) = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_{2n} = 0, \qquad (5.\,322)$$

$$\nearrow:\quad m_2\,(\dot{y}_{2n} - 0) = \hat{F}_y. \qquad (5.\,323)$$

Die Stoßbedingung lautet

$$e = -\,\frac{\dot{y}_{2Pn} - \dot{y}_{1n}}{\dot{y}_{2Pv} - \dot{y}_{1v}} = -\,\frac{\dot{y}_{2n} - \dot{y}_{1n}}{0 - v\sin\alpha}\,. \qquad (5.\,324)$$

Da die Stoßnormale durch den Massenschwerpunkt S_2 geht, handelt es sich um eine geraden, zentralen Stoß. Daher gilt

$$\dot{y}_{2Pn} = \dot{y}_{2n}. \qquad (5.\,325)$$

In (5. 324) ergibt

$$e = -\,\frac{\dot{y}_{2n} - \dot{y}_{1n}}{0 - v\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad e\,v\sin\alpha + \dot{y}_{1n} = \dot{y}_{2n}. \qquad (5.\,326)$$

(5. 321) + (5. 323) in (5. 325) ergibt

$$-\,\frac{m_1}{m_2}\,(\dot{y}_{1n} + v\sin\alpha) = \dot{y}_{2n}, \qquad (5.\,327)$$

$$-\,\frac{1}{m_2}\,(e\,m_2 - m_1)\,v\sin\alpha = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)\dot{y}_{1n}, \qquad (5.\,328)$$

Daraus folgen die Geschwindigkeiten

$$\dot{x}_{1n} = v\cos\alpha,\ \dot{y}_{1n} = v\sin\alpha\,\frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2},\ \dot{x}_{2n} = 0,\ \dot{y}_{2n} = v\sin\alpha\,\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2} \qquad (5.\,329)$$

Aufgabe 5. 19

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Teilplastischer Stoß
- Berechnung der Länge b, für die der Lagerpunkt keinen Stoß erfährt

Ein Schlaghammer besteht aus zwei rechtwinkelig aneinander geschweißten Stangen gleicher Masse pro Längeneinheit μ. Er kann sich um 0 frei drehen.

gegeben: l, $\mu = \rho$ A, e, $\dot{\varphi}_V$

gesucht: Bestimmung der Länge b der Querstange 2, wenn der Drehpunkt 0 keinen Stoß erhalten soll.

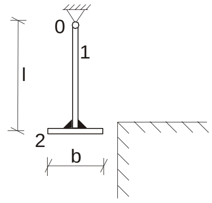


Bild 5. 65 Schlaghammer aus zwei rechtwinkelig aneinander geschweißten Stangen unmittelbar vor dem Stoß

Lösung

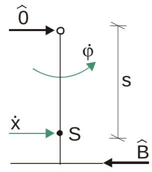


Bild 5. 66 Stoßschnittbild

Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß im Stoßpunkt sind

$$v_{Wand} = 0,\ v_{Schlaghammer} = l\,\dot{\varphi}_v, \qquad (5.\,330)$$

die Geschwindigkeiten nach dem Stoß im Stoßpunkt sind

$$w_{Wand} = 0,\ w_{Schlaghammer} = l\,\dot{\varphi}_n. \qquad (5.\,331)$$

Der Drehimpulssatz um den Drehpunkt 0 liefert

$$\Theta_0\,(\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_v) = -\,l\,\hat{B}, \qquad (5.\,332)$$

der Impulssatz um den Schwerpunkt S liefert

$$m\,(\dot{x}_n - \dot{x}_v) = \hat{0} - \hat{B}. \qquad (5.\,333)$$

Aus der Stoßbedingung am Stoßpunkt P folgt

$$-\,(w_{Wand} - w_{Schlaghammer}) = e\,(v_{Wand} - v_{Schlaghammer}). \qquad (5.\,334)$$

Die Kinematik liefert

$$\dot{x}_v = s\,\dot{\varphi}_v, \qquad (5.\,335)$$

$$\dot{x}_n = s\,\dot{\varphi}_n. \qquad (5.\,336)$$

Mit der Masse

$$m = \mu\,(l + b) \qquad (5.\,337)$$

ergibt sich der Abstand s zu

$$s = \frac{\mu \cdot l\,\frac{l}{2} + \mu b \cdot l}{\mu(l + b)} = \frac{\frac{l^2}{2} + lb}{l + b}\,. \qquad (5.\,338)$$

Das Massenträgheitsmoment ist

$$\Theta_0 = \mu\left(\frac{l^3}{3} + \frac{b^3}{12} + bl^2\right). \qquad (5.\,339)$$

Die Bedingung, dass im Auflager kein Stoß auftritt, lautet

$$\hat{0} = 0. \qquad (5.\,340)$$

Damit sind neun Gleichungen für neun Unbekannte: m, Θ_0, b, s, $\dot{\varphi}_n$, $\dot{x}_n$, $\hat{0}$, $\hat{B}$ vorhanden.

In (5. 334) eingesetzt, ergibt

$$-\,l\,\dot{\varphi}_n = e\,l\,\dot{\varphi}_v \quad\Rightarrow\quad \dot{\varphi}_n = -\,e\,\dot{\varphi}_v, \qquad (5.\,341)$$

(5. 333)* (- (1 l)) mit (5. 332) liefert

$$m\,l\,(\dot{x}_n - \dot{x}_v) = \Theta_0\,(\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_v) \quad\Rightarrow\quad \frac{\Theta_0(\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_v)}{ml(\dot{x}_n - \dot{x}_v)} = 1, \qquad (5.\,342)$$

(5. 335) bis (5. 338) in (5. 342) liefert

$$1 = \frac{\Theta_0(\dot\varphi_n - \dot\varphi_v)}{mls(\dot\varphi_n - \dot\varphi_v)} = \frac{\Theta_0}{mls} = \frac{\mu\left(\frac{l^3}{3} + \frac{b^3}{12} + bl^2\right)}{\mu(l+b)\cdot\frac{\frac{l^2}{2}+lb}{l+b}\, l} = \frac{\frac{l^3}{3} + \frac{b^3}{12} + bl^2}{(\frac{l^2}{2}+lb)\, l}$$

$$= \frac{2(4l^3 + b^3 + 12bl^2)}{12(l^3 + 2l^2 b)} = \frac{4l^3 + b^3 + 12bl^2}{6\, l^3 + 12\, l^2 b)} \qquad (5.\ 343)$$

Daraus folgt die Länge

$$b^3 = 2\, l^3 \Rightarrow \qquad b = \sqrt[3]{2}\ l. \qquad (5.\ 344)$$

Aufgabe 5. 20

- Aufstellung der Impuls- und Drehimpulsgleichungen
- Teilplastischer Stoß
- Berechnung aller Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß

Ein glatter Winkel (Schenkellänge l, Gesamtmasse m_2) liegt wie skizziert auf einer Unterlage. Eine Punktmasse m_1 stößt mit der Geschwindigkeit v_0 im Punkt B gegen den Winkel.

gegeben: l, m_1, m_2, v_0, e

gesucht: Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten des Winkelschwerpunkts nach dem Stoß.

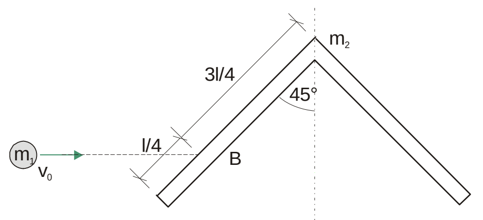


Bild 5. 67 Glatter Winkel

Lösung

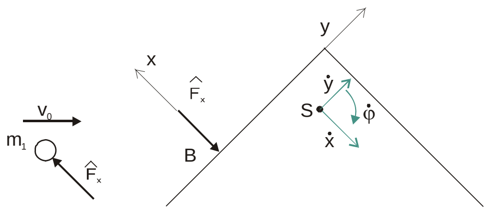


Bild 5. 68 Stoßschnittbild

Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß sind

$$\dot x_{10} = \dot y_{10} = v_0 \frac{\sqrt 2}{2},\ \dot x_{20} = 0,\ \dot y_{20} = 0,\ \dot\varphi_{20} = 0, \qquad (5.\ 345)$$

die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind

$$\dot x_1,\ \dot y_1,\ \dot x_2,\ \dot y_2,\ \dot\varphi_2. \qquad (5.\ 346)$$

Der Schwerpunkt des Winkels im x- y- Koordinatensystem in Bild 5. 68 ist

$$x_S = \frac{l}{4},\ y_S = \frac{l}{2}. \qquad (5.\ 347)$$

Das Massenträgheitsmoment um den Schwerpunkt S ist

$$\Theta_S = 2\ \frac{1}{12}\frac{m_2}{2}\ l^2 + 2\ \frac{m_2}{2}\ (\frac{l}{4}\sqrt2\,)^2 = \frac{5}{24}\ m_2\, l^2. \qquad (5.\ 348)$$

