

1. EINFÜHRUNG:

1.1. PRINZIPIEN DER MECHANIK

1. Trägheitsprinzip (Es führt auf Galilei und Newton zurück)

Ein Massenpunkt habe die Masse m und die Geschwindigkeit \vec{v} . Damit ist der Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \vec{0} \quad : \quad \vec{p} = m\vec{v} = \overline{\text{konstant}} \quad (1.1)$$

Einzelfall: $m = \text{konst.}$:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad : \quad \vec{v} = \overline{\text{konstant}} \quad (1.1')$$

Ist die resultierende Kraft auf den Massenpunkt gleich Null, dann bleibt dieser entweder für alle Zeiten in Ruhe, oder bewegt er sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

2. Dynamisches Grundgesetz (Es führt auf Newton zurück)

Ein Massenpunkt habe die Masse m und die Geschwindigkeit \vec{v} . Damit ist der Impuls

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (1.2)$$

Einzelfall: $m = \text{konst.}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (1.2')$$

Die resultierende Kraft auf den Massenpunkt mit konstanter Masse ist gleich dem Produkt Masse mal Beschleunigung

Daraus resultiert auch die Maßeinheit für die Kraft: $1N = 1kg \cdot 1m/s^2 = 1 kg \cdot m/s^2$

3. Wechselwirkungsprinzip: Die Kräfte treten immer paarweise als Wirkung und Gegenwirkung auf.

Wirkung und Gegenwirkung sind betragsmäßig gleich und entgegengesetzt gerichtet.
oder kurz formuliert:

actio und reactio sind entgegengesetzt gleich

Sind zum Beispiel zwei Körper im Kontakt, dann ist \vec{F}_{12} die Kraft auf den Körper **1**, die von dem Körper **2** ausgeübt wird. Umgekehrt, reagiert der Körper **1** durch eine gleich große Gegenkraft auf den Körper **2** (Bild 1.1):

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (1.3)$$

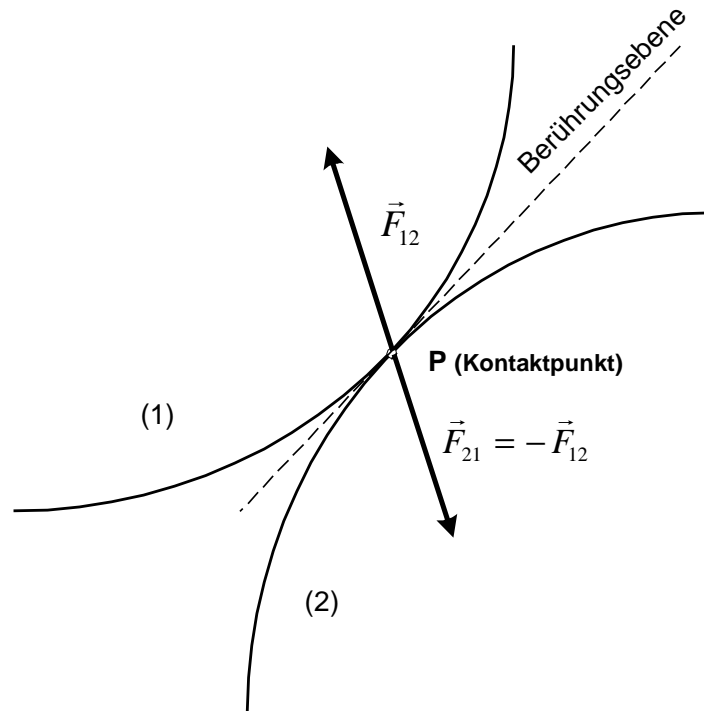


Bild 1.1: Kontaktkräfte als Wirkung und Gegenwirkung

Ein anderes Beispiel für Wirkung und Gegenwirkung besteht aus den **Anziehungskräften** zweier **Massenpunkte**.

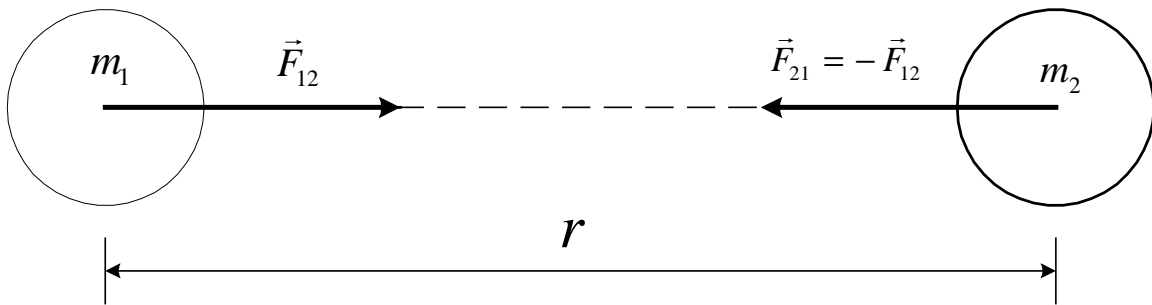


Bild 1.2: Anziehungskräfte zweier Massenpunkte.

Gravitationsgesetz (Newton): Zwei Massenpunkte ziehen sich gegenseitig an jeweils mit einer Kraft, die proportional zum Produkt ihrer Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen ihnen ist:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = f \frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \tag{1.4}$$

$f = 6,673 \cdot 10^{-11}$ (in SI-Maßsystem) - Graviationskonstante

Die Erde mit der Masse **M** und dem mittleren Radius **R** zieht einen an der Erdoberfläche befindlichen Körper der Masse **m** an mit der Kraft

$$G = mg = f \frac{M m}{R^2}$$

Daraus resultiert die Fallbeschleunigung

$$g = f \frac{M}{R^2} \cdot \quad (1.5)$$

Mit dem Einfluss der Rotation der Erde um ihre Achse ist $g = 9,8066 \text{ m/s}^2 \cong 9,81 \text{ m/s}^2$

4. Axiom des Parallelogramms: Die Resultierende zweier Kräfte mit einem gemeinsamen Angriffspunkt ergibt sich als Diagonale des von den beiden Kräften aufgespannten Parallelogramms (Bild 1.2).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.6)$$

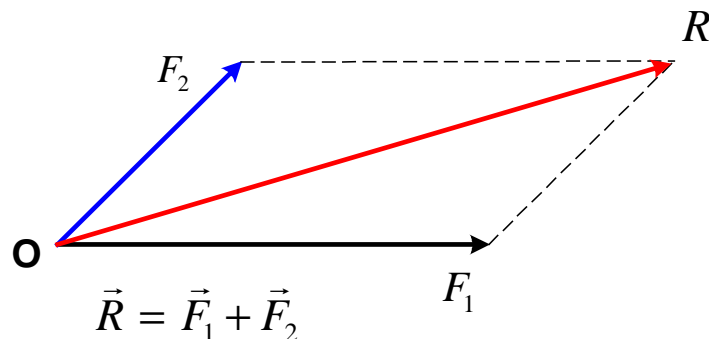


Bild 1.3: Parallelogrammregel bei der Zusammensetzung zweier Kräfte mit einem gemeinsamen Angriffspunkt

1.2. EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORRECHNUNG

Die Vektorrechnung hat ihren Ursprung in der Mechanik. Beispiele für vektorielle Größen sind Kraft, Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes, Geschwindigkeit oder Beschleunigung eines Massenpunktes.

Ein **Vektor** ist durch Norm (Länge), Wirkungslinie, Richtungssinn und Angriffspunkt (Anfangspunkt) gekennzeichnet. Ein solcher Vektor ist ein **gebundener Vektor**. Ein Beispiel hierfür ist die Kraft an einem verformbaren Körper. Fehlt der Angriffspunkt, so spricht man von einem **linienflüchtigen Vektor**. Beispiel hierfür ist die Kraft an einem starren Körper: die Kraft kann längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Schließlich, hat ein **freier Vektor** nur Norm (Länge) und Richtung, d.h. er kann parallel verschoben werden. Das einzige Beispiel hierfür aus der Mechanik ist das Moment eines Kräftepaars.

Die Mathematik arbeitet mit freien Vektoren.

Die Vektoren gleicher Natur bilden eine Vektormenge V , die durch Operationen strukturiert wird.

1) Addition von Vektoren ,

$$\vec{a}, \vec{b} \in V \quad : \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \in V \quad (1.7)$$

als innere Operation in V , wird durch die Parallelogrammregel definiert: \vec{c} ist die Diagonale des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms, wobei die freien Vektoren \vec{a} und \vec{b} parallel verschoben wurden, so dass sie einen gemeinsamen Anfangspunkt haben. Wie das Bild 1.4 zeigt, kann die Parallelogrammregel durch die Dreiecksregel ersetzt werden. Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} werden aneinander gefügt und die Summe verbindet den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten Vektors.

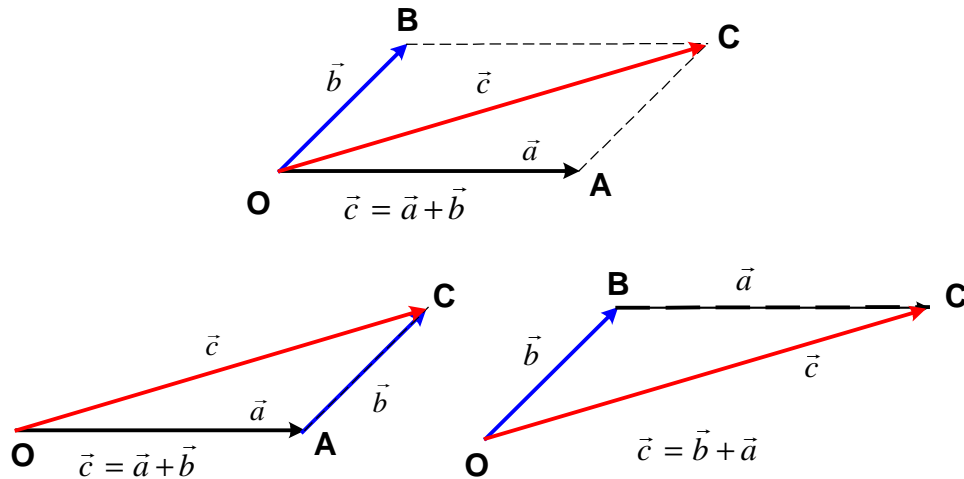


Bild 1.4: Addition von Vektoren nach der Parallelogrammregel oder der Dreiecksregel

Bild 1.4 verdeutlicht dass die **Addition von Vektoren kommutativ** ist

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1.8)$$

Die **Addition von Vektoren ist auch assoziativ** (Bild 1.5):

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

oder

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad (1.9)$$

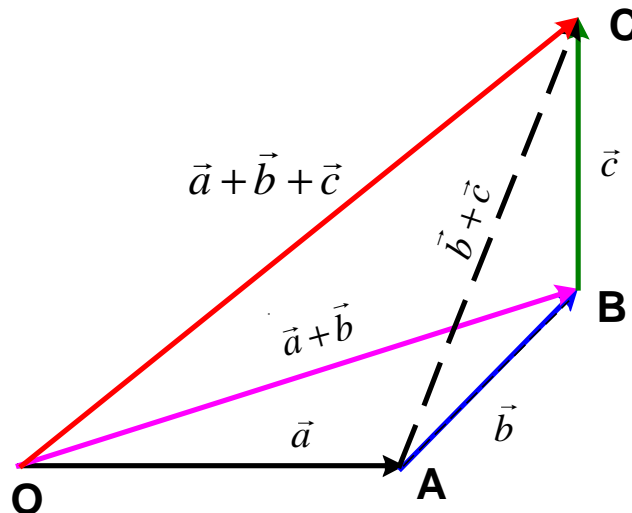


Bild 1.5: Assoziativgesetz bei der Addition von Vektoren

Die Vektormenge hat auch als Nullelement den Nullvektor $\vec{0}$ mit der Länge gleich Null. Schließlich, zu jedem Vektor $\vec{a} \in V$ gibt es den gleichlangen Vektor $-\vec{a} \in V$, entgegengesetzt gerichtet, so dass

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad (1.10)$$

Mit diesen Eigenschaften ist die Vektormenge, zusammen mit der inneren Operation Addition, eine **kommutative Gruppe**.

2) Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

Als externe Operation wird die **Multiplikation eines Vektors $\vec{a} \in V$ mit einem skalaren Faktor $\alpha \in \mathbb{R}$** definiert. Das Produkt ist $\alpha \vec{a} \in V$.

Eigenschaften:

- **Assoziativgesetz:** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in V$: $(\alpha \beta) \gamma \vec{a} = \alpha (\beta \gamma) \vec{a} = \alpha \beta \gamma \vec{a}$; (1.11)

- **Einheitselement** $1 \in \mathbb{R}$: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; (1.12)

- **Distributivgesetz** bezüglich der Addition von Vektoren und Skalaren:

$$\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}; (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}. \quad (1.13)$$

Die Vektormenge, zusammen mit den zwei definierten Operationen, bildet einen **Vektorraum**. Als wichtiges Beispiel hierfür sei der **3D – Euklidische Raum** \mathbb{R}^3 erwähnt.

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind **linear unabhängig**, wenn die lineare Kombination $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ dann und nur dann verschwindet, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Drei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis im Vektorraum \mathbb{R}^3 . Das bedeutet: Jeder andere Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich eindeutig in Komponenten in Richtungen von \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} zerlegen:

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (1.14)$$

Als Basis des Euklidischen Raums \mathbb{R}^3 werden am häufigsten die Einheitsvektoren \vec{i}, \vec{j} und \vec{k} des kartesischen Koordinatensystems gewählt (Bild 1.6).

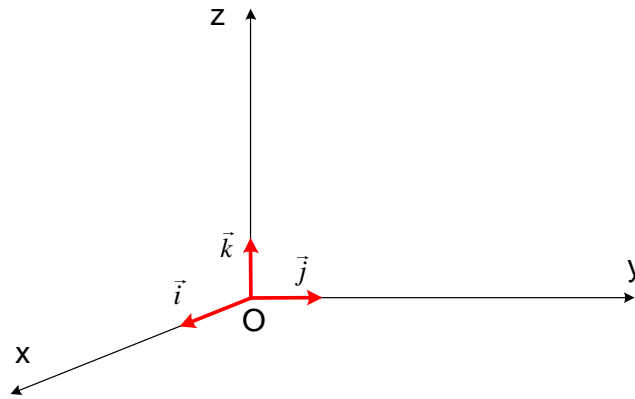


Bild 1.6: Kartesisches Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren

In diesem Bezugssystem hat jeder Vektor drei Komponenten:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Die Einheitsvektoren und der Nullvektor lassen sich wie folgt darstellen:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren ist eine skalare Größe, **gleich dem Produkt der Längen beider Vektoren mal Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren** (Bild 1.7):

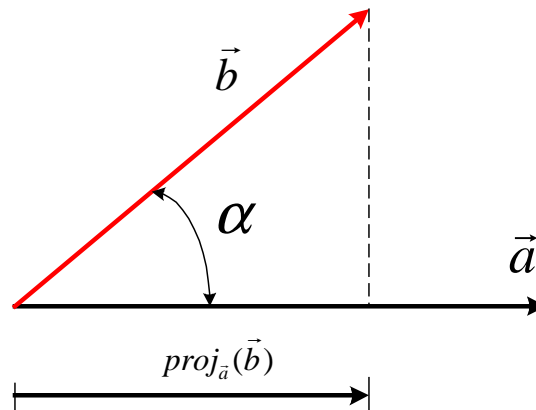


Bild 1.7: Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{a} \vec{b} := \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \alpha = ab \cos \alpha = a \cdot \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}) \quad (1.17)$$

Das Skalarprodukt kann man auch als Produkt der Länge des Vektors \vec{a} und der Projektion des Vektors \vec{b} in Richtung von \vec{a} interpretieren. Das Skalarprodukt ist offensichtlich kommutativ.

Sind die Vektoren senkrecht zueinander ($\alpha = \pi/2$), so ist ihr Skalarprodukt nach Gl.1.16) gleich null. Aus der Definition (1.16) folgt es für die Einheitsvektoren:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

Ebenso lässt sich das Skalarprodukt analytisch wie folgt darstellen:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.18)$$

Für $\vec{b} = \vec{a}$ erhält man aus Gl.(1.16) und (1.18): $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

oder die Länge des Vektors \vec{a}

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.19)$$

Aus Gl(1.16), (1.18) und (1.19) resultiert noch

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1.20)$$

Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (1.21)$$

auch **Vektorprodukt** genannt, ist ein Vektor, der senkrecht zu der Ebene von \vec{a} und \vec{b} steht (Bild 1.8). Der Richtungssinn von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ergibt sich nach der **Regel der**

Rechtsschraube: dreht man die Rechtsschraube von \vec{a} nach \vec{b} , dann bewegt sie sich in Richtung des Kreuzproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Die Länge von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich der Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird.

Anders ausgedrückt, schreibt sich die Norm des Kreuzproduktes zu:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = ab \sin \alpha \quad (1.22)$$

Aus der Definition resultiert unmittelbar, dass **das Kreuzprodukt antikommutativ** ist

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \quad (1.23)$$

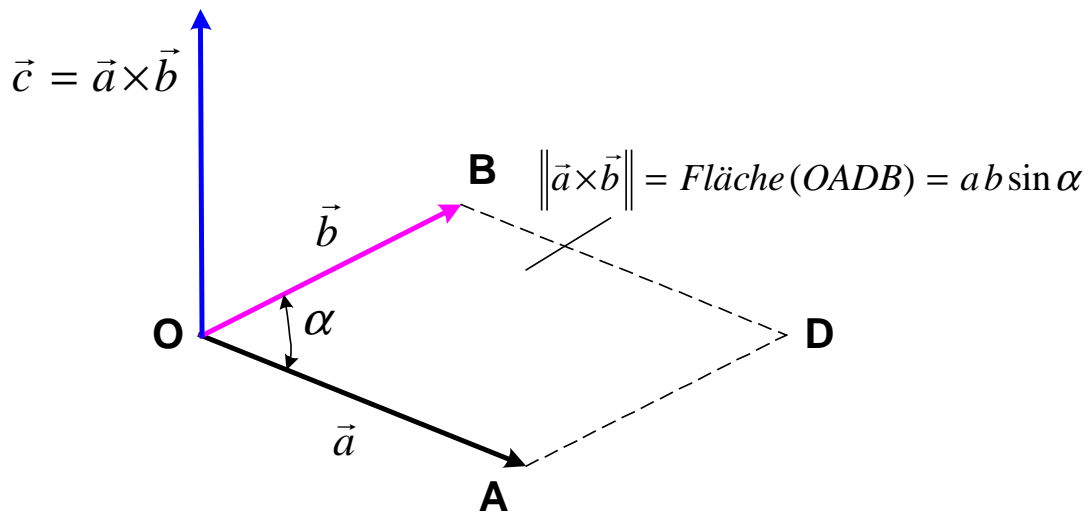


Bild 1.8: Kreuzprodukt zweier Vektoren

Sind beide Vektoren parallel zueinander, dann ist $\alpha = 0$ oder π , d.h. $\sin \alpha = 0$ und damit verschwindet ihr Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Für die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems resultieren die Beziehungen:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0};$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Damit errechnet sich das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zu:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

oder

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.24)$$

Beispiel 1.4: Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten

$A(x_A / y_A)$, $B(x_B / y_B)$ und $C(x_C / y_C)$. Man bestimme:

1. Koordinaten des Mittelpunktes C' der Seite AB;
2. Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks;
3. Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: Das Dreieck wird in die in die (x, y) – Ebene platziert.

1. Die Seite AB mit dem Mittelpunkt M legt man zunächst in eine beliebige Lage (Bild 1.9). Es gilt:

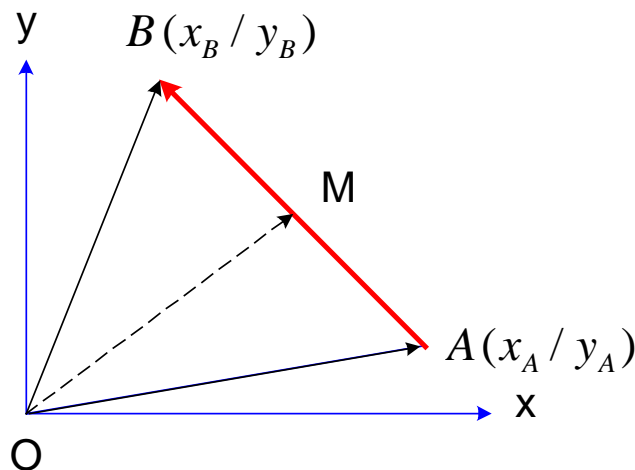


Bild 1.9: Mittelpunkt M der Strecke AB

Somit lauten die Koordinaten des Mittelpunktes M:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

2. Die Seitenhalbierende AA' des Dreiecks ABC ist die Hälfte der Diagonalen des von den Vektoren \vec{AB} und \vec{AC} aufgespannten Parallelogramms (Bild 1.10). Daraus folgt es:

$$\overline{AA'} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

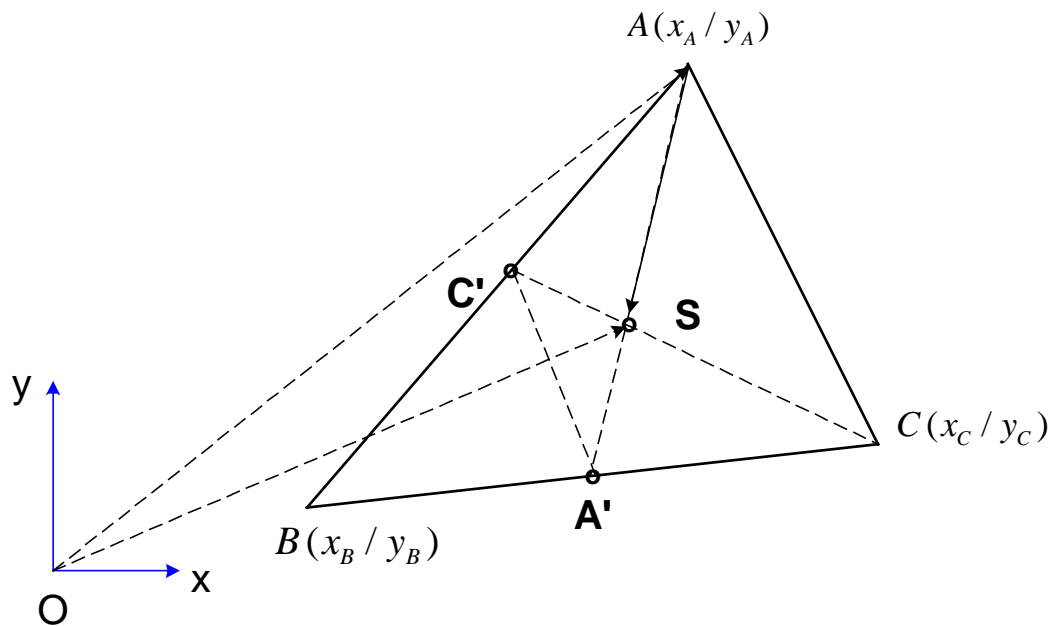


Bild 1.10: Mittelpunkt C' der Seite AB, sowie Schwerpunkt S und Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$\overline{OS} = \overline{OA} + \overline{AS} = \overline{OA} + \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC} - 2\overline{OA}) = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

Damit sind die Koordinaten des Schwerpunktes:

$$\boxed{x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C); y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)}$$

3. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich der Hälfte des Flächeninhaltes des Parallelogramms, das von den Vektoren \overline{AB} und \overline{AC} aufgespannt ist, d.h.:

$$A = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \|\vec{k}\| \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$$

oder

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}$$

Die letzte Determinante ist positiv, wenn die Eckpunkte A, B und C des Dreiecks in der mathematisch positiven Richtung gezählt werden. Dann entfällt der Betrag dieser Determinante.

