1 Erzwungene schwach gedämpfte Schwingungen eines mechanischen Systems

DGL:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + b\dot{x} + cx &= F_0 \sin(\omega t) \\
\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x &= \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \\
\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x &= K_0 \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

mit

$$\delta = \frac{b}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad K_0 = \frac{F_0}{m}$$

Schwingfall	aperiodischer Grenzfall	Kriechfall
$\delta < \omega_0$	$\delta = \omega_0$	$\delta > \omega_0$
$x(t) = C_h e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_h)$	$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\delta t}$	$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$

stationärer Anteil:

$$x_s(t) = K \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

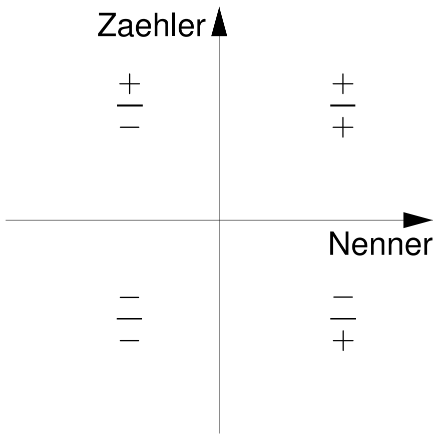
mit

$$K = \frac{K_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

und

$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi = \arctan_{\mathrm{Hw}}\left(\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \pi$

Betrachtung des Quadranten:



flüchtiger Anteil:

$$x_f(t) = C_h e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_h)$$

allgemeine Lösung:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_f(t) + x_s(t) \\
x(t) &= C_h e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_h) + K \cdot \sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

2 Erzwungene schwach gedämpfte Schwingung eines elektromagnetischen Reihenschwingkreises

DGL:

$$\begin{aligned} L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i &= \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i &= \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \delta = \frac{R}{2L} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Schwingfall	aperiodischer Grenzfall	Kriechfall
$\delta < \omega_0$	$\delta = \omega_0$	$\delta > \omega_0$
$i(t) = C_h e^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \varphi_h)$	$i(t) = (C_1 t + C_2)\, e^{-\delta t}$	$i(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$

stationärer Anteil:

$$i_s(t) = \hat{i}\sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}\cdot\omega}{L\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right)$$

flüchtiger Anteil:

$$i_f(t) = C_h e^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \varphi_h)$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_f(t) + i_x(t) \\ i(t) &= C_h e^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \varphi_h) + \hat{i}\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Resonanzfrequenz:

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$