Für den glatten Stoß ($\hat F_y = 0$) lauten die Impulssätze für die Masse m_1

$$m_1\,(\dot x_1 - v_0 \frac{\sqrt2}{2}) = -\ \hat F_x, \qquad (5.\ 349)$$

$$m_1\,(\dot y_1 - v_0 \frac{\sqrt2}{2}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot y_1 = v_0 \frac{\sqrt2}{2}, \qquad (5.\ 350)$$

um den Schwerpunkt S für die Masse m_2

$$m_2\,(\dot x_2 - 0) = \hat F_x, \qquad (5.\ 351)$$

$$m_2\,(\dot y_2 - 0) = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot y_2 = 0 \qquad (5.\ 352)$$

und der Drehimpulssatz um den Schwerpunkt S für die Masse m_2

$$\Theta_S\,(\dot\varphi_2 - 0) = -\ \hat F_x\, y_S. \qquad (5.\ 353)$$

Die Stoßbedingung am Stoßpunkt B lautet

$$e = -\ \frac{\dot x_1 - (\dot x_2 - \frac{l}{2}\dot\varphi_2)}{v_0 \frac{\sqrt2}{2} - 0} \quad\Rightarrow\quad e\, v_0 \frac{\sqrt2}{2} = -\dot x_1 + \dot x_2 - \frac{l}{2}\dot\varphi_2. \qquad (5.\ 354)$$

(5. 349) und (5. 351) ergibt

$$m_1\,\dot x_1 - m_1\, v_0 \frac{\sqrt2}{2} + m_2\,\dot x_2 = 0, \qquad (5.\ 355)$$

mit (5. 348) und (5. 353) folgt

$$\frac{5}{24}\, m_2\, l^2\, \dot\varphi_2 - m_2\,\dot x_2 \frac{l}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad l\,\dot\varphi_2 = -\ \frac{12}{5}\,\dot x_2 \qquad (5.\ 356)$$

Mit (5. 356) in (5. 354) folgt

$$e\, v_0 \frac{\sqrt2}{2} = -\dot x_1 + \frac{11}{5}\,\dot x_2 \Rightarrow \qquad \dot x_1 = -\ e\, v_0 \frac{\sqrt2}{2} + \frac{11}{5}\,\dot x_2, \qquad (5.\ 357)$$

(5. 357) in (5. 355) ergibt

$$-\ m_1\, v_0 \frac{\sqrt2}{2}\ (e + 1) + m_1 \frac{11}{5}\,\dot x_2 + m_2\,\dot x_2 = 0. \qquad (5.\ 358)$$

Daraus ergeben sich die Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot x_1 = -\ e\, v_0 \frac{\sqrt2}{2} + \frac{11}{5}\, v_0 \frac{\sqrt2}{2}\ \frac{1+e}{\frac{m_2}{m_1} + \frac{11}{5}},\ \dot y_1 = v_0 \frac{\sqrt2}{2}, \qquad (5.\ 359)$$

$$\dot x_2 = v_0 \frac{\sqrt2}{2}\ \frac{1+e}{\frac{m_2}{m_1} + \frac{11}{5}},\ \dot y_2 = 0,\ \dot\varphi_2 = -\ \frac{6}{5}\ \sqrt2\ v_0 \frac{1}{l}\ \frac{1+e}{\frac{m_2}{m_1} + \frac{11}{5}}. \qquad (5.\ 360)$$

6 Schwingungslehre

Aufgabe 6. 1

- Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen verschiedener Einmassenschwinger

Es sind verschiedene Masse- Feder- Systeme (Masse m, Federsteifigkeit c, beziehungsweise c_1, c_2) gegeben.

gegeben: m, c, l, EI, c_1, c_2

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen ω

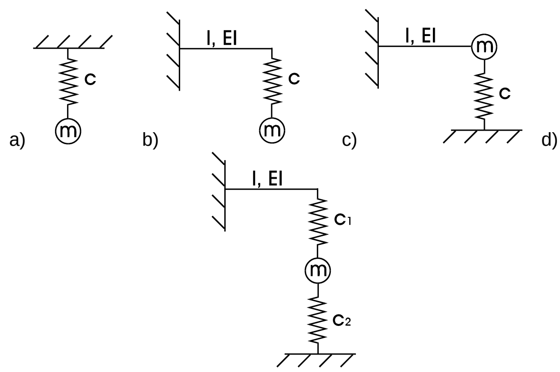


Bild 6. 26 Masse- Feder- Systeme

Lösung

Alle vier Systeme können durch ein Ein- Feder- Masse- System mit der Ersatzfedersteifigkeit c_{ers} ersetzt werden:

Fall a (Bild 6. 26 a)

Die Ersatzfedersteifigkeit ist gleich der Federsteifigkeit

$$c_{ers} = c. \tag{6. 144}$$

Damit ergibt sich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{ers}}{m}} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \tag{6. 145}$$

Fall b (Bild 6. 26 b)

Das System läßt sich als Ein- Masse- Feder- Systeme (Bild 6. 26) darstellen.

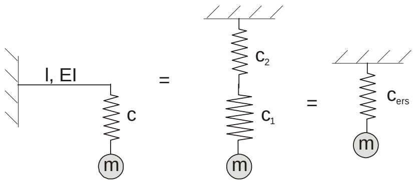


Bild 6. 27 Ein- Masse- Feder- Systeme

Die Ersatzfedersteifigkeit entsteht aus der Hintereinanderschaltung von 2 Federn bei gleichen Federkräften

$$c_1 = c,\ c_2 = \frac{3EI}{l^3} \Rightarrow \quad \frac{1}{c_{ers}} = \frac{1}{c} + \frac{l^3}{3EI}. \tag{6. 146}$$

Damit ergibt sich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\left(\frac{1}{c}+\frac{l^3}{3EI}\right)}}. \tag{6. 147}$$

Fall c (Bild 6. 26 c)

Das System lässt sich als Ein- Masse- Feder- Systeme (Bild 6. 28) darstellen.

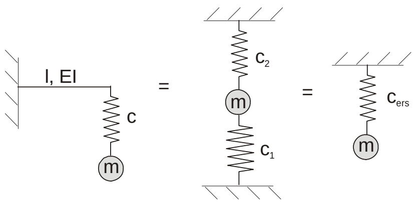


Bild 6. 28 Ein- Masse- Feder- Systeme

Ersatzsteifigkeit entsteht aus der Parallelschaltung aus 2 Federn bei gleichen Federauslenkungen

$$c_1 = c,\ c_2 = \frac{3EI}{l^3} \Rightarrow \quad c_{ers} = c + \frac{3EI}{l^3}. \tag{6. 148}$$

Damit ergibt sich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{c+\frac{3EI}{l^3}}{m}}. \tag{6. 149}$$

Fall d (Bild 6. 26 d)

Das System lässt sich als Ein- Masse- Feder- Systeme (Bild 6. 29) darstellen.

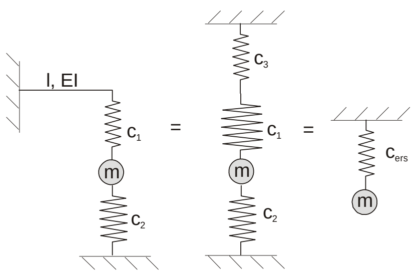


Bild 6. 29 Ein- Masse- Feder- Systeme

Die Ersatzfedersteifigkeit entsteht aus der Hintereinanderschaltung von 2 Federn bei gleichen Federkräften und aus der Parallelschaltung aus 2 Federn bei gleichen Federauslenkungen

$$c_1 = c_1,\ c_2 = c_2,\ c_3 = \frac{3EI}{l^3} \quad \Rightarrow \quad c_{ers} = c_2 + \frac{1}{\frac{1}{c_1}+\frac{l^3}{3EI}}. \tag{6. 150}$$

Damit ergibt sich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{\frac{1}{c_1}+\frac{l^3}{3EI}}+c_2}{m}}. \tag{6. 151}$$

Aufgabe 6. 2

- Bestimmung der Schwingungsdauer eines masselosen Balkens mit einer Einzelmasse

Ein elastischer, gewichtsloser Balken, der auf zwei Federn (Federsteifigkeit c) gelagert ist, trägt in P eine Punktmasse m.

gegeben: l, c, E I, m

gesucht: Bestimmung der Schwingungsdauer T des Systems

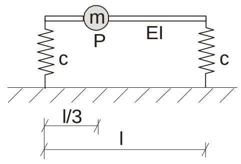


Bild 6. 30 Elastischer, gewichtsloser Balken auf zwei Federn

Lösung

Die Eigenkreisfrequenz ω wird über die Ersatzsteifigkeit c_{ers} des Systems bestimmt. Dazu wird die Durchbiegung in P mit Hilfe des Arbeitssatzes berechnet.