Das **Spatprodukt** dreier Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist eine skalare Größe und errechnet sich als Skalarprodukt des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ mit dem Vektor \vec{c} (Bild.1.9):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot c \cdot \cos \beta \quad (1.24)$$

Da die Norm $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms OADB ist und $c \cos \beta$ die Projektion des Vektors \vec{c} in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ bedeutet, schließen wir, dass das Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ gleich dem Volumen des von den drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ausspannten Parallelepipeds mal eins (für $0 \leq \beta < \pi/2$) oder minus eins

(für $\pi/2 < \beta < \pi$). Aus dieser Interpretation folgt es: bei einer Permutation der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} bleibt das Spatprodukt unverändert:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (1.25)$$

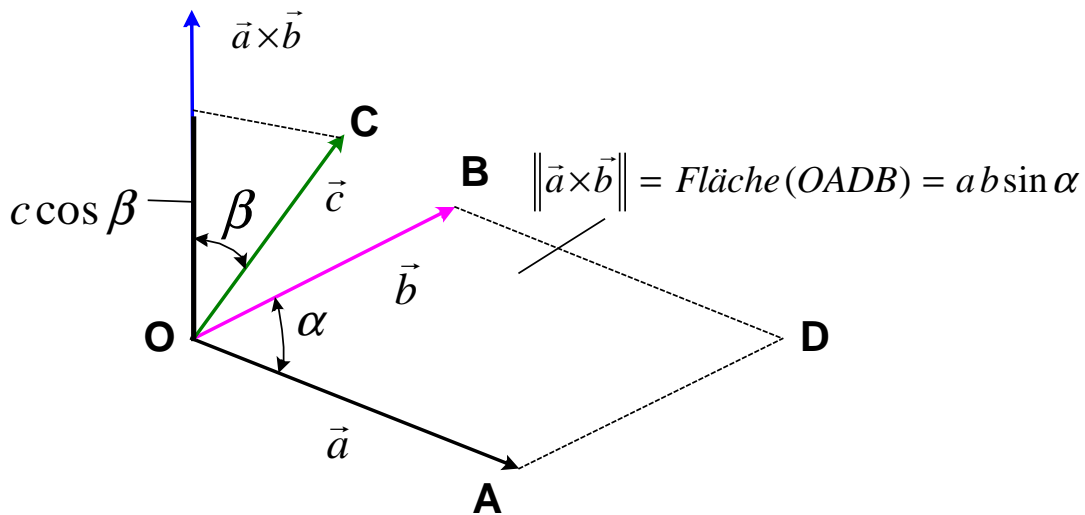


Bild 1.9: Spatprodukt dreier Vektoren

Mit dem Ausdruck (1.18) für das Skalarprodukt und dem Ausdruck (1.24) für das Kreuzprodukt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_x (\vec{b} \times \vec{c})_x + a_y (\vec{b} \times \vec{c})_y + a_z (\vec{b} \times \vec{c})_z = \\ &= a_x (b_y c_z - b_z c_y) + a_y (b_z c_x - b_x c_z) + a_z (b_x c_y - b_y c_x) \end{aligned}$$

Das Spatprodukt schreibt sich endgültig wie folgt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.26)$$

Wenn zwei Vektoren parallel zueinander sind, dann entartet das Parallelepipid und sein Volumen verschwindet. Nach Gl.(1.26) sind dann zwei Zeilen der Determinante proportional

Beispiel 1.6: Angenommen, ist das Spatprodukt dreier Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ungleich Null. Damit sind diese Vektoren linear unabhängig und bilden eine Basis im Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Jeder andere Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich in Richtungen der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} zerlegen:

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \quad (1.27)$$

Man bestimme die Koeffizienten α , β und γ .

Lösung :

Skalare Multiplikation der Gl.(1.27) mit $\vec{b} \times \vec{c}$ ergibt:

$$\vec{v}(\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha \cdot \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) + \beta \cdot \vec{b}(\vec{b} \times \vec{c}) + \gamma \cdot \vec{c}(\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha \cdot \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\text{oder } \alpha = \frac{\vec{v}(\vec{b} \times \vec{c})}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}$$

Auf ähnliche Weise errechnen sich die Koeffizienten β und γ . Damit erhält man:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}(\vec{b} \times \vec{c})}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})} \cdot \vec{a} + \frac{\vec{v}(\vec{c} \times \vec{a})}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})} \cdot \vec{b} + \frac{\vec{v}(\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})} \cdot \vec{c}$$

Das zweifache Kreuzprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist ein Vektor, der senkrecht zu \vec{a} und zu $\vec{b} \times \vec{c}$ steht. Damit liegt der Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ in der Ebene von \vec{b} und \vec{c} und lässt sich in Richtungen dieser Vektoren zerlegen.

Es ist leicht in Komponenten – Schreibweise zu zeigen, dass das zweifache Kreuzprodukt sich wie folgt schreiben lässt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (1.27)$$

Die Beweisführung überlassen wir den Studierenden als Übung.

Kapitel 2: ZENTRALES KRÄFTESYSTEM

Ein zentrales Kräftesystem ist ein System von Kräften, deren Wirkungslinien sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Angenommen, auf einen Massenpunkt wirken zwei Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 . Nach dem Axiom des Parallelogramms **ist die Auswirkung dieser Kräfte mit einem gemeinsamen**

Angriffspunkt äquivalent zu einer Resultierenden \vec{R} , die den gleichen Angriffspunkt hat und nach Betrag und Richtung die Diagonale des Parallelogramms ist, das von diesen Kräften aufgespannt ist(Bild 2.1):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.1)$$

Quadriert man diese vektorielle Gleichung, so ergibt sich die Norm (Länge) der Resultierenden zu:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta} \quad (2.1')$$

Skalare Multiplikation der Gl. (2.1) mit \vec{F}_1 ergibt:

$$\vec{R} \cdot \vec{F}_1 = F_1^2 + \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_1 \quad \text{oder} \quad R F_1 \cos \alpha = F_1^2 + F_1 F_2 \cos \theta$$

Daraus ergibt sich der Winkel α zwischen \vec{R} und \vec{F}_1 zu:

$$\cos \alpha = \frac{F_1 + F_2 \cos \theta}{R} \quad (2.1'')$$

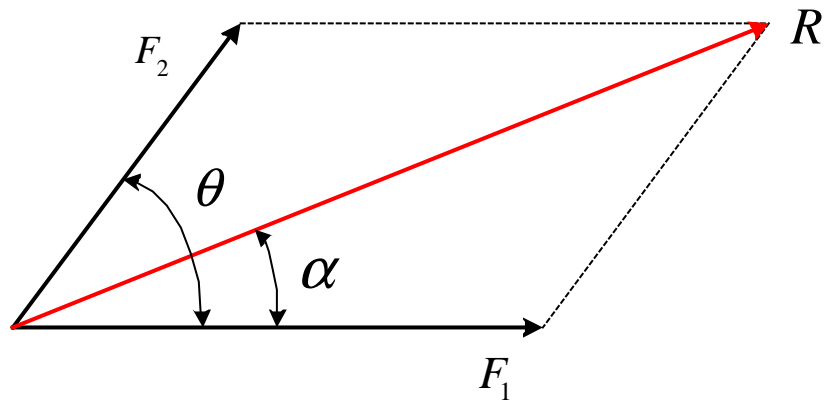


Bild 2.1: Resultierende zweier Kräfte nach der Parallelogrammregel

Gegeben ist nun ein System von n Zentralkräften: \vec{F}_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), (Bild 2.2)

Die Resultierende ist

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.2)$$

Die vektorielle Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (2.3)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

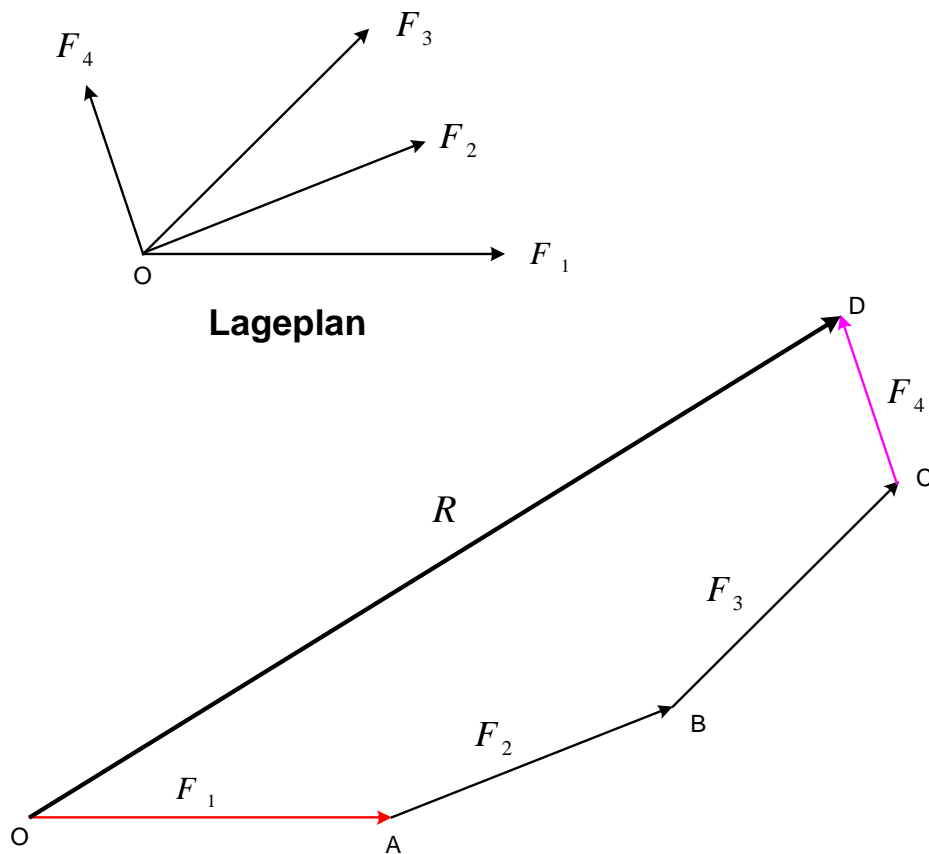
a) Zentrales, ebenes Kräftesystem (oder 2D –Kräftesystem):

$$\vec{F}_i = \begin{cases} X_i \\ Y_i \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Die Resultierende \vec{R} liegt auch in der Ebene der Kräfte: $\vec{R} = \begin{cases} R_x \\ R_y \end{cases}$.

Ihre Komponenten errechnen sich zu:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.5)$$



Kräfteplan : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

Bild 2.2: Zentrales Kräftesystem

Daraus errechnen sich die Norm der Resultierenden

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{2.6}$$

und der Winkel α der Resultierenden gegen die x – Achse (Bild 2.3):

$$\tan \alpha = R_y / R_x . \tag{2.7}$$

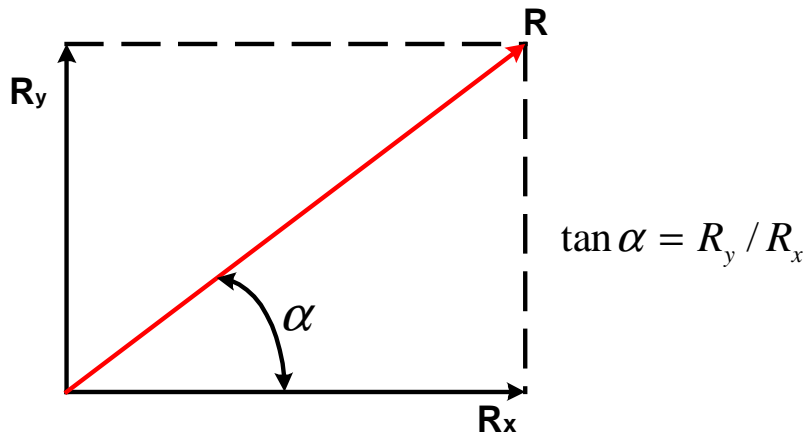


Bild 2.3: Resultierende eines zentralen 2D – Kräftesystems

Hinweis: Das Bild zeigt den Fall in dem beide Komponenten der Resultierenden positiv sind. Um den allgemeinen Fall zu erfassen, soll der Winkel α mit der Funktion **arctan2** bestimmt werden, deren Wertebereich $(-\pi, \pi]$ ist. Unter **MATLAB** und **FORTRAN** wird der Befehl $alpha = a \tan 2(R_y, R_x)$ eingegeben.

