Inhaltsverzeichnis

6 Weiterführung der Theorie der Differentialgleichungen

6.1 Die Differentialgleichung der mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen

Definition und Satz 1: Gegeben sei eine mechanische Schwingung mit Pendelmasse m, Reibungsfaktor b und Federkonstante c. Sei ferner $F\left(t\right)$ die von außen einwirkende Kraft, abhängig von der Zeit t. Dann lautet die allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F\left(t\right)$$

wobei $x = x\left(t\right)$ die Auslenkung der Pendelmasse sei. Man unterscheidet folgende spezielle Schwingungstypen:

1. Die freie ungedämpfte Schwingung:

   - keine äußere Kraft:
     $$F\left(t\right) = 0$$
   - keine Reibung
     $$b = 0$$

   Die DGL lautet dann:
   $$m\ddot{x} + cx = 0$$

2. Die freie gedämpfte Schwingung:

   - keine äußere Kraft:
     $$F\left(t\right) = 0$$

   Die DGL lautet dann:
   $$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

3. Die erzwungene Schwingung:

   - die von außen einwirkende Kraft ist periodisch und lautet:
     $$F\left(t\right) = F_0 \sin\left(\omega t\right)$$
     Dabei ist ω die Erregerkreisfrequenz

Die DGL lautet dann:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \sin(\omega t)$$

Definition und Satz 2: Sei durch einen Reihenschwingkreis eine elektromagnetische Schwingung definiert Mit der von außen angelegte Spannung u_a, der Induktivität L der Spule, der Ohmsche Widerstand R, der Kapazität C des Kondensators, der Dämpfungsfaktor bzw. Abklingkonstante δ und die Eigen- bzw. Kennfrequenz ω_0 wird diese Schwingung durch die folgende Differentialgleichung einer elektromagnetischen Schwingung beschrieben:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i \quad = \quad \frac{1}{L} \cdot \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t}$$

wobei gilt: $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Satz 3: Sei $\ddot{y} + p \cdot \dot{y} + q \cdot y = f(t)$ die allgemeine Form der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann entsprechen sich mechanische und elektromagnetische Schwingungen wie folgt:

allgemein	$y(t)$	p	q	$f(t)$
mechanischer Schwingkreis	$x(t)$	$\frac{b}{m}$	$\frac{c}{m}$	$\frac{F(t)}{m}$
elektromagn. Schwingkreis	$i(t)$	$\frac{R}{L}$	$\frac{1}{LC}$	$\frac{1}{L} \cdot \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t}$

6.2 Die Lösung der Differentialgleichung einer freien ungedämpften Schwingung

Satz 1: Gegeben sei eine freie ungedämpfte Schwingung eines mechanischen Systems mit Pendelmasse m, Federkonstane c und $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, der Eigen- oder Kennkreisfrequenz des Systems. Die Differentialgleichung zu dieser Schwingung lautet:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

mit C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$, oder

$$x(t) = C \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mit Integrationskonstanten C und φ, $C \geq 0$ und $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Satz 2: Gegeben sei eine freie ungedämpfte Schwingung eines elektromagnetischen Reihenschwingkreises mit Induktivität L und Kapazität C. Sei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Eigen- oder Kennkreisfrequenz, dann lautet die Differentialgleichung zu diesem System wie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 i = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$i(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

mit C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$, oder

$$i(t) = C \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mit Integrationskonstanten C und φ, $C \geq 0$ und $-\pi \leq \varphi < \pi$.

6.3 Die Lösung der Differentialgleichung einer freien schwach gedämpften Schwingung

Satz 1: Gegeben sei eine freie gedämpfte Schwingung eines mechanischen Systems mit Pendelmasse m, Reibungsfaktor b, Federkonstante c, Dämpfungs- oder Abklingkonstante $\delta = \frac{b}{2m}$ sowie Eigen- bzw. Kennkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Die Differentialgleichung dieses Systems lautet:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann im