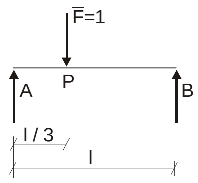


Bild 6. 31 Schnittbild des belasteten Systems

Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich

$$A\curvearrowleft: \quad 1\,\frac{l}{3} - B\,l = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{3} \tag{6. 152}$$

$$\uparrow: \quad A + B - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{3} \tag{6. 153}$$

Die Verschiebung des Punktes P mit $f_A = \frac{1}{c}\ A = \frac{1}{c}\ \frac{2}{3}$ und $f_B = \frac{1}{c}\ B = \frac{1}{c}\ \frac{1}{3}$ und mit Strahlensatz ergibt

$$f_{P,Federn} = \frac{2}{3}\ f_A + \frac{1}{3}\ f_B = \frac{4}{9}\ \frac{1}{c} + \frac{5}{9}\ \frac{1}{c} = \frac{5}{9}\ \frac{1}{c}. \tag{6. 1543}$$

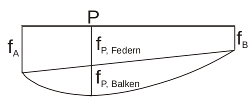
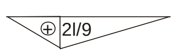


Bild 6. 32 Verformung nur aus Federn (Balken starr) $f_{P,Federn}$

Der elastische Anteil aus der Balkenbiegung $f_{P,Balken}$ mit der Koppeltafel[3. 1] ist

$$f_{P,Balken} = \int M\bar{M}\frac{dx}{EI} = \frac{1}{3}\ \left(\frac{2}{9}\ l\right)^2 \left(\frac{l}{3EI}+\frac{2l}{3EI}\right) = \frac{4}{243}\ \frac{l^3}{EI}. \tag{6. 155}$$



[3. 1] Kunow, Technische Mechanik II Elastostatik, Kapitel 11, Tabelle11.1 und Tabelle 11.2

Bild 6. 33 Momentenverlauf $\overline{M}$

Oder mit Hilfe der Biegelinientafel[3.1] mit $\xi = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$ folgt

$$f_{P,Balken} = \frac{1 l^3}{6EI}\left[\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\,\left(1-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)\right] = \frac{4}{243}\,\frac{l^3}{EI}, \qquad (6.156)$$

$$f_P = f_{P,Federn} + f_{P,Balken} = \frac{5}{9}\,\frac{1}{c} + \frac{4}{243}\,\frac{l^3}{EI}. \qquad (6.157)$$

Damit ist die Ersatzfedersteifigkeit des Systems

$$c_{ers} = \frac{1}{f_P} = \frac{1}{\frac{5}{9}\frac{1}{c} + \frac{4}{243}\frac{l^3}{EI}}. \qquad (6.158)$$

Damit folgt die Eigenkreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{c_{ers}}{m} = \frac{1}{m\, f_P}. \qquad (6.159)$$

Dann ist die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{m\, f_P} = 2\,\pi\,\sqrt{m\left(\frac{5}{9}\frac{1}{c} + \frac{4}{243}\frac{l^3}{EI}\right)}. \qquad (6.160)$$

Aufgabe 6. 3

- Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit eines Stabwerks
- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz eines Stabwerks

Für das skizzierte System muss die Eigenkreisfrequenz ω so bestimmt werden, dass sie so niedrig wie möglich wird. Der Balken sei dehnstarr und masselos.

gegeben: EA, EI, l, m

gesucht: Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit c, der Eigenkreisfrequenz ω und dem Einfluss des Stabwerks auf die Ersatzfedersteifigkeit c_{ers} des Gesamtsystems.

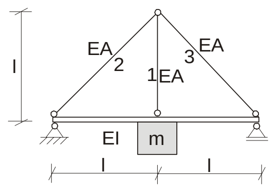


Bild 6. 34 Dehnstarrer, masseloser Balken mit Einzelmasse

Lösung

Das System schwingt um die statische Ruhelage. Deshalb wird das Gewicht G = m g für die Berechnung der Eigenkreisfrequenz $\omega = \frac{c_{ers}}{m}$ nicht berücksichtigt.

Über die Durchbiegung des Gesamtsystems f unter der Kraft 1 wird die Ersatzfedersteifigkeit $c_{ers} = \frac{1}{f}$ des Systems berechnet. Dazu wird in der Richtung, in der die Steifigkeit gesucht wird, und an der Stelle, an der die Steifigkeit gesucht wird, eine Kraft 1 angebracht.

Das System ist statisch unbestimmt. Deshalb wird das System in ein statisch bestimmtes "0"- System und ein "1"- System aufgeteilt.

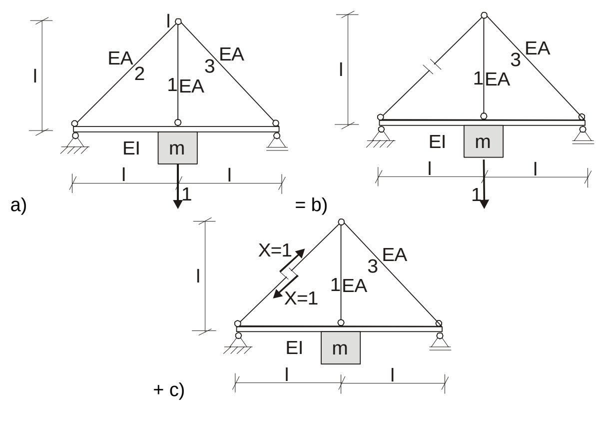


Bild 6. 35 a) Statisch unbestimmtes Originalsystem; b) statisch bestimmtes System mit der Belastung F: "0"- System; c) statisch bestimmtes System mit der statisch Überzähligen X = 1: "1"- System

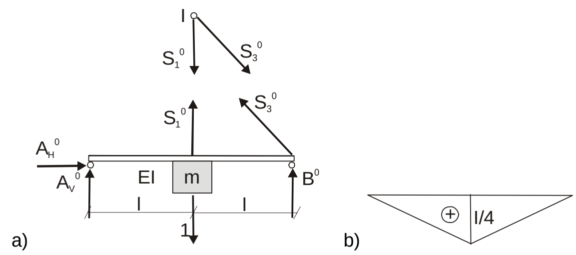


Bild 6. 36 "0"- System; a) Schnittbild; b) Momentenverlauf M^0 unter der Last 1

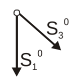


Bild 6. 37 Stabkräfte am Knoten I

$$S_1^0 = 0,\ S_2^0 = 0,\ S_3^0 = 0 \qquad (6.161)$$

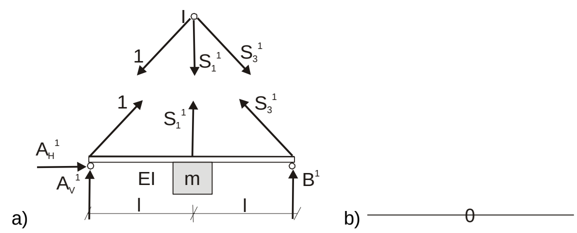


Bild 6. 38 "1"- System, a) Schnittbild; b) Momentenverlauf M^1 infolge der statisch Überzähligen

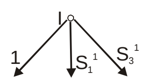


Bild 6. 39 Stabkräfte am Knoten I

$$S_1^1 = -\sqrt{2},\ S_2^1 = 1,\ S_3^1 = 1 \qquad (6.162)$$

Die Statisch Überzählige wird aus den Verformungen am "0"- System

$$\delta_{10} = \sum S_i^0\, S_i^1\, \frac{l_i}{EA_i} + \int \frac{M^1 M^0}{EI} dx = 0, \qquad (6.163)$$

und am "1"- System bestimmt

$$\delta_{11} = \sum \left(S_i^1\right)^2 \frac{l_i}{EA_i} + \int \frac{(M^1)^2}{EI} dx = \frac{1}{EA}\,(2\ 1\ 2\ l^2 + 2\ l^2) + 0 = \frac{1}{EA}\ 6\ l^2 \qquad (6.164)$$

$$X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 0. \qquad (6.165)$$

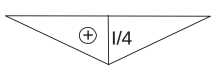


Bild 6. 40 Momentenverlauf M des Gesamtsystems

Die Stabkräfte des Gesamtsystems ergeben sich zu

$$S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0. \qquad (6.166)$$

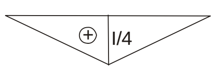


Bild 6. 41 Momentenverlauf $\overline{M}^0$ im reduzierten System ("0"- System)