Die vektorielle Gleichgewichtsbedingung (2.3) ist äquivalent zu zwei skalaren Gleichungen:

$$R_x \equiv \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad R_y \equiv \sum_{i=1}^n Y_i = 0. \quad (2.8)$$

b) Zentrales, 3D - Kräftesystem): $\vec{F}_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}, (i = 1, 2, \dots, n).$

Die Resultierende $\vec{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix}$ hat die Komponenten (Bild 2.10) :

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2.9)$$

Daraus errechnen sich die Norm der Resultierenden

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.9')$$

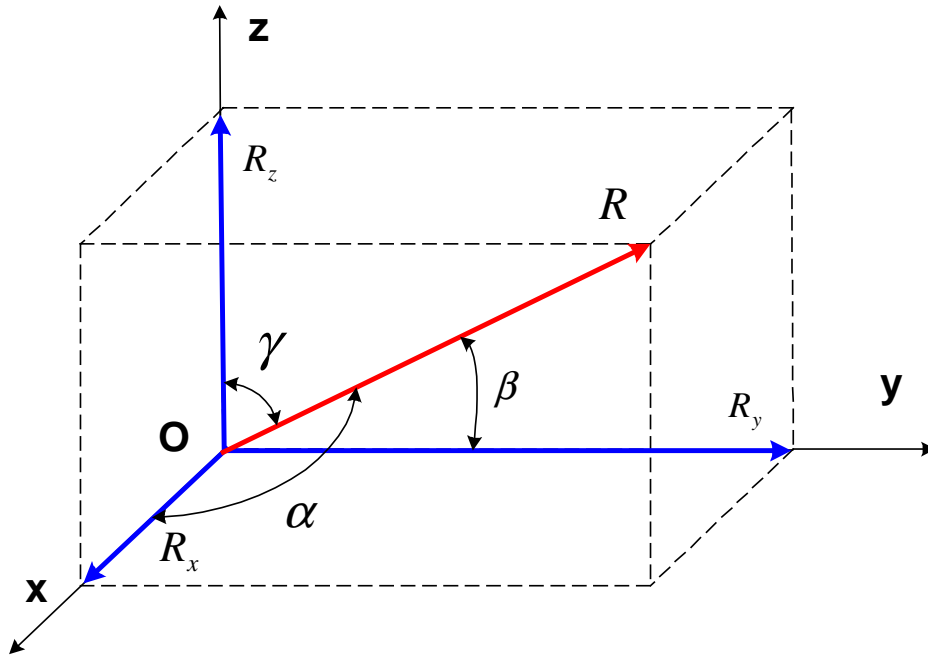


Bild 2.10: Resultierende eines zentralen 3D - Kräftesystems

und die Winkel α , β und γ von \vec{R} gegen die x -, y - bzw. z - Achse durch die Richtungscosinus:

$$\cos \alpha = R_x / R, \quad \cos \beta = R_y / R, \quad \cos \gamma = R_z / R. \quad (2.9'')$$

Es resultiert die Beziehung:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.9''')$$

Die vektorielle Gleichgewichtsbedingung (2.3) ist äquivalent zu drei skalaren Gleichungen:

$$R_x \equiv \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad R_y \equiv \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad R_z \equiv \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (2.10)$$

Kapitel 3: 3D - KRÄFTESYSTEM

3.1. Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes

Gegeben seien die Kraft $\vec{F} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$ und der Punkt $P(x_p / y_p / z_p)$. Auf der Wirkungslinie

der Kraft \vec{F} wählt man einen beliebigen Punkt $A(x_A / y_A / z_A)$.

Das Moment der Kraft \vec{F} bezüglich des Punktes P wird durch das Kreuzprodukt

$$\overline{M}^{(P)} := \overline{PA} \times \vec{F} \quad (3.1)$$

definiert. Diese Definition ist konsistent, wenn man zeigt, dass der Punkt A auf der Wirkungslinie \mathbf{f} der Kraft \vec{F} tatsächlich beliebig sein kann.

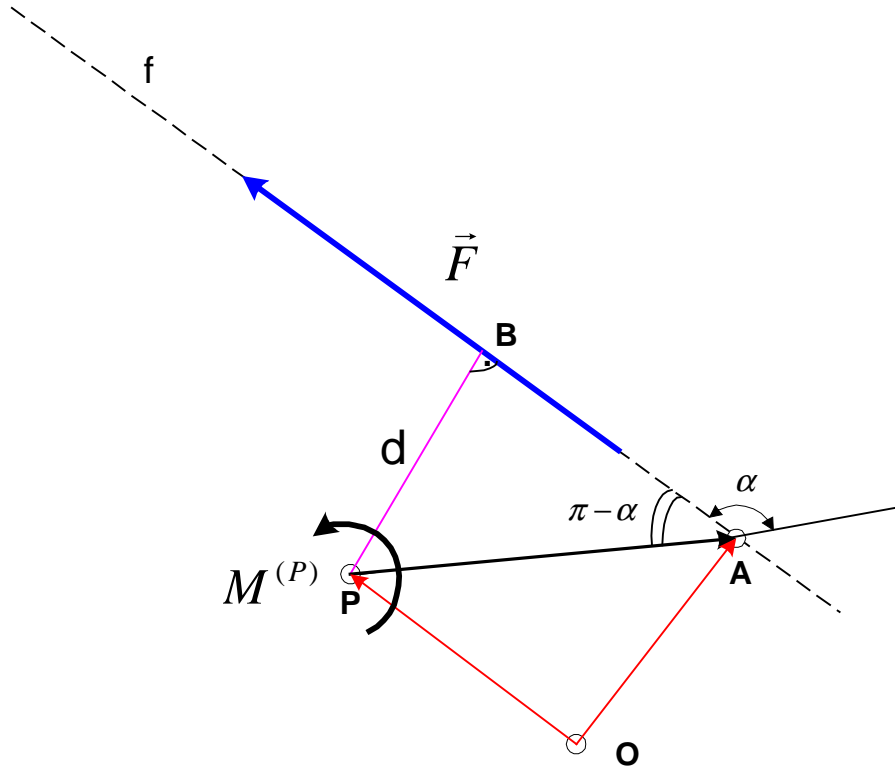


Bild 3.1: Moment der Kraft \vec{F} bezüglich des Punktes P

Der Momentenvektor $\overline{M}^{(P)}$ ist senkrecht zu der Ebene von P und \vec{F} und kommt von der Zeichenebene heraus. Das ist auch durch den runden Pfeil symbolisiert: wenn man die Rechtsschraube linksherum dreht, dann bewegt sie sich auf uns zu.

Der Betrag des Momentes errechnet sich als Norm des Kreuzproduktes (3.1) zu

$$M^{(P)} = \left\| \overline{PA} \times \vec{F} \right\| = \overline{PA} \cdot F \sin \alpha = F \cdot \overline{PA} \sin(\pi - \alpha) = F \cdot d \quad (3.2)$$

Das Moment der Kraft \vec{F} bezüglich eines Punktes ist gleich dem Produkt Kraft mal Hebelarm

Der Hebelarm \mathbf{d} und damit der Betrag des Momentes ist unabhängig von der Auswahl des Punktes A auf der Wirkungslinie der Kraft \vec{F} .

Analytisch lässt sich Gl. (3.1) wie folgt darstellen. Mit dem Ursprung O des kartesischen Koordinatensystems ist der Vektor \overline{PA} gleich

$$\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_A - x_P \\ y_A - y_P \\ z_A - z_P \end{Bmatrix}$$

und damit schreibt sich der Momentenvektor zu:

$$\vec{M}^{(P)} := \vec{PA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Einzelfall: Der Bezugspunkt ist nun der Ursprung O des kartesischen Koordinatensystems:
 $P \equiv O$. Gl.(3.3) vereinfacht sich zu:

$$\vec{M}^{(O)} := \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Eine andere wichtige Methode für die Berechnung des Momentes lässt sich ableiten, wenn man die Kraft \vec{F} , und damit auch den Punkt A, in die (x, y) – Ebene legt. Damit sind

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ und } A(x_A / y_A / 0). \text{ Aus Gl.(3.4) erhält man:}$$

$$\vec{M}^{(O)} := \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} (x_A Y - y_A X)$$

oder

$$M^{(O)} = x_A Y - y_A X \quad (3.5)$$

Das Moment der Kraft \vec{F} bezüglich eines Punktes errechnet sich als algebraische Summe der Momente von ihren Komponenten bezüglich dieses Punktes.

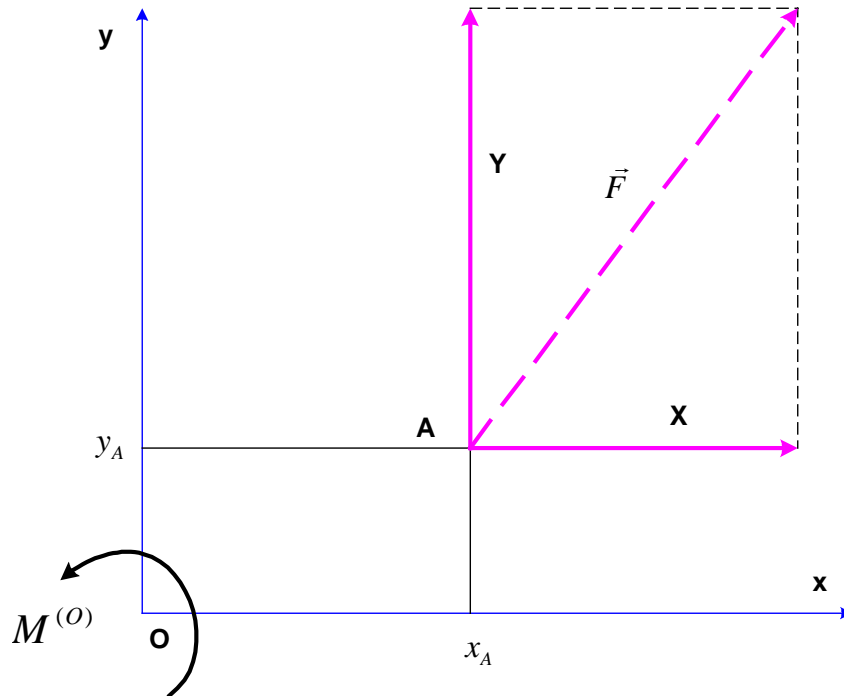


Bild 3.2: Moment der Kraft \vec{F} als Summe der Momente ihrer Komponenten

3.2. Kräftepaar

Ein Kräftepaar ist eine Kombination von zwei parallelen, gleichgroßen und entgegengesetzt gerichteten Kräften. Wählt man einen beliebigen Bezugspunkt P und zwei beliebige Punkte A und A' auf den Wirkungslinien der Kräfte \vec{F} und $(-\vec{F})$ (Bild 3.2), so ist das Moment des Kräftepaars

$$\vec{M}^{(P)} = \vec{PA} \times \vec{F} + \vec{PA}' \times (-\vec{F}) = \vec{PA} \times \vec{F} - \vec{PA}' \times \vec{F} = (\vec{PA} - \vec{PA}') \times \vec{F}$$

oder

$$\vec{M}^{(P)} = \vec{A'A} \times \vec{F} \quad (3.6)$$

Der Betrag dieses Momentes ist

$$M^{(P)} = \left\| \vec{A'A} \times \vec{F} \right\| = \overline{A'A} \cdot F \sin \alpha = F \cdot \overline{A'A} \sin(\pi - \alpha) = F \cdot d \quad (3.7)$$

Das Moment eines Kräftepaars ist unabhängig vom Bezugspunkt. Dessen Betrag ist gleich dem Produkt Kraft mal Abstand zwischen den Wirkungslinien beider Kräfte. Der Momentenvektor des Kräftepaars steht senkrecht zu der Ebene der Kräfte.