1. Fall $\delta < \omega_0$, schwache Dämpfung, Schwingungsfall
   mit $\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
   $$x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)\right)$$
   mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, oder
   $$x(t) = C \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi)$$
   mit Integrationskonstanten C und φ, $C \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.
2. Fall $\delta = \omega_0$, aperiodischer Grenzfall
   $$x(t) = (C_1 \cdot t + C_2) \cdot e^{-\delta t}$$
   mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
3. Fall $\delta > \omega_0$, starke Dämpfung, aperiodische Schwingung, Kriechfall
   mit
   $$\lambda_1 := -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$
   und
   $$\lambda_2 := -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$
   gilt
   $$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Satz 2: Gegeben sei eine freie gedämpfte Schwingung eines elektromagnetische Reihenschwingkreises mit Induktivität L, Ohmschen Widerstand R und Kapazität C. Sei $\delta = \frac{R}{2L}$ Dämpfungsfaktor und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Kennkreisfrequenz. Dann lautet die Differentialgleichung zu diesem System wie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i \quad = \quad 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann im

1. Fall $\delta < \omega_0$, schwache Dämpfung, Schwingungsfall
   mit $\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
   $$i(t) = e^{-\delta t}\left(C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)\right)$$
   mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, oder
   $$i(t) = C \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi)$$
   mit Integrationskonstanten C und φ, $C \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

2. Fall $\delta = \omega_0$, aperiodischer Grenzfall

$$i\left(t\right) = \left(C_1 \cdot t + C_2\right) \cdot e^{-\delta t}$$

   mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Fall $\delta > \omega_0$, starke Dämpfung, aperiodische Schwingung, Kriechfall
   mit

$$\lambda_1 := -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

   und

$$\lambda_2 := -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

   gilt

$$i\left(t\right) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

6.4 Die Lösung der Differentialgleichung einer erzwungenen ungedämpften Schwingung

Definition 1: Sei $y\left(x\right)$ eine Lösungsfunktion einer Differentialgleichung. Ist $y\left(x\right) \leq M$ für $x \to \infty$ und M eine beliebige aber feste Schranke, so heißt $y\left(x\right)$ stabil. Ist $y\left(x\right)$ nicht stabil, so heißt $y\left(x\right)$ instabil.

Satz 1: Gegeben sei eine erzwungene ungedämpfte Schwingung eines mechanischen Systems mit Pendelmasse m, Federkonstante c und Kennkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Die Differentialgleichung dieses Systems lautet:

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \sin\left(\omega t\right) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = K_0 \sin\left(\omega t\right),$$

wenn man annimmt, daß die von außen wirkende Kraft sinusförmig ist. d.h. $F\left(t\right) = F_0 \sin\left(\omega t\right)$ gilt, und mit $K_0 := \frac{F_0}{m}$.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet im

1. Fall, $\omega \neq \omega_0$, mit den Konstanten $C > 0$ und φ, $\pi \leq \varphi < \pi$:

$$x_{allg} = C \cdot \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{K_0}{\omega_0^2 - \omega} \cdot \sin\left(\omega t\right)$$

2. Fall, $\omega = \omega_0$, mit den Konstanten $C > 0$ und φ, $-\pi \leq \varphi < \pi$:

$$x_{allg} = C \cdot \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{1}{2}\frac{K_0}{\omega_0} \cdot t \cdot \cos\left(\omega_0 t\right)$$

6.5 Die Lösung der Differentialgleichung einer erzwungenen schwach gedämpften Schwingung

Satz 1: Gegeben sei eine erzwungene schwach gedämpfte Schwingung eines mechanischen Systems mit Pendelmasse m, Dämpfungsfaktor b, Federkonstante c sowie Abklingkonstante $\delta = \frac{b}{2m}$ und Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Die Differentialgleichung dieses Systems lautet:

$$m\ddot{x} + bx + cx = \dot{F}_0 \cdot \sin\left(\omega t\right) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = K_0 \cdot \sin\left(\omega t\right),$$

wenn man annimt, daß die von außen wirkende Kraft schwingungsförmig ist, d.h.

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

gilt, und mit $K_0 := \frac{F_0}{m}$.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann:

$$x_{allg} = e^{-\delta t} \cdot C_h \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi_h) + K \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

mit Konstanten $C_h > 0$ und φ_h, $0 \leq \varphi_h < 2\pi$ sowie ω_d, K und φ wie folgt:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \arctan_{HW}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) - \pi & \text{falls } \omega > \omega_0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } \omega = \omega_0 \\ \arctan_{HW}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) & \text{falls } \omega < \omega_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wobei arctan der Hauptwert} \\ \text{sei } \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(*) \leq \frac{\pi}{2}\right). \end{array}$$

und

$$K = K_0 \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$\varphi = \varphi(\omega)$ heißt Frequenz der Phase und

$K = K(\omega)$ heißt Frequenzgang des Scheitelwertes.