Die Stabkräfte im reduzierten System sind

$$\overline{S_1^0} = -0,\ \overline{S_2^0} = -0,\ \overline{S_3^0} = 0, \qquad (6.167)$$

Die Durchbiegung ergibt sich zu

$$f = \int \frac{\overline{M}^0 M}{EI} dx + \sum \overline{S_i^0}\, S_i\, \frac{l_i}{EA_i} = 0 + 2\,\frac{1}{3}\,l\,\frac{1}{EI}\,\frac{l}{4}\,\frac{l}{4} = \frac{1}{EI}\,\frac{l^3}{24}. \qquad (6.168)$$

Damit ist die Ersatzfedersteifigkeit in vertikaler Richtung

$$c_{ers} = \frac{1}{f}\,. \qquad (6.169)$$

Die Eigenkreisfrequenz ist damit

$$\omega^2 = \frac{24\,EI}{ml^3}\,. \qquad (6.170)$$

Das Stabwerk hat keinen Einfluss auf die Ersatzsteifigkeit in vertikaler Richtung.

Diese Lösungsmöglichkeit bietet sich immer dann an, wenn ein System kompliziert ist. Die Berechnung der Durchbiegung f kann auch numerisch erfolgen.

Mit der Ersatzfedersteifigkeit kann das System als Feder abgebildet werden.

Aufgabe 6. 4

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichung
- Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit
- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz

Eine Punktmasse m wird durch zwei Biegefedern (Länge l, Biegesteifigkeit EI_1, beziehungsweise EI_2) und eine Spiralfeder (Federsteifigkeit c) in der statischen Ruhelage gehalten.

gegeben: l, EI_1, EI_2, c, m

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω

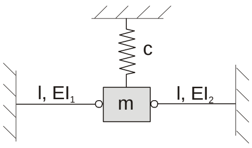


Bild 6. 42 Punktmasse mit zwei Biegefedern und einer Spiralfeder

1. Lösungsmöglichkeit durch Bestimmung der Ersatzfedersteifigkeit

Die Spiralfeder c und die beiden Blattfedern (Balken) $c_1 + c_2$ wirken wie parallelgeschaltete Federn, da alle dieselbe Verschiebung haben.

$$c_{ges} = c + c_1 + c_2 \qquad (6.171)$$

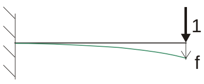


Bild 6. 43 Belastete Blattfeder unter der Last 1

Die Durchbiegung am Lastangriffspunkt für eine Blattfeder ist

$$f = \frac{l^3}{3EI}\,1. \qquad (6.172)$$

Daraus ergibt sich die Ersatzfedersteifigkeit

$$c = \frac{1}{f} \qquad (6.173)$$

$$c_{ges} = c + \frac{3EI_1}{l^3} + \frac{3EI_2}{l^3} \qquad (6.174)$$

Damit folgt die Eigenkreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{c_{ges}}{m} = \frac{1}{m}\left[c + \frac{3EI_1}{l^3} + \frac{3EI_2}{l^3}\right] \qquad (6.175)$$

2. Lösungsmöglichkeit durch Schneiden

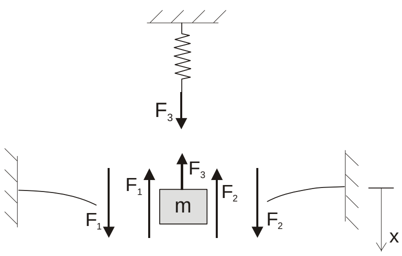


Bild 6. 44 Schnittbild

Die Federkräfte ergeben sich aus dem Federgesetz mit Hilfe der Balkenverformung

$$F_1 = \frac{3EI_1}{l^3}\,x,\; F_2 = \frac{3EI_2}{l^3}\,x,\; F_3 = c\,x \qquad (6.176)$$

Die NEWTONsche Bewegungsgleichung lautet

$$m\,\ddot{x} = -F_1 - F_2 - F_3 \qquad (6.177)$$

$$\ddot{x} = -\left[\frac{3EI_1}{l^3} + \frac{3EI_2}{l^3} + c\right] x\,\frac{1}{m} = -c_{ges}\,x\,\frac{1}{m} \qquad (6.178)$$

$$\ddot{x} + \frac{c_{ges}}{m}\,x = 0 \qquad (6.179)$$

Damit folgt die Eigenkreisfrequenz ω wie oben.

Aufgabe 6. 5

- Aufstellung der NEWTONschen Bewegungsgleichung
- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz
- Lösung mit Hilfe des Energiesatzes

Ein Kolben schwingt mit kleinen Auslenkungen um die skizzierte Ruhelage.

gegeben: r, m, $\bar{c}$

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω

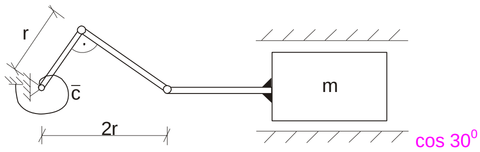


Bild 6. 45 Kolben in seiner Ruhelage.

1. Lösungsmöglichkeit mit der NEWTONschen Bewegungsgleichung

Für kleine Auslenkungen für $\varphi < 10^0$gilt

$$\sin\varphi \approx \varphi\,. \qquad (6.9)$$

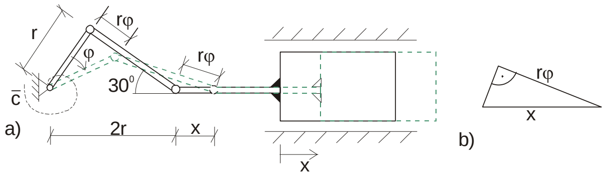


Bild 6. 46 Kinematik; a) Bewegungsablauf der Kurbel; b) Geometrie

Aus der Geometrie ergibt sich

$$\cos 30^0 = \frac{r\varphi}{x}\,. \qquad (6.180)$$

Daraus folgt der Winkel

$$\varphi = \frac{x}{r}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \qquad (6.181)$$

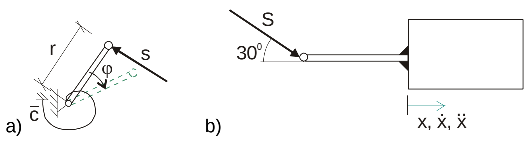


Bild 6. 47 Schnittbild am ausgelenkten System; a) linker Kurbelteil; b) rechter Teil mit Kolben

Aus dem Momentensatz folgt am linken Teilsystem

$$S\,r = \varphi\,\bar{c} = \varphi\,\frac{\bar{c}}{r}\,. \qquad (6.182)$$

Die NEWTONsche Bewegungsgleichung am rechten Teilsystem lautet

$$m\,\ddot{x} = -S\cos 30^0 \qquad (6.183)$$

mit (6. 182) folgt

$$m\,\ddot{x} + \varphi\,\frac{\bar{c}}{r}\cos 30^0 = 0. \qquad (6.184)$$

Mit (6. 181) ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung

$$m\,\ddot{x} + \frac{\bar{c}}{r^2}\cos^2 30^0\,x = m\,\ddot{x} + \frac{\bar{c}}{r^2}\,\frac{3}{4}\,x = 0. \qquad (6.185)$$

Durch die Masse geteilt folgt

$$\ddot{x} + \frac{3}{4}\,\frac{\bar{c}}{mr^2}\,x = 0. \qquad (6.186)$$

Damit folgt die Eigenkreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{3\bar{c}}{4mr^2}\,. \qquad (6.187)$$

2. Lösungsmöglichkeit mit dem Energiesatz

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,\bar{c}\,\varphi^2 = \text{const.} \qquad (6.188)$$

Nach Differentiation nach der Zeit folgt

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x} + \bar{c}\,\dot{\varphi}\,\varphi = 0. \qquad (6.189)$$

Mit der Geschwindigkeit

$$\dot{x} = r\,\dot{\varphi}\,\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad (6.190)$$

und mit (6. 181) folgt

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x} + \bar{c}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\dot{x}}{r}\,\frac{\sqrt{3}}{2r}\,x = 0, \qquad \Big|:(\dot{x}\,m) \qquad (6.191)$$

$$\ddot{x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{m}\,\frac{\bar{c}}{r^2}\,x = 0. \qquad (6.192)$$

Damit folgt die Eigenkreisfrequenz ω.