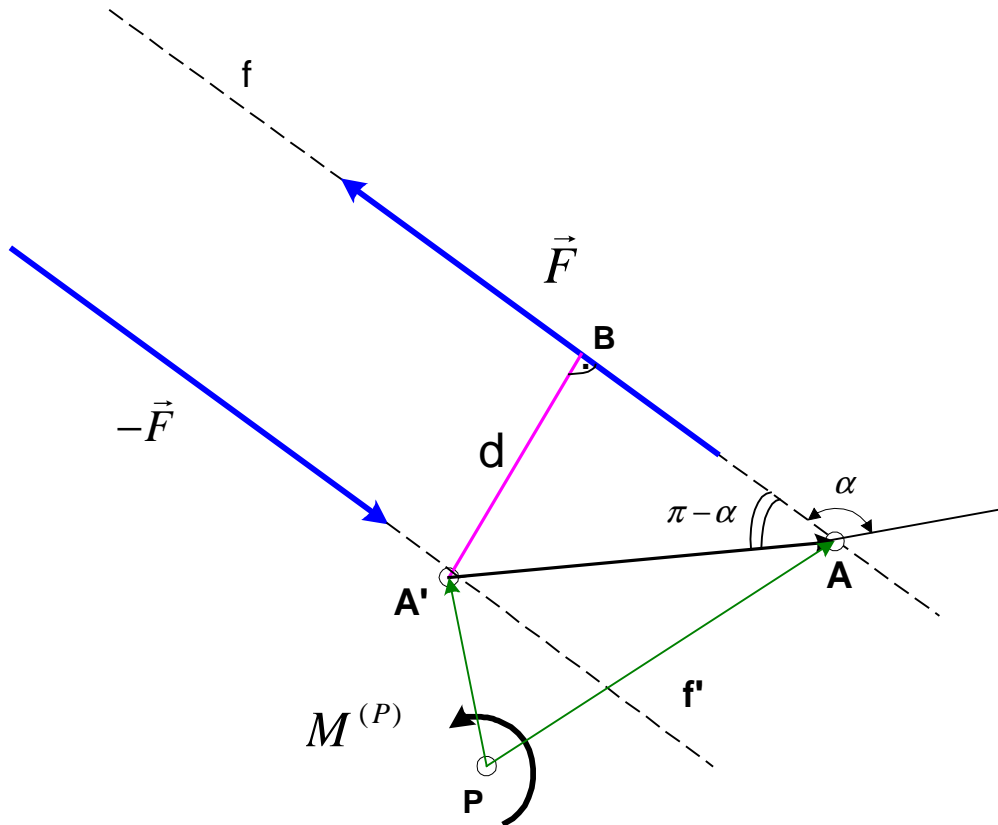


Bild 3.2: Moment eines Kräftepaars $M^{(P)} = M^{(A')} = M^{(A)} = F \cdot d$

Beispiele für Kräftepaare in der Technik sind: die Kräfte am Lenkrad eines Autos, die Kräfte an einem Handrad eines Schiebers, die von einem Schraubenschlüssel eingeleiteten Kräfte, u.s.w. Bei gleichbleibender Kraft F steigt das Moment proportional zu dem Abstand d zwischen den Wirkungslinien. Wie schon im 1. Kapitel erwähnt, **ist das Moment eines Kräftepaars ein freier Vektor**: die Auswirkung des Kräftepaars ändert sich nicht, wenn seine Ebene sich parallel verschiebt.

3.3. Reduktion der Kraft \vec{F} durch A in bezug auf den Punkt P

Gegeben ist die Kraft \vec{F} . Auf ihrer Wirkungslinie wird ein beliebiger Punkt A gewählt. Gegeben sei ein weiterer Punkt P. Mit dem Anfangspunkt P konstruieren wir die Kraftvektoren \vec{F} und $-\vec{F}$. Diese beiden Kräfte bilden ein **Nullsystem** oder eine **Gleichgewichtsgruppe**: sie ändern die Auswirkung der Kraft \vec{F} in A nicht. Die Kraft \vec{F} durch A und die Kraft $-\vec{F}$ in P bilden ein Kräftepaar, mit dem Moment

$$\overline{M^{(P)}} = \overline{PA} \times \vec{F} \quad (3.8)$$

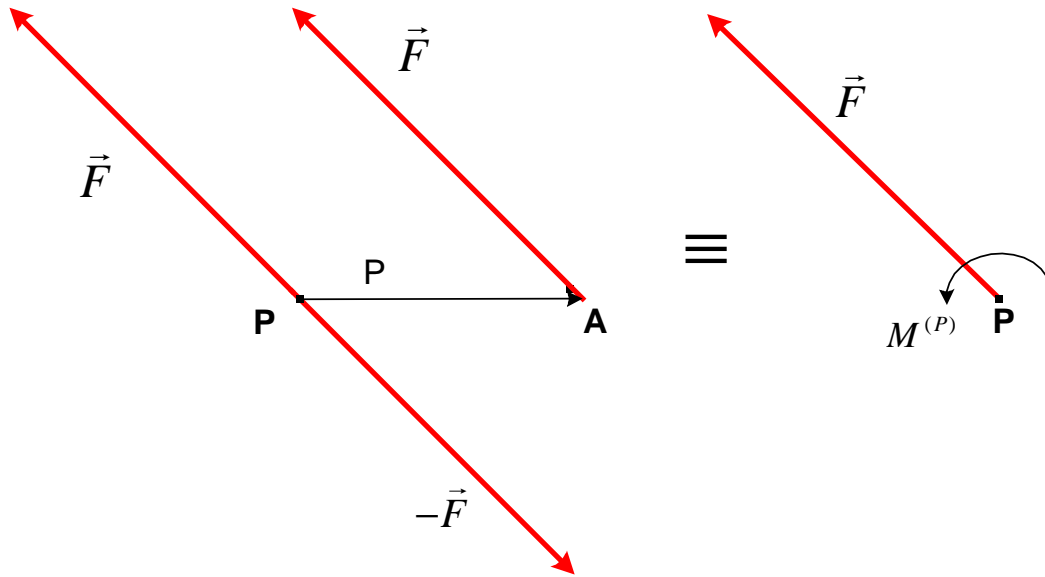


Bild 3.3: Reduktion der Kraft \vec{F} durch A in bezug auf den Punkt P

Als Ergebnis wird die Kraft \vec{F} in A durch die Kraft \vec{F} in P und durch das Moment $\overline{M^{(P)}}$ nach Gl.(3.8) ersetzt. Dieses Moment wird als **Versetzungsmoment** bezeichnet.

3.4. Reduktion eines Kräftesystems in Bezug auf einen Punkt

Gegeben ist das Kräftesystem $\vec{F}_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Auf ihren Wirkungslinien wählen wir

die beliebigen Punkte $A_i (x_i / y_i / z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Es sei der Bezugspunkt P gewählt.

Nach dem Abschnitt 3.3 wird jede Kraft \vec{F}_i in A_i durch die Kraft \vec{F}_i in P und durch das Versetzungsmoment $\overline{M_i^{(P)}} = \overline{PA_i} \times \vec{F}_i$ ersetzt. Als Ergebnis ersetzen wir das vorgegebene 3D – Kräftesystem durch das **zentrale Kräftesystem** in P mit der Resultierenden

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3.9)$$

und durch **n** Versetzungsmomente $\overline{M_i^{(P)}}$, mit dem resultierenden Moment bezüglich des Punktes P

$$\overline{M^{(P)}} = \sum_{i=1}^n \overline{PA_i} \times \vec{F}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i - x_P & y_i - y_P & z_i - z_P \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Die Resultierende \vec{R} nach Gl.(3.9) hat die Komponenten:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i; R_y = \sum_{i=1}^n Y_i; R_z = \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (3.11)$$

Die Komponenten des resultierenden Momentes bezüglich P schreiben sich nach Gl.(3.10) zu:

$$\begin{aligned} M_x^{(P)} &= \sum_{i=1}^n [(y_i - y_P)Z_i - (z_i - z_P)Y_i], \\ M_y^{(P)} &= \sum_{i=1}^n [(z_i - z_P)X_i - (x_i - x_P)Z_i], \\ M_z^{(P)} &= \sum_{i=1}^n [(x_i - x_P)Y_i - (y_i - y_P)X_i]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Komponente $M_x^{(P)}$ ist identisch mit dem resultierenden Moment aller Kräfte bezüglich einer Achse durch P, die parallel zur x – Achse des kartesischen Koordinatensystems ist. Ähnliche Interpretationen gelten auch für die anderen zwei Komponenten.

Wählen wir nun den Reduktionspunkt $P \equiv O$ (identisch mit dem Ursprung des Koordinatensystems), so schreibt sich das resultierende Moment bezüglich O nach Gl.(3.10) zu:

$$\vec{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

Die Komponenten des resultierenden Momentes bezüglich O erhalten wir aus Gl.(3.13) in der vereinfachten Form:

$$\begin{aligned} M_x^{(O)} &= M_x = \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ M_y^{(O)} &= M_y = \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i), \\ M_z^{(O)} &= M_z = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Komponente $M_x^{(O)} = M_x$ ist identisch mit dem resultierenden Moment aller Kräfte bezüglich der x – Achse des kartesischen Koordinatensystems. Ähnliche Interpretationen gelten auch für die anderen zwei Komponenten.

3.5. Gleichgewichtsbedingungen des 3D – Kräftesystems an einem starren Körper

Wirkt das 3D – Kräftesystem auf einen starren Körper, so bleibt der Körper im Gleichgewicht dann und nur dann, wenn die resultierende Kraft und das resultierende Moment verschwinden:

$$\vec{R} = \vec{0}; \vec{M}^{(O)} = \vec{0} \quad (3.15)$$

Diese vektoriellen Gleichungen sind äquivalent zu sechs skalaren Gleichungen für das Gleichgewicht des starren Körpers:

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i = 0; R_y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0; R_z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \quad (3.16)$$

und

$$\begin{aligned} M_x^{(O)} = M_x &= \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \\ M_y^{(O)} = M_y &= \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \\ M_z^{(O)} = M_z &= \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Diese sechs Gleichgewichtsbedingungen entsprechen der Blockierung der sechs Freiheitsgrade eines starren Körpers im Raum: Translationen in x -, y - und z - Richtung, sowie Rotationen um die x -, y - und z - Achse.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Gleichgewichtsbedingungen (3.15) zu $\vec{M}^{(P)} = \vec{0}$ führen. Tatsächlich, nach der Reduktion des Kräftesystems in Bezug auf den Punkt O erhält man im allgemeinen die resultierende Kraft \vec{R} und das resultierende Moment $\vec{M}^{(O)}$.

Konstruieren wir durch den Punkt P die Gleichgewichtsgruppe \vec{R} und $-\vec{R}$ (Bild 3.4), so erhalten wir in P die Resultierende Kraft \vec{R} und das Moment

$$\vec{M}^{(P)} = \vec{M}^{(O)} + \vec{PO} \times \vec{R} \quad (3.18)$$

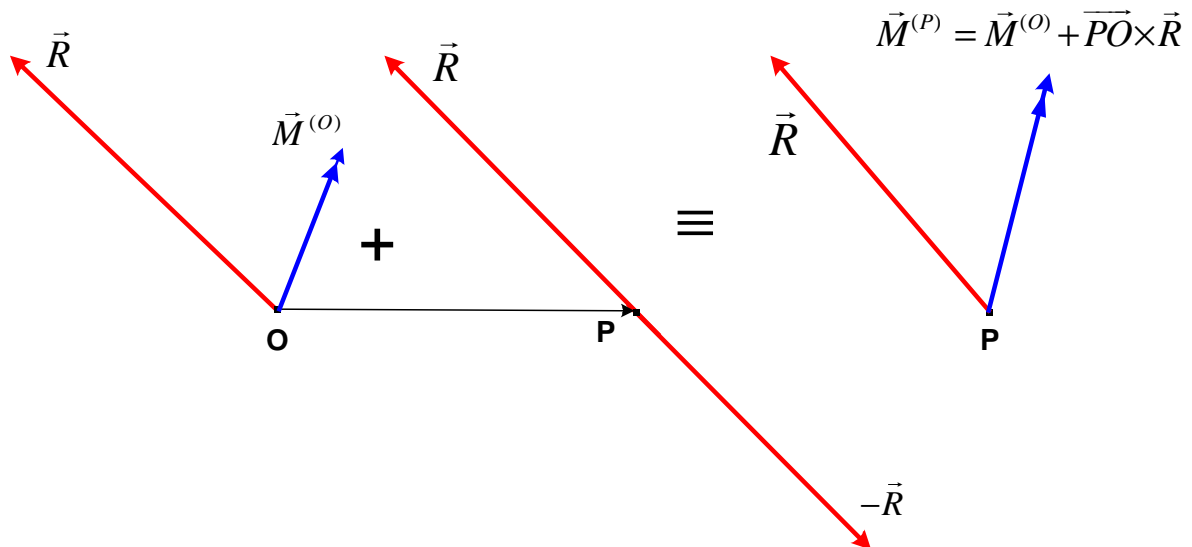


Bild 3.4: Änderung des Bezugspunktes von O nach P

Setzt man in Gl.(3.18) die Gleichgewichtsbedingungen (3.15) ein, so resultiert $\vec{M}^{(P)} = \vec{0}$.