Bemerkung und Definition 1: Die allgemeine Lösung einer erzwungenen schwach gedämpften Schwingung

$$x_{allg} = e^{-\delta t} C_h \sin(\omega_d t + \varphi_h) + K \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

besteht aus zwei Summanden. Der Summand

$$e^{-\delta t} C_h \sin(\omega_d t + \varphi_h)$$

ist die Lösung der zur Differentialgleichung einer erzwungenen schwach gedämpften Schwingung zugehörigen homogenen Differentialgleichung und strebt für $t \to \infty$ gegen Null. Er heißt daher **flüchtiger Anteil**. Der zweite Summand

$$K \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

überwiegt für $t \to \infty$ völlig den flüchtigen Anteil und heißt **stationärer Anteil**. Die Phase der Schwingung, in der der flüchtige Anteil einen Einfluß auf die Schwingung hat heißt **Einschwingphase**.

Bemerkung und Definition 2: Die Amplitude K des stationären Anteils der Lösung gemäß Satz 1 wird genau dann maximal, wenn gilt:

$$\omega = \omega_r := \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta}^2$$

ω_r heißt **Resonanzfrequenz**.

In einem schwach gedämpften System gilt stets $\omega_r < \omega_0$ und $\omega_r < \omega_d$.

Bemerkung 3: Nach der Einschwingphase schwingt das mechanische System aus Satz 1 gemäß der Gleichung

$$x(t) = K \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

(stationärer Anteil. Dies gilt in gleicher Weise für stark gedämpfte mechanische Systeme sowie den aperiodischen Grenzfall. Dabei wird die Kurve für $K = K(\varphi)$, die sogenante **Resonanzkurve** zunehmend flacher und das lokale Maximum ω_r gemäß Bemerkung und Definition 2 verschwindet für hohe Dämpfunen mit Abklingkonstanten $\delta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Bemerkung 4: Sei ein mechanisches System gemäß Satz 1 gegeben, jedoch ohne Dämpfung, d.h. $b = 0$ und $\delta = 0$. Dann gilt für die Resonanzfrequenz ω_r:

$$\omega_r = \omega_0$$

Damit ist die Resonanzfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Systems. Für die Resonanzfrequenz gilt:

$$K(\omega) = K_0 \frac{1}{|\omega_0 - \omega|}$$

und für $\omega \to \omega_r = \omega_0$ geht $K(\omega)$ gegen $+\infty$: Das System schwingt mit unendlich großer Amplitude und wird daher zerstört. Man spricht von einer **Resonanzkatastrophe**. Die Resonanzkatastrophe kann nur für $\delta = 0$ (keine Dämpfung) eintreten, da sonst der Nennen im Ausdruck für $K(\omega)$niemals gleich Null werden kann.

Satz 2: Gegeben sei eine erzwungene schwach gedämpfte Schwingung eines elektromagnetischen Reihenschwingkreises mit Induktivität L, Ohmschen Widerstand R und Kapazität C. Sei $\delta = \frac{R}{2L}$ Dämpfungsfaktor und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Kennkreisfrequenz. Dann lautet die Differentialgleichung zu diesem System

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t}$$

wenn $u_a(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$eine von außen angelegte sinusförmige Wechselspannung (Erregerspannung) ist. Die allgmeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$i_{allg}(t) = i_s(t) + i_f(t)$$

und setzt sich aus flüchtigem Anteil $i_f(t) = C_h e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_h)$ und stationärem Anteil $i_s(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$zusammen. Dabei ist

$$\omega_d := \sqrt{\omega_9^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

mit $C_h > 0$ und $-\pi \leq \varphi_h < \pi$ als Konstanten. Ferner ist

$$\hat{i} = \hat{i}(\omega) = \frac{\hat{u} \cdot \omega}{L\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

und

$$\varphi = \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right)$$

$\hat{i}(\omega)$ = Frequenzgang des Scheitelwerts bzw. Resonanzkurve

$\varphi(\omega)$ = Frequenzgang der Phase

Resonanzfrequenz:

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$