Aufgabe 6. 6

- Bestimmung der Schwingungsdifferentialgleichung und deren Lösung
- Bestimmung Schwingungsdauer des Systems
- Bestimmung des maximalen Auslenkwinkels für Nicht- Abheben der Zusatzmasse

Der Schwinger, bestehend aus starrem Balken (Masse m, Länge l), Feder c , Masse M und lose aufliegender Zusatzmasse ΔM, wird um den Winkel + φ_0 aus seiner statischen Ruhelage heraus ausgelenkt (für kleine Ausschläge) und zur Zeit t = 0 losgelassen.

gegeben: l, m, c, M = 2 m, $\Delta M = \frac{2}{3}$ m

gesucht: Bestimmung der Differentialgleichung, die diese Schwingung beschreibt, und deren Lösung, der Schwingungsdauer T des Systems und des Betrags φ_{0max} des Auslenkwinkels φ_0, wenn die Zusatzmasse nicht abheben soll.

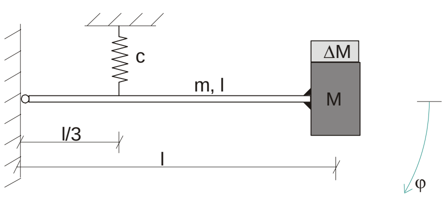


Bild 6. 48 Schwinger aus Balken, Feder, Masse und lose aufliegender Zusatzmasse

Lösung

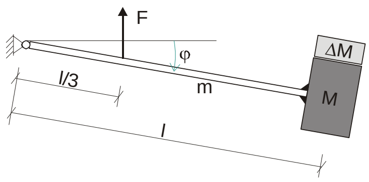


Bild 6. 49 Schnittbild am ausgelenkten System

Für kleine Ausschläge gilt sin $\varphi \approx \tilde{\varphi}$
Die Federkraft ist

$$F = \frac{l}{3}\,c\,\varphi, \qquad (6.193)$$

das Massenträgheitsmoment lautet

$$\Theta_0 = \frac{1}{3}\,m\,l^2 + (M + \Delta M)\,l^2 = 3\,m\,l^2. \qquad (6.194)$$

Der Momentensatz für statische Ruhelage lautet

$$\Theta_0\,\ddot{\varphi} = -\,F\,\frac{l}{3} \qquad (6.195)$$

Daraus folgt die Schwingungsdifferentialgleichung

$$3\,m\,l^2\,\ddot{\varphi} = -\,\frac{l^2}{9}\,c\,\varphi, \qquad (6.196)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{27m}\,\varphi = 0. \qquad (6.197)$$

Damit folgt die Eigenkreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{c}{27m}\,. \qquad (6.198)$$

Damit ist der Auslenkwinkel

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega\,t \qquad (6.199)$$

die Lösung der Differentialgleichung.
Die Schwingungsdauer aus

$$T = \frac{1}{f} \qquad (6.200)$$

mit der Frequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (6.201)$$

lautet dann

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{27m}{c}}\,. \qquad (6.202)$$

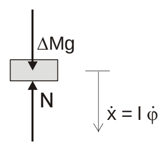


Bild 6. 50 Schnittbild für die Zusatzmasse ΔM

Die NEWTONsche Bewegungsgleichung für die Masse ΔM lautet

$$\Delta M\,l\,\ddot{\varphi} = \Delta M\,g - N \qquad (6.203)$$

Die Bedingung, dass die Zusatzmasse nicht abhebt, ist N > 0 (Bild 6. 50)

$$N = \Delta M\,(g - l\,\ddot{\varphi}). \qquad (6.204)$$

Mit der Winkelbeschleunigung

$$\ddot{\varphi} = -\,\varphi_0\,\omega^2\cos\omega\,t \qquad (6.205)$$

folgt

$$N = \Delta M\,(g + l\,\varphi_0\,\omega^2\cos\omega\,t) > 0. \qquad (6.206)$$

Mit (6. 198)

$$\varphi_0\,\frac{c}{27m}\,\cos\omega\,t < g \qquad (6.207)$$

und für $\cos\omega\,t = 1$ folgt der maximale Auslenkwinkel

$$\varphi_{0max} < \frac{27gm}{c\, l} . \qquad (6.\ 208)$$

Aufgabe 6. 7

- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz der Drehschwingung, für Haftung zwischen den beiden Walzen
- Bestimmung des maximalen Winkels für Haftung zwischen den beiden Walzen
- Lösung mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip
- Lösung mit dem Energiesatz
- Lösung mit dem Momentensatz

Zwei Walzen (Massen m_1, m_2, Massenträgheitsmomente Θ_1, Θ_2, Radien r, R) sind in der skizzierten Weise gelagert. Die Feder (Federsteifigkeit c), welche die Walzen aneinander drückt, ist um den Betrag Δl vorgespannt. An der Walze 1 ist eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit $\hat{c}$) angebracht, die für $\varphi = 0$ ungespannt ist. Zur Zeit t = 0 wird die Walze 1 aus der Anfangslage $\varphi = \varphi_0$ ohne Geschwindigkeit losgelassen.

gegeben: m_1, m_2, Θ_1, Θ_2, c, $\hat{c}$, r, R = 2 r, Δl, φ_0, μ_0

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz der Drehschwingung, falls Haftung zwischen den beiden Walzen besteht. Wie groß darf der Winkel φ_0 höchstens sein, wenn die Walzen nicht aufeinander rutschen sollen (Haftreibungskoeffizient μ_0)?

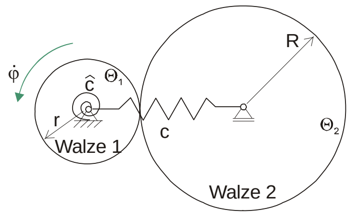


Bild 6. 51 Zwei Walzen durch Federn gehalten

1. Lösungsmöglichkeit mit dem d´ ALEMBERTschen Prinzip

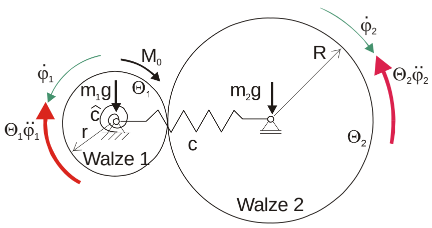


Bild 6. 52 Einführen der Vorzeichen, der äußeren Kräfte und der d´ ALEMBERTschen Scheinkräfte

Der Arbeitssatz lautet

$$\delta W = (-M_0 - \Theta_1 \ddot{\varphi}_1)\, \delta\varphi_1 - \Theta_2 \ddot{\varphi}_2\, \delta\varphi_2 = 0. \qquad (6.\ 209)$$

Mit der Kinematik für Rollen der Walzen aufeinander

$$r\, \dot{\varphi}_1 = R\, \dot{\varphi}_2 \qquad (6.\ 205)$$

und R = 2 r ergibt sich

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1 \qquad \delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\delta\varphi_1 . \qquad (6.\ 206)$$

(6. 209) mit dem Spannmoment

$$M_0 = \hat{c}\, \varphi_1 \qquad (6.\ 207)$$

folgt

$$\delta W = (-\hat{c}\, \varphi_1 - \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 - \Theta_2 \frac{1}{4}\ddot{\varphi}_1)\, \delta\varphi_1 = 0. \qquad (6.\ 208)$$

Daraus ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{\hat{c}}{\Theta_1 + \frac{1}{4}\Theta_2}\varphi_1 = 0 \qquad (6.\ 209)$$

Damit lautet Eigenkreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{\hat{c}}{\Theta_1 + \frac{1}{4}\Theta_2} . \qquad (6.\ 210)$$

2. Lösungsmöglichkeit mit dem Energiesatz

Der Energiesatz lautet

$$\frac{1}{2}\Theta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\hat{c}\, \varphi_1^2 = \text{const.} \qquad (6.\ 211)$$

Nach der Ableitung nach der Zeit $\frac{d()}{dt}$ ergibt sich

$$\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 + \Theta_2 \ddot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_2 + \hat{c}\, \dot{\varphi}_1 \varphi_1 = 0 \qquad (6.\ 212)$$

Mit der Kinematik (6. 206) ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 + \Theta_2 \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1 + \hat{c}\, \dot{\varphi}_1 \varphi_1 = 0 \qquad (6.\ 213)$$

$$\dot{\varphi}_1 (\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 + \Theta_2 \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 \frac{1}{2} + \hat{c}\, \varphi_1) = 0. \qquad (6.\ 214)$$

$$\dot{\varphi}_1 (\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 + \Theta_2 \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 \frac{1}{2} + \hat{c}\, \varphi_1) = 0. \qquad (6.\ 215)$$

$$\ddot{\varphi}_1 (\Theta_1 + \Theta_2 \frac{1}{4}) + \hat{c}\, \varphi_1 = 0. \qquad (6.\ 216)$$

Daraus ergibt sich die Eigenkreisfrequenz wie oben.