Umgekehrt, sind die Bedingungen $\vec{R} = \vec{0}$; $\vec{M}^{(P)} = \vec{0}$ erfüllt, so folgt aus Gl.(3.18) auch $\vec{M}^{(O)} = \vec{0}$. Das bedeutet: **bei der Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen ist die Auswahl des Bezugspunktes für die Momentengleichungen frei.**

3.6. Ebenes Kräftesystem an einem starren Körper

Wirkt ein **2D – Kräftesystem** auf einen starren Körper, so legt man diese Kräfte in die

(\mathbf{x}, \mathbf{y}) – Ebene. Die Kräfte \vec{F}_i schreiben sich zu: $\vec{F}_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ 0 \end{Bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n.$

Die Punkte A_i auf den Wirkungslinien der Kräfte sind: $A_i(x_i / y_i / 0), i = 1, 2, \dots, n.$

Das Kräftesystem reduziert sich in \mathbf{O} zu einer Resultierenden nach Gl.(3.9)

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

und einem Moment nach Gl.(3.13)

$$\vec{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i.$$

Die Resultierende liegt in der (\mathbf{x}, \mathbf{y}) – Ebene und hat die Komponenten

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i; R_y = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (3.19)$$

Das resultierende Moment ist senkrecht zur (\mathbf{x}, \mathbf{y}) – Ebene, d. h. es **zeigt in z - Richtung** und ist gleich:

$$M^{(O)} = M_z = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i). \quad (3.20)$$

Der starre Körper unter der Wirkung des ebenen Kräftesystems bleibt im Gleichgewicht dann und nur dann, wenn die resultierende Kraft und das resultierende Moment verschwinden:

$$\vec{R} = \vec{0}; \vec{M}^{(O)} = \vec{0} \quad (3.21)$$

oder

$$R_x = \sum_{i=1}^n X_i = 0; R_y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0. \quad (3.22)$$

und

$$M^{(O)} = M_z = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i Z_i) = 0. \quad (3.23)$$

Diese drei Gleichgewichtsbedingungen (3.22) und (3.23) entsprechen der Blockierung der Freiheitsgrade des starren Körpers in der Ebene: Translationen in x - und y - Richtung, sowie Rotation um die z - Achse.

Anstelle von zwei Gleichgewichtsgleichungen für Kräfte kann man nur eine verwenden. Dann werden zwei Momentengleichungen für zwei Bezugspunkte erstellen.

Das ist möglich aufgrund von Gl.(3.18):

$$\vec{M}^{(P)} = \vec{M}^{(O)} + \overrightarrow{PO} \times \vec{R}$$

woraus man entnimmt, dass

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{0} \text{ und } \vec{M}^{(P)} = \vec{0} \text{ auf } \vec{R} = \vec{0} \text{ führt,}$$

vorausgesetzt dass die zwei Bezugspunkte O und P nicht auf einer Parallelen zu \vec{R} liegen.

Dieses anschauliche Ergebnis wird auch mathematisch abgeleitet.

Um das Moment der Kraft \vec{F} bezüglich der Achse a zu bestimmen, berechnet man das Moment dieser Kraft bezüglich eines beliebigen Punktes P auf der Achse $\vec{M}^{(P)} = \overline{PA} \times \vec{F}$ und bestimmt man dessen Komponente in Achsenrichtung

$$M_a = \vec{M}^{(P)} \cdot \vec{e}_a = (\overline{PA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_a \quad (4.2)$$

Um dieses Spatprodukt zu berechnen, führt man das abgebildete kartesische Koordinatensystem ein, mit der x – Achse in Radialrichtung OA, mit der y – Achse parallel zu der Umfangskomponente F_u der Kraft und mit der z – Achse in Richtung der Drehachse.

Damit sind $\vec{e}_a = \vec{k}$, A ($r / 0 / 0$), P ($0 / 0 / z_p$) und die Gleichung (3.20) schreibt sich zu:

$$M_a = M_z = \begin{vmatrix} r & 0 & -z_p \\ F_r & F_u & F_a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = F_u \cdot r.$$

Die Gleichung (4.1) wurde damit auch mathematisch abgeleitet.

5. Parallele Kräfte. Kräftemittelpunkt. Massenmittelpunkt. Schwerpunkt.

Die wohl bekanntesten parallelen Kräfte sind **die im Volumen verteilten Gewichtskräfte** eines Körpers der Masse m , mit der Resultierenden $G = mg$. Diese resultierende Anziehungskraft von der Erde ist eine Volumenkraft. Alle elementaren Gewichtskräfte sind streng genommen radiale Kräfte: sie zeigen auf den Mittelpunkt der Erde zu. Für die üblichen technischen Anwendungen kann man jedoch die Schwerkkräfte als **parallele Kräfte** bezeichnen.

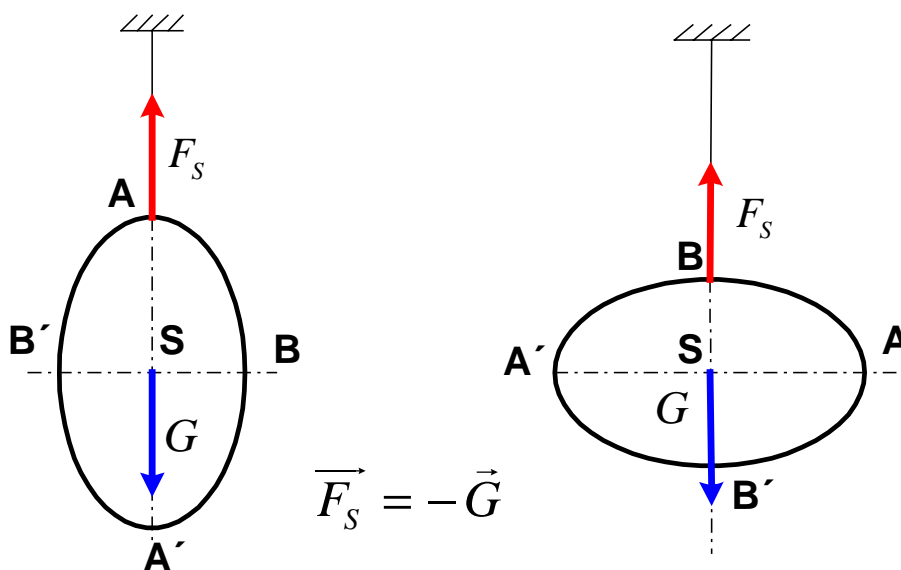


Bild 5.1: Schwerpunkt einer homogenen Scheibe

Eine homogene Scheibe sei in A an einem Seil aufgehängt. Die Gleichgewichtslage stellt sich so ein, dass die Seilkraft und die Gewichtskraft im Gleichgewicht sind: ihre Wirkungslinie AA' ist vertikal und die Resultierende aus der Gewichtskraft und der Seilkraft verschwindet:

$$\uparrow: \vec{F}_s + \vec{G} = \vec{0} \text{ oder } \vec{F}_s = -\vec{G}.$$

Hängt man die Scheibe am Seil nun in B auf, so stellt sich die neue Gleichgewichtslage so ein, dass die Wirkungslinie der Gewichtskraft und der Seilkraft diesmal BB' ist. Beide Wirkungslinien schneiden sich in S, dem Schwerpunkt der homogenen Scheibe. Ist die Scheibe in einem anderen Punkt zwischen A und B am Seil aufgehängt, so geht die neue vertikale Wirkungslinie der Gewichtskraft und der Seilkraft wieder durch S.

Man kann sich die Scheibe als festgehalten vorstellen und man dreht die Richtung des Schwerfeldes. Der Schwerpunkt S der Scheibe wird so gesucht, dass die Resultierende aller parallelen elementaren Schwerkräfte durch S geht, bei einem beliebigen Einheitsvektor \vec{e} der Richtung dieser Kräfte.

5.1. Parallele Einzelkräfte. Kräfte­mittelpunkt

Gegeben sind n parallele Einzelkräfte $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{e}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Auf den Wirkungslinien dieser Kräfte werden die Punkte $A_i(x_i / y_i / z_i)$ gewählt (Bild 5.2).

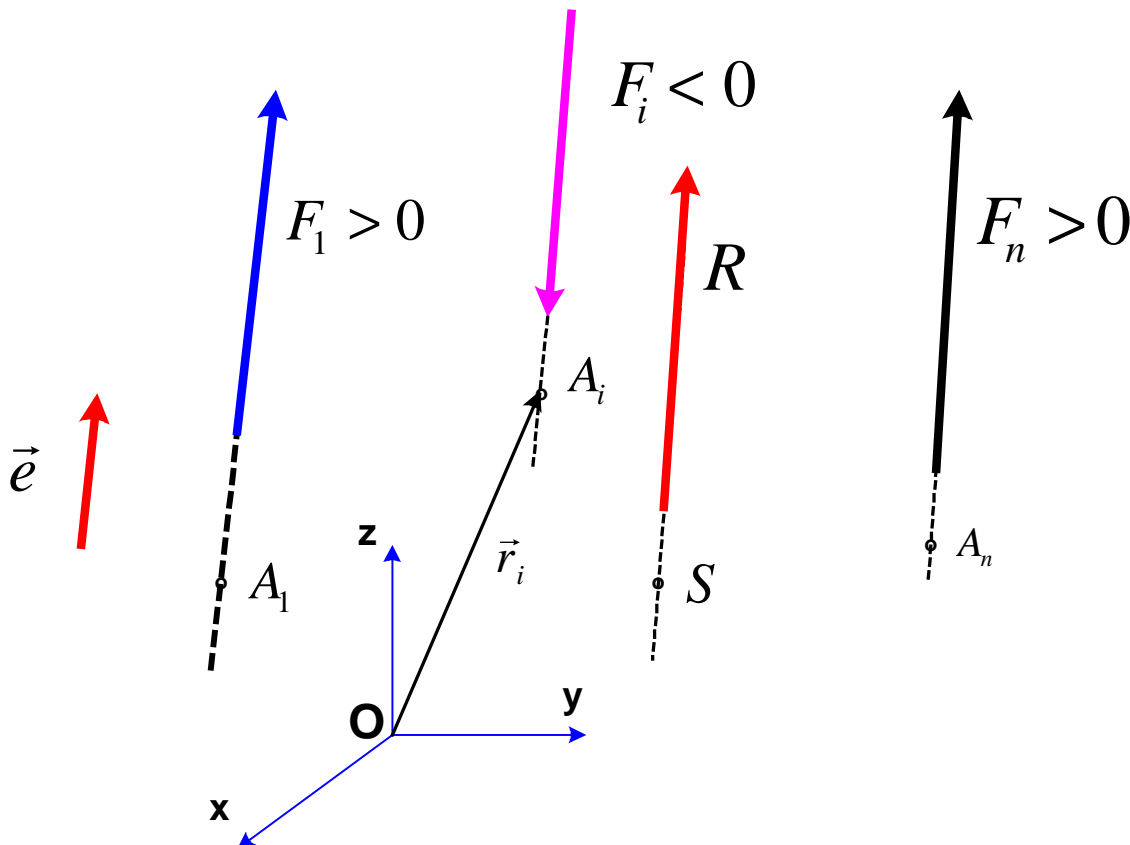


Bild 5.2: Parallele Einzelkräfte und Kräfte­mittelpunkt

Die Ortsvektoren der Punkte A_i sind $\vec{r}_i = \overline{OA_i}$.