3. Lösungsmöglichkeit mit dem Momentensatz

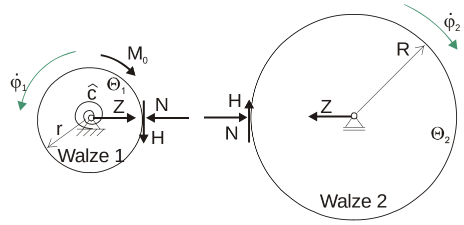


Bild 6. 53 Schnittbild

Der Momentensatz für die Walze 1 lautet

$$\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 = -(M_0 + H\, r), \qquad (6.\ 217)$$

für die Walze 2

$$\Theta_2 \ddot{\varphi}_2 = H\, R. \qquad (6.\ 218)$$

Für die Anpresskraft gilt

$$N = Z = \Delta l\, c. \qquad (6.\ 219)$$

Mit dem Haftungsgesetz als Grenzhaftung, wenn die Walzen gerade nicht aufeinander rutschen sollen

$$|H_{max}| = \mu_0 N \qquad (6.\ 220)$$

Mit der Kinematik (6. 206) ergibt sich aus (6. 218) die Haftkraft mit R = 2 r

$$H = \frac{1}{R}\Theta_2 \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 = \Theta_2 \frac{1}{4r}\ddot{\varphi}_1 . \qquad (6.\ 221)$$

mit (6. 207) folgt die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 = -(\hat{c}\, \varphi_1 + \Theta_2 \frac{1}{4}\ddot{\varphi}_1), \qquad (6.\ 222)$$

$$(\Theta_1 + \frac{1}{4}\Theta_2)\, \ddot{\varphi}_1 + (\hat{c}\, \varphi_1) = 0 \qquad (6.\ 223)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{\hat{c}}{\Theta_1 + \frac{1}{4}\Theta_2}\varphi_1 = 0. \qquad (6.\ 209)$$

In (6. 221) folgt die Haftkraft

$$H = \Theta_2 \frac{1}{4r} \ddot{\varphi}_1 = -\Theta_2 \frac{1}{4r} \frac{\hat{c}}{\Theta_1 + \frac{1}{4}\Theta_2} \varphi_1 = -\frac{\hat{c}}{4\frac{\Theta_1}{\Theta_2}+1} \frac{\varphi_1}{r} \qquad (6.\,224)$$

Die maximale Haftkraft H_{max} entsteht für den maximalen Winkel φ_0. In (6. 220) eingesetzt, folgt

$$\frac{\hat{c}\varphi_0}{r\left(4\frac{\Theta_1}{\Theta_2}+1\right)} \leq \mu_0 \, \Delta \, l \, c. \qquad (6.\,225)$$

Daraus ergibt sich der maximale Winkel für Rollen der Walzen aufeinander

$$\varphi_0 \leq \mu_0 \, \Delta \, l \, \frac{c}{\hat{c}} \, r \left(1 + 4 \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right). \qquad (6.\,226)$$

Aufgabe 6. 8

- Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Ausschläge
- Bestimmung der Dämpferkonstante, wenn der Zeiger nach einer Anfangsauslenkung nicht mehr schwingen soll
- Falldiskussion für das LEHRsche Dämpfungsmaß

Ein dünner stabförmiger Zeiger (Länge l, Masse m) ist in O durch eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit $\hat{c}$) elastisch eingespannt. In Zeigermitte ist ein geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer angeschlossen (Dämpferkonstante r).

gegeben: m, l, r, $\hat{c}$

gesucht: Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Ausschläge, der Dämpferkonstante r, wenn der Zeiger nach einer Anfangsauslenkung nicht mehr schwingen soll.

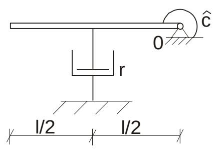


Bild 6. 54 Dünner stabförmiger Zeiger durch Drehfeder in O elastisch eingespannt.

Lösung

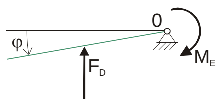


Bild 6. 55 Schnittbild

Die ausgelenkte Lage wird von statischen Ruhelage aus gezählt, das heißt, das Gewicht wird nicht berücksichtigt.

Der Momentensatz lautet

$$\Theta \ddot{\varphi} = -M_E - F_D \frac{l}{2} (1 - \cos\varphi). \qquad (6.\,227)$$

Mit dem Einspannmoment

$$M_E = \hat{c} \, \varphi, \qquad (6.\,228)$$

der Dämpferkraft

$$F_D = r \, \dot{x} = r \frac{l}{2} \dot{\varphi} \qquad (6.\,229)$$

und für kleine φ ($\cos \varphi = 1$) mit dem Massenträgheitsmoment $\Theta = \frac{1}{3} m \, l^2$ folgt die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{4} \frac{r}{m} \dot{\varphi} + \frac{3\hat{c}}{ml^2} \varphi = 0. \qquad (6.\,230)$$

Die Bedingung, dass der Zeiger nach einer Auslenkung nicht mehr schwingt, ist der aperiodische Grenzfall

$$\delta = \omega. \qquad (6.\,231)$$

Mit der Dämpfung

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{r}{m} \qquad (6.\,232)$$

und der Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{3\hat{c}}{ml^2}} \qquad (6.\,233)$$

folgt

$$\frac{3}{4} \frac{r}{m} = \sqrt{\frac{3\hat{c}}{ml^2}}. \qquad (6.\,234)$$

Daraus ergibt sich die minimalste Dämpferkonstante

$$r = 8 \sqrt{\frac{m\hat{c}}{3l^2}}. \qquad (6.\,235)$$

Der kritische Dämpfungsfaktor, das LEHRsche Dämpfungsmaß D lautet mit (6. 51)

$$2 \, \omega \, D = \frac{3}{4} \frac{r}{m} = 2 \, \delta \qquad (6.\,236)$$

$$D = \frac{rl}{\sqrt{m\hat{c}}} \sqrt{\frac{3}{64}}. \qquad (6.\,237)$$

Damit kann die gedämfte Schwingungsdifferentialgleichung in der Form wie (6. 45) geschrieben werden

$$\ddot{\varphi} + 2 \, \omega \, D \, \dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \qquad (6.\,238)$$

Der Lösungsansatz ist mit den Ableitungen nach der Zeit

$$\varphi = e^{\lambda t}, \; \dot{\varphi} = \lambda \, e^{\lambda t}, \; \ddot{\varphi} = \lambda^2 e^{\lambda t}. \qquad (6.\,239)$$

In (6. 237) eingesetzt, ergibt eine quadratische Gleichung für λ

$$(\lambda^2 + 2 \, \omega \, D \, \lambda + \omega^2) \, e^{\lambda t} = 0. \qquad (6.\,240)$$

Daraus folgt

$$\lambda_{1,\,2} = -\omega \, D \pm \sqrt{\omega^2 D^2 - \omega^2} = -\omega \, D \pm \omega \sqrt{D^2 - 1} \qquad (6.\,241)$$

Falldiskussion für das LEHRsche Dämpfungsmaß D < 1, D = 1, D > 1

Es handelt sich um eine Schwingung, wenn D < 1 ist

$$\lambda_{1,\,2} = -\omega \, D \pm j \, \omega \sqrt{1 - D^2}, \qquad (6.\,242)$$

um einen Kriechvorgang, wenn D > 1 ist

$$\lambda_{1,\,2} = -\omega \, D \pm \omega \sqrt{D^2 - 1}, \qquad (6.\,243)$$

und um den aperiodischen Grenzfall, wenn D = 1 ist. Mit einer Doppelwurzel ergibt sich

$$\lambda_{1,\,2} = -\omega. \qquad (6.\,244)$$

Daraus folgt die Dämpferkonstante

$$2 \, \omega = \frac{3}{4} \frac{r}{m} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{8m\omega}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 8 \sqrt{\frac{m\hat{c}}{3l^2}} \qquad (6.\,245)$$

und die Lösung des Systems mit den Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden können

$$\varphi(t) = A_1 \, e^{-\omega t} + A_2 \, t \, e^{-\omega t}, \; \dot{\varphi}(t) = -\omega \, e^{-\omega t} \left[A_1 + \frac{A_2}{\omega} + A_2 \, t\right]. \qquad (6.\,246)$$

Aufgabe 6. 9

- Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung und ihrer Partikularlösung
- Bestimmung der Erregerfrequenz
- Bestimmung der Amplitude der schwingenden Wagenmasse bei seiner Reisegeschwindigkeit
- Bestimmung der kritischen Reisegeschwindigkeit

Ein Auto, vereinfacht dargestellt als Masse- Feder- System (Dämpfungseinflüsse werden vernachlässigt), durchfährt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit v_0 sinusförmige Bodenwellen (Amplitude u_0, Wellenlänge L).

gegeben: c, m, v_0, u_0, L

gesucht: Bestimmung der Bewegungsdifferentialgleichung, die diesen Bewegungsablauf beschreibt, und ihrer Partikularlösung, Bestimmung der Erregerfrequenz, der Amplitude x_0 der schwingenden Wagenmasse bei einer Reisegeschwindigkeit v_0 und der kritischen Reisegeschwindigkeit v_{krit}.

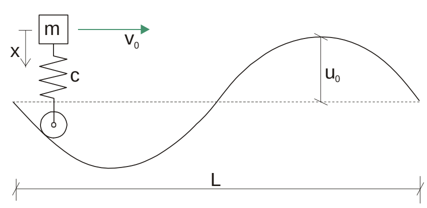


Bild 6. 56 Durchfahrt einer sinusförmigen Bodenwellen eines Autos mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit

Lösung

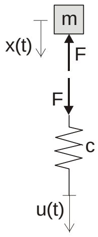


Bild 6. 57 Schnittbild

Aufstellen der Differentialgleichung mit Hilfe der NEWTONschen Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} = -F = -c\,(x-u) \qquad (6.247)$$

mit dem Federgesetz

$$F = c\,x \qquad (6.248)$$

folgt

$$m\,\ddot{x} + c\,x = c\,u. \qquad (6.249)$$

Die Funktion der Bodenwelle ist

$$u(t) = u_0 \sin \Omega\, t \qquad (6.250)$$

mit der Weglänge $L = v_0\,T = v_0\,\frac{2\pi}{\Omega}$ ergibt sich die Erregerfrequenz

$$\Omega = \frac{2\pi v_0}{L}. \qquad (6.251)$$

Daraus folgt

$$u(t) = u_0 \sin \frac{2\pi v_0}{L}\, t. \qquad (6.252)$$

Aus (6. 249) folgt

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\,x = \frac{c}{m}\,u(t) \qquad (6.253)$$

mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{c}{m}. \qquad (6.254)$$

Die partikuläre Differentialgleichung lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 u_0 \sin \frac{2\pi v_0}{L}\, t. \qquad (6.255)$$

Der Lösungsansatz lautet

$$x = x_{hom} + x_{part} = x_a = A \sin \omega\, t + B \cos \omega\, t + x_p = x_0 \sin \Omega\, t. \qquad (6.256)$$

In (6. 255) eingesetzt folgt

$$\sin \Omega\, t\,[-\Omega\, x_0 + \omega^2 x_0] = \omega^2 u_0 \sin \Omega\, t \qquad (6.257)$$

Daraus folgt die Amplitude

$$x_0 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}\, u_0 \qquad (6.258)$$

mit dem Verhältnis $\mu = \frac{\Omega}{\omega}$ folgt

$$x_0 = \frac{1}{1-\mu^2}\, u_0. \qquad (6.259)$$

Damit ergibt sich die kritische Reisegeschwindigkeit v_{krit} für Amplituden x_0 gegen unendlich ∞, das heißt, der Nenner $1-\mu^2$ muss gegen Null gehen

$$\mu^2 = 1. \qquad (6.260)$$

In diesem Fall erhält das System Resonanz, das heißt, die Erregerfrequenz entspricht der Eigenkreisfrequenz

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2 v^2}{\omega^2 L^2} = 1. \qquad (6.261)$$

Dann ist die kritische Reisegeschwindigkeit

$$v_{krit} = \frac{L}{2\pi}\,\omega = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (6.262)$$

Aufgabe 6. 10

- Bestimmung des Ausschlags des Klotzes nach einmaligem Hin- und Herschwingen
- Anwendung der COULOMBschen Reibung
- Lösung mit den NEWTONschen Bewegungsgleichungen
- Lösung mit dem Energiesatz

Auf einer rauhen, ebenen Unterlage liegt ein Klotz (Masse m), der durch zwei Federn (Federsteifigkeit c) seitlich gehalten wird. Der Klotz wird aus der Ruhelage (Federn ungespannt) um die Strecke x_0 ausgelenkt und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Der Reibungskoeffizient μ sei so klein, dass der Klotz einige Male hin- und herschwingt.

gegeben: c, m, μ, x_0

gesucht: Bestimmung des Ausschlags x_2 des Klotzes nach einmaligem Hin- und Herschwingen.

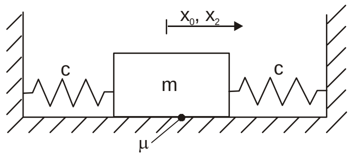


Bild 6. 58 Klotz auf einer rauhen, ebenen Unterlage

1. Lösungsmöglichkeit mit den NEWTONschen Bewegungsgleichungen

Die COULOMBsche Reibung ist der Geschwindigkeit immer entgegengesetzt, deshalb muss bei der Schwingungsgleichung auf das Vorzeichen geachtet werden.

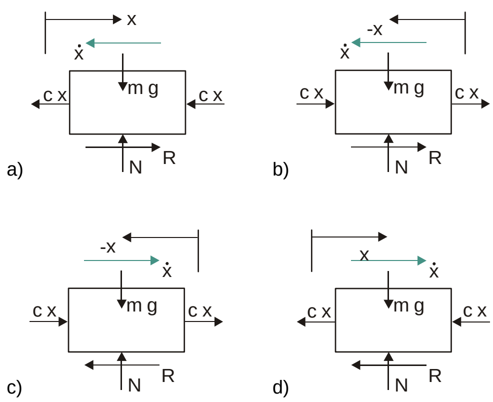


Bild 6. 59 Schnittbild a) Bewegung nach links (nach dem Loslassen): 1. Bewegungsablauf ; b) 2. Bewegungsablauf; c) Bewegung nach rechts: 3. Bewegungsablauf ; b) 4. Bewegungsablauf;

Für den 1. und 3. Bewegungsablauf gilt mit $R = \mu\, N$

$$m\,\ddot{x} = -2\,c\,x + \mu\, m\, g \qquad \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2c}{m}\,x = +\mu\, g, \qquad (6.263)$$

für den 2. und 4.Bewegungsablauf gilt

$$m\,\ddot{x} = -2\,c\,x - \mu\, m\, g \qquad \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2c}{m}\,x = -\mu\, g. \qquad (6.264)$$

Das System bewegt sich zuerst nach links, es gilt die Differentialgleichung (6. 263) mit deren Lösung für die Verschiebung

$$x = x_a + x_p = A_1 \sin \omega\, t + B_1 \cos \omega\, t + C_1 \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{\mu m g}{2c}, \qquad (6.265)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = A_1 \sin \omega\, t + B_1 \cos \omega\, t + \frac{\mu m g}{2c}, \qquad (6.266)$$

$$\dot{x}(t) = \omega\, A_1 \cos \omega\, t - \omega\, B_1 \sin \omega\, t, \qquad (6.267)$$

mit dem Anfangsauschlag x_0 als Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ folgt

$$B_1 = x_0 - \frac{\mu mg}{2c}\,,\; A_1 = 0 \qquad (6.\,268)$$

Damit lautet die Lösung für die 1. und 2. Bewegung nach links nach der Auslenkung

$$x(t) = (x_0 - \frac{\mu mg}{2c})\cos\omega t + \frac{\mu mg}{2c}\,, \qquad (6.\,269)$$

$$\dot x(t) = -\,\omega\,(x_0 - \frac{\mu mg}{2c})\sin\omega t \qquad (6.\,270)$$

Der maximale Ausschlag nach links $x_1(t_1)$ bei der Geschwindigkeit $\dot x_1(t_1) = 0$ sind Anfangsbedingungen für den zweiten Bewegungsablauf

$$\dot x_1(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\omega\, t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega\, t = 0, \pi, 2\pi, ... \qquad (6.\,271)$$

Der Zeitpunkt für den ersten Ausschlag ist

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} \text{ oder } \omega t_1 = \pi \qquad (6.\,272)$$

In (6. 269) und (6. 270) eingesetzt folgt

$$x_1(t_1) = (x_0 - \frac{\mu mg}{2c})\,(-1) + \frac{\mu mg}{2c} = -\,x_0 + \frac{\mu mg}{c} \qquad (6.\,273)$$

Es liegt die Vermutung nahe, dass der gesuchte Ausschlag

$$x_2 = x_0 - 2\frac{\mu mg}{c} \qquad (6.\,274)$$

beträgt, was zu beweisen ist.