Die Resultierende paralleler Kräfte ist

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot \vec{e}) = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \vec{e} = R \cdot \vec{e}$$

oder

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \tag{5.1}$$

Die Wirkungslinie der Resultierenden geht durch den **Kräftemittelpunkt S**, dessen Position aus der Bedingung gesucht wird, dass **das resultierende Moment aller parallelen Kräfte bezüglich S verschwindet, bei beliebiger Richtung \vec{e} dieser Kräfte:**

$$\overline{M^{(S)}} = \vec{0} = \sum_{i=1}^n \overline{SA_i} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \left[(\overline{OA_i} - \overline{OS}) \times (F_i \vec{e}) \right] = \sum_{i=1}^n \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_S) \times (F_i \vec{e}) \right]$$

oder

$$\left[\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i F_i) - \vec{r}_S \sum_{i=1}^n F_i \right] \times \vec{e} = \vec{0}, \quad \forall \vec{e} \text{ mit } \|\vec{e}\| = 1.$$

Daraus folgt es eindeutig:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i F_i) - \vec{r}_S \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i F_i) - \vec{r}_S R = \vec{0}$$

Der Ortsvektor des **Kräftemittelpunktes S** ergibt sich zu:

$$\vec{r}_S \equiv \overline{OS} = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i F_i) \tag{5.2}$$

Daraus erhalten wir **die Koordinaten des Kräftemittelpunktes:**

$$x_S = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i F_i); \quad y_S = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i F_i); \quad z_S = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n (z_i F_i) \tag{5.3}$$

5.1.1 Zwei gleichsinnige parallele Einzelkräfte

Gegeben sind **zwei** parallele Einzelkräfte $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{e}$, $i = 1, 2$. Auf den Wirkungslinien dieser Kräfte werden die Punkte $A_i(x_i / y_i / 0)$ gewählt. Das ebene Koordinatensystem wird mit der Abszisse in Richtung A_1A_2 , mit dem Ursprung $O \equiv A_1$ und dem Abstand $d = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2}$ gewählt.

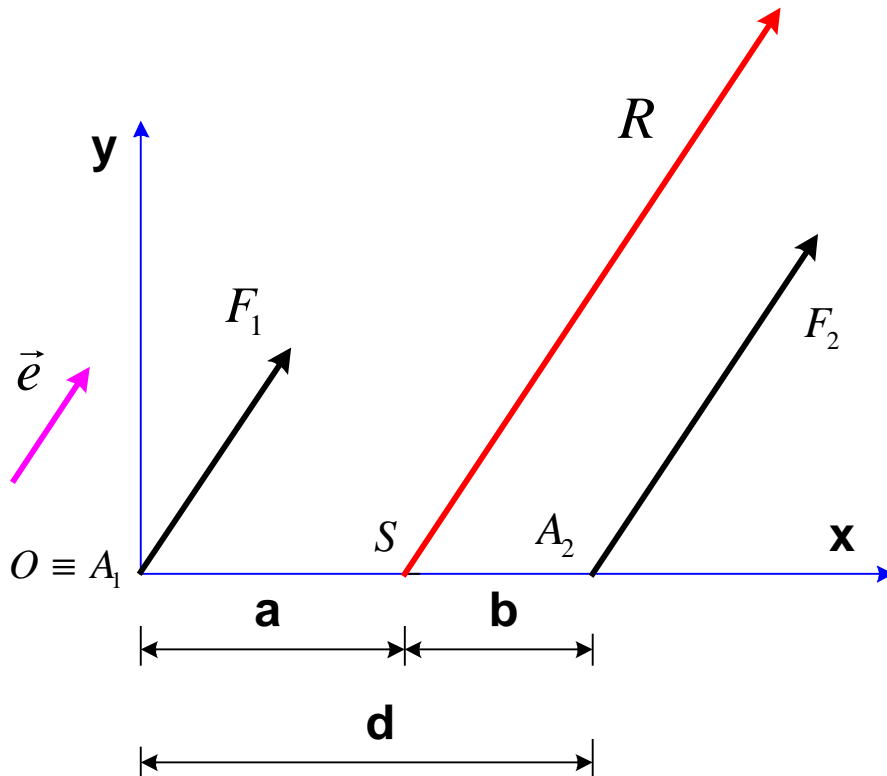


Bild 5.1: Zusammensetzung zweier gleichsinniger paralleler Kräfte

Die Resultierende ergibt sich als Summe beider Kräfte

$$R = F_1 + F_2 \quad (5.4)$$

Die x - Koordinate des Kräftemittelpunktes S errechnet sich nach Gl.(5.3) zu:

$$a = \overline{A_1 S} = x_S = \frac{1}{R}(x_1 F_1 + x_2 F_2) = \frac{1}{R}(0 \cdot F_1 + d F_2) = \frac{d F_2}{R} \quad (5.5)$$

Daraus resultiert

$$b = \overline{A_2 S} = d - \frac{d F_2}{R} = d \left(1 - \frac{F_2}{R} \right) = d \frac{R - F_2}{R} = \frac{d F_1}{R} \quad (5.5')$$

Multipliziert man G.(5.5) mit F_1 und G.(5.5') mit F_2 , so resultiert das Hebelgesetz:

$$\boxed{a F_1 = b F_2} \quad (5.6)$$

5.1.2 Zwei parallele Einzelkräfte, vom unterschiedlichen Betrag und Richtungssinn

Gegeben sind nun **zwei** parallele Einzelkräfte, mit $F_1 < 0$, $F_2 > 0$ und $F_2 > |F_1|$ (Bild 5.2).

Auf den Wirkungslinien dieser Kräfte werden die Punkte $A_i (x_i / y_i / 0)$ gewählt.

Das Koordinatensystem wird mit der Abszisse in Richtung A_1A_2 , mit dem Ursprung $O \equiv A_1$ und dem Abstand $d = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2}$.

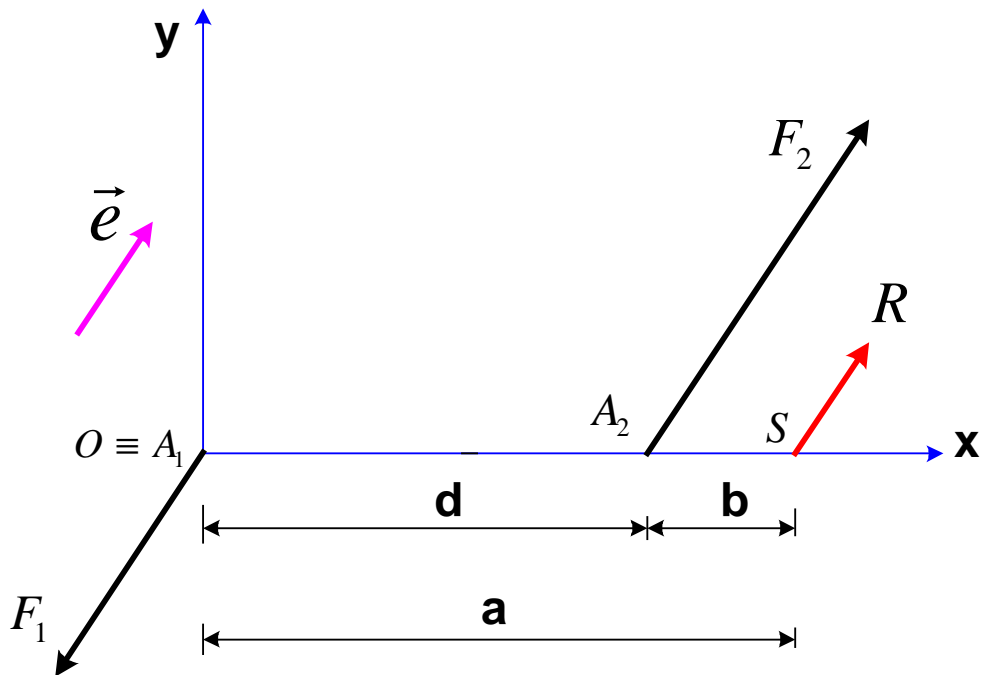


Bild 5.2: Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte vom unterschiedlichen Betrag und Richtungssinn

Die Resultierende errechnet sich als

$$R = F_1 + F_2 = F_2 - |F_1| \quad (5.7)$$

Die x -Koordinate des Kräftemittelpunktes S errechnet sich nach Gl.(5.3) zu:

$$a = \overline{A_1S} = x_S = \frac{1}{R}(x_1F_1 + x_2F_2) = \frac{1}{R}(0 \cdot F_1 + d F_2) = d \frac{F_2}{F_2 - |F_1|} > d \quad (5.8)$$

Daraus resultiert

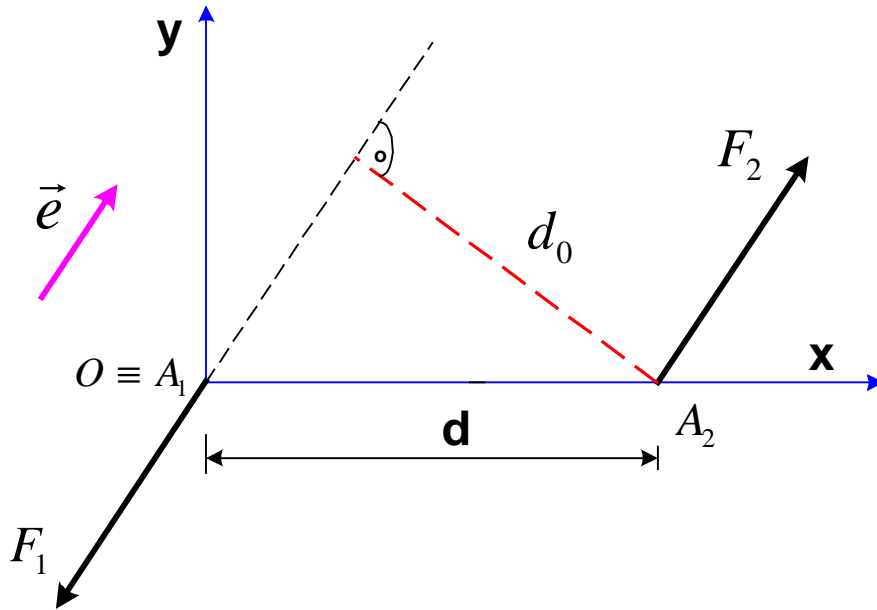
$$b = \overline{A_2S} = a - d = \frac{d F_2}{F_2 - |F_1|} - d = d \frac{|F_1|}{F_2 - |F_1|} \quad (5.8')$$

Multipliziert man G.(5.8) mit $|F_1|$ und G.(5.8') mit F_2 , so resultiert das Hebelgesetz:

$$\boxed{a |F_1| = b F_2} \quad (5.9)$$

5.1.3 Zwei gleichgroße parallele Einzelkräfte, von unterschiedlichem Richtungssinn

Gegeben sind zwei parallele Einzelkräfte, mit $F_1 < 0$, $F_2 > 0$ und $F_2 = |F_1| = F$ (Bild 5.3).

**Bild 5.3: Kräftepaar**

Nach Gl.(5.7) ist die Resultierende gleich Null, $R = 0$. Diese Konfiguration ist ein **Kräftepaar**, mit dem wir uns im Abschnitt 3.2 befasst haben. Obwohl die Resultierende verschwindet, ist die Auswirkung des Kräftepaars ein Moment, gleich

$$M = F d_0, \quad (5.10)$$

wobei d_0 den Abstand zwischen den Wirkungslinien beider Kräfte bedeutet.

5.2. Streckenlasten

An einem starren Körper greifen kontinuierlich verteilte parallele Kräfte, auch Flächenlasten genannt. Wenn die Länge des Körpers in z – Richtung konstant ist und die Lasten keine Variation in dieser Richtung aufweisen, dann spricht man von Streckenlasten. Es gibt zahlreiche Beispiele hierfür: Kontaktkräfte zweier Zylinder mit parallelen Achsen, die Druckkräfte von einem ruhenden Fluid auf die ebene Wand eines Behälters, Gewichtskräfte, sowie Schnee – und Eislasten auf Hochspannungsleitungen u.s.w.

Abgebildet ist eine Streckenlast, die auf einen geraden Balken im Bereich $x \in [a, b]$ wirkt (Bild 5.4).

Ist die Kraft pro Längeneinheit $q(x)$, in N/m , so errechnet sich die **Resultierende** zu:

$$R = \int_a^b q(x) dx \quad (5.11)$$

Nach Gl.(5.3) wird die **Abszisse des Lastmittelpunktes** wie folgt bestimmt:

$$x_S = \frac{1}{R} \int_a^b x q(x) dx \quad (5.12)$$

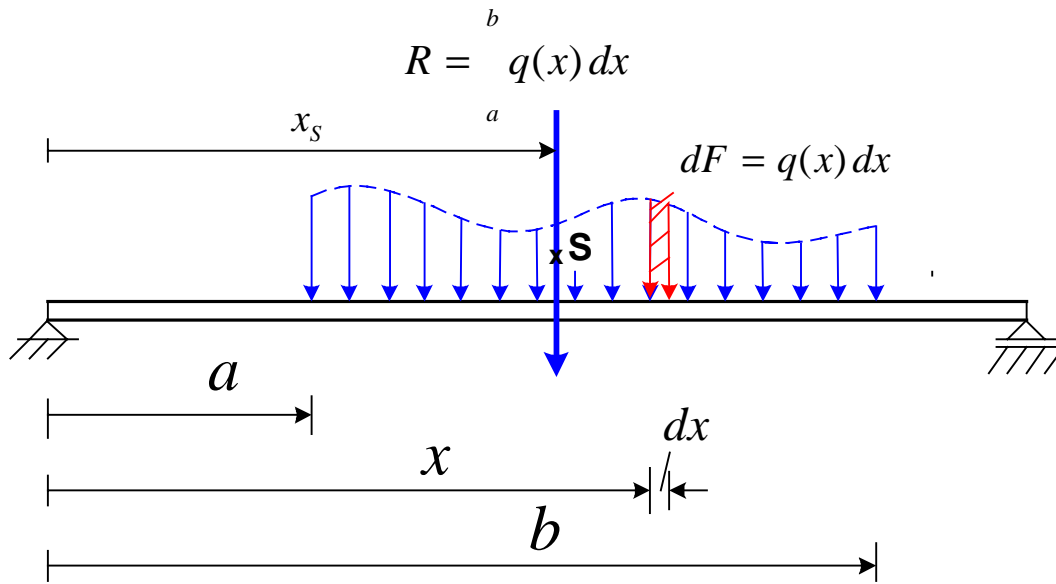


Bild 5.4: Streckenlast

Einzelfälle:

1. Gleichstreckelast: $q(x) = q_0 = konst.$ (Bild.5.5)

Gl.(5.11) und (5.12) vereinfachen sich zu:

$$R = \int_a^b q_0 dx = q_0 (b - a) = q_0 \ell \quad (5.13)$$

$$x_S = \frac{1}{q_0 \ell} \int_a^b q_0 x dx = \frac{b^2 - a^2}{2\ell} = \frac{(b-a)(b+a)}{2\ell} = \frac{a+b}{2} = a + \frac{b-a}{2} = a + \frac{\ell}{2}. \quad (5.14)$$

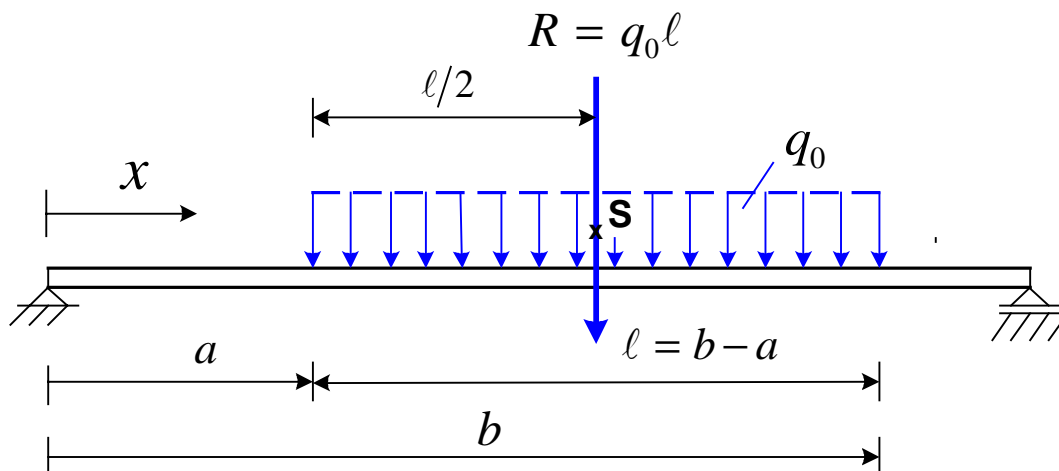


Bild 5.5: Gleichstreckenlast

2. Dreieckige Streckenlast: $q(x) = q_0 \frac{x-a}{b-a} = q_0 \frac{x-a}{\ell}$. (Bild.5.6)

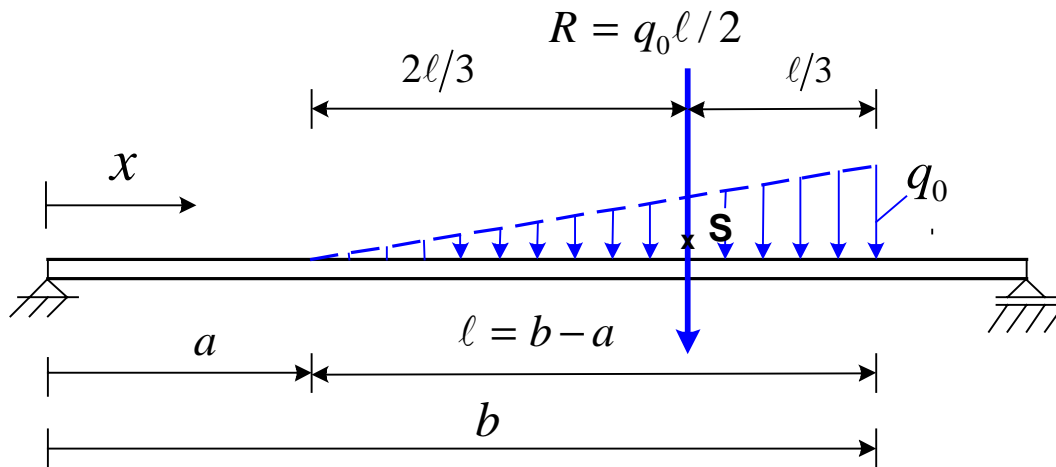


Bild 5.6: Dreieckige Streckenlast

Gl.(5.11) und (5.12) vereinfachen sich zu:

$$R = \int_a^b q(x) dx = \frac{q_0}{\ell} \int_a^b (x-a) dx = \frac{q_0}{\ell} \left. \frac{(x-a)^2}{2} \right|_a^b = \frac{q_0}{2\ell} \ell^2 = \frac{q_0 \ell}{2} \quad (5.13)$$

$$x_S = a + \frac{2\ell}{3} \quad (5.14)$$

3. Parabolische Streckenlast: $q(x) = q_0 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 = q_0 \frac{(x-a)^2}{\ell^2}$. (Bild.5.7)

Gl.(5.11) und (5.12) schreiben sich in diesem Fall zu:

$$R = \int_a^b q(x) dx = \frac{q_0}{\ell^2} \int_a^b (x-a)^2 dx = \frac{q_0}{\ell} \left. \frac{(x-a)^3}{3} \right|_a^b = \frac{q_0}{3\ell} \ell^3 = \frac{q_0 \ell}{3} \quad (5.15)$$

$$x_S = a + \frac{3\ell}{4} \quad (5.16)$$

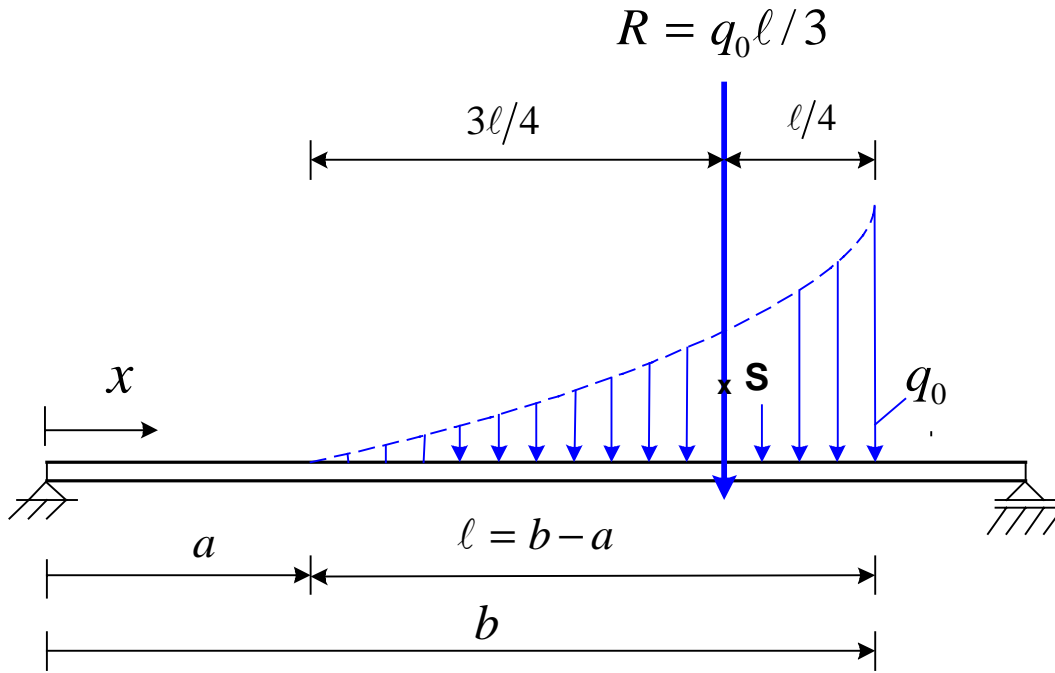


Bild 5.7: Parabolische Streckenlast

5.3. Massenmittelpunkt

Gegeben ist ein System von n Massenpunkten : die Massen m_i in den Punkten $A_i(x_i / y_i / z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Die Massen werden etwa durch einen dünnen, masselosen Draht zusammengehalten. Auf diese Massen wirken die vertikalen, nach unten orientierten Gewichtskräfte $\vec{G}_i = -m_i g \vec{k}$ (Bild 5.8).

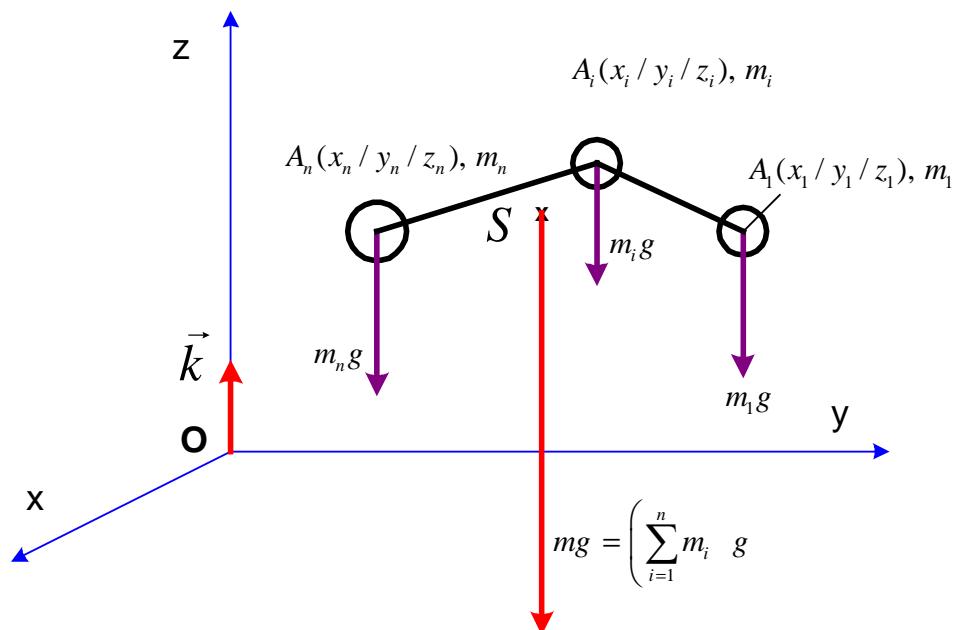


Bild 5.8: Massenpunktsystem mit dem Massenmittelpunkt

Die resultierende Gewichtskraft ist

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