Das System bewegt sich nach rechts, es gilt die Differentialgleichung (6. 264)

$$x(t) = A_2 \sin\omega t + B_2\cos\omega t - \frac{\mu mg}{2c}\,, \qquad (6.\,275)$$

$$\dot x(t) = \omega\, A_2\cos\omega t - \omega\, B_2 \sin\omega t. \qquad (6.\,276)$$

Mit den Anfangsbedingungen (6. 273) und (6. 271)

$$x_1(\omega t_1{=}\pi) = -\,x_0 + \frac{\mu mg}{c}\,,\; \dot x_1(\omega t_1{=}\pi) = 0 \qquad (6.\,277)$$

folgen die Konstanten

$$x_1(t_1) = -\,x_0 + \frac{\mu mg}{c} = B_2 - \frac{\mu mg}{2c} \Rightarrow \qquad B_2 = x_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu mg}{c}$$
$$\dot x_1(t_1) = 0 = \omega\, A_2\, 1 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0 \qquad (6.\,278)$$

Damit lautet die Lösung für die zweite Bewegung nach rechts

$$x(t) = (x_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu mg}{c})\cos\omega t - \frac{\mu mg}{2c}\,, \qquad (6.\,279)$$

$$\dot x(t) = -\,\omega\,(x_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu mg}{c})\sin\omega t \qquad (6.\,280)$$

Bei der Geschwindigkeit $\dot x_2(t_2) = 0$ ergibt sich

$$0 = -\,\omega\,(x_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu mg}{c})\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \omega\, t_2 = 2\pi \qquad (6.\,281)$$

der maximale Ausschlag nach rechts

$$x_2(\omega t_2{=}2\pi) = (x_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu mg}{c})\,1 - \frac{\mu mg}{2c} = x_0 - 2\,\frac{\mu mg}{c}\,. \qquad (6.\,282)$$

Die Vermutung hat sich bestätigt.

2. Lösungsmöglichkeit mit dem Energiesatz

Mit $|x_0| = s_0$ und $|x_1| = s_1$ lautet der Energiesatz für den ersten Bewegungsablauf nach links nach der ersten Auslenkung für zwei Federn

$$E_1 - E_0 = \int \vec F d\vec s \;\Rightarrow\quad 2\,[\frac{1}{2}\,c\,s_1^2 - \frac{1}{2}\,c\,s_0^2] = -\,\mu\, m\, g\,(s_0 + s_1). \qquad (6.\,283)$$

Damit ergibt sich der erste Ausschlag zu

$$s_1 = s_0 - \mu\,\frac{mg}{c}\,. \qquad (6.\,284)$$

Mit $|x_2| = s_2$ lautet der Energiesatz für den zweiten Bewegungsablauf nach rechts

$$E_2 - E_1 = \int \vec F d\vec s \;\Rightarrow\quad 2\,[\frac{1}{2}\,c\,s_2^2 - \frac{1}{2}\,c\,s_1^2] = -\,\mu\, m\, g\,(s_2 + s_1). \qquad (6.\,285)$$

Damit ergibt sich der zweite Ausschlag zu

$$x_2 = s_2 = -\,\mu\,\frac{mg}{c} + s_1 = s_0 - 2\,\mu\,\frac{mg}{c}\,. \qquad (6.\,286)$$

Aufgabe 6. 11

- Bestimmung der Eigenkreisfrequenz des Systems für kleine Ausschläge
- Bestimmung der Amplitude der Antwortfunktion im stationären Zustand

Ein Druckmessgerät für den veränderlichen Unterdruck $p(t) = p_0 \sin\Omega\, t$ besteht aus einem Kolben 1 (Masse m_1, Fläche A), einer Stange 2 (Masse m_2), einem dünnen Zeiger 3 (Masse m_3) und einer Feder 4 (Federsteifigkeit c). Das gesamte Gewicht soll im Lager O aufgenommen werden.

gegeben: m_1, m_2, m_3, A, c, l, a, p_0, Ω

gesucht: Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω des Systems für kleine Ausschläge und der Amplitude Q der Antwortfunktion $q(t) = Q \sin\Omega\, t$ im stationären Zustand.

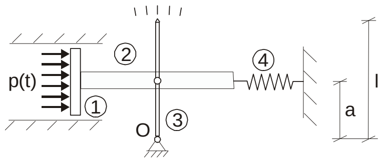


Bild 6. 60 Druckmessgerät für veränderlichen Unterdruck

Lösung

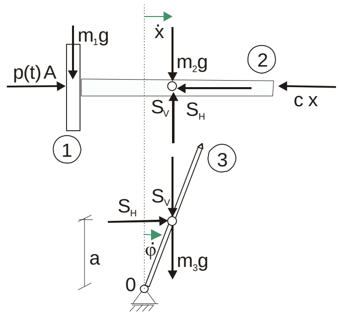


Bild 6. 61 Schnittbild im ausgelenktem Zustand

Die NEWTONschen Bewegungsgleichungen in horizontaler

$$(m_1 + m_2)\,\ddot x = p(t)\,A - c\,x - S_H \qquad (6.\,287)$$

und als geführte Bewegung in vertikaler Richtung

$$S_V = (m_1 + m_2)\,g \qquad (6.\,288)$$

und der Momentensatz lauten

$$\Theta_{3,\,O}\,\ddot\varphi = (S_V + m_3\, g)\,a\,\varphi + S_H\, a. \qquad (6.\,289)$$

Die Kinematik ist

$$a\,\dot\varphi = \dot x\,. \qquad (6.\,290)$$

Mit (6. 287) und (6. 289) mit (6. 288) und dem Massenträgheitsmoment der Stange der Zeigerlänge l $\Theta_{3,\,O} = \frac{1}{3}\, l^2\, m_3$ folgt

$$[m_1 + m_2 + \frac{1}{3}\frac{l^2}{a^2}\, m_3]\,\ddot x + [c - \frac{(m_1 + m_2 + m_3)g}{a}]\,x = p(t)\,A. \qquad (6.\,291)$$

Damit ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung zu

$$\ddot x + \frac{c - \dfrac{(m_1+m_2+m_3)g}{a}}{m_1 + m_2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{l^2}{a^2}m_3}\,x = \frac{A\, p_0 \sin\Omega t}{m_1 + m_2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{l^2}{a^2}m_3} = \tilde p\,\sin\Omega\, t. \qquad (6.\,292)$$

Damit ist die Eigenkreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{c - \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3)g}{a}}{m_1 + m_2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{l^2}{a^2} m_3} \,. \qquad (6.\ 293)$$

Die Dauerlösung für den stationären Zustand herrscht nach der Einschwingzeit. Die Schwingung ist dann nicht mehr von den Anfangsbedingungen, sondern nur noch von der Erregung beeinflusst.

Mit dem Partikularansatz

$$x_{part} = X \sin \Omega\, t \;\Rightarrow \qquad \ddot{x}_{part} = -\,\Omega^2 X \sin \Omega\, t \qquad (6.\ 294)$$

folgt in (6. 292)

$$X = \frac{\tilde{p}}{\omega^2 - \Omega^2} \,. \qquad (6.\ 295)$$

Mit dem Strahlensatz ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{Q}{l} = \frac{X}{a} \qquad (6.\ 296)$$

für die Amplitude der Antwortfunktion q(t)

$$Q = \frac{l}{a}\; \frac{A\, p_0}{m_1 + m_2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{l^2}{a^2} m_3}\; \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \,. \qquad (6.\ 297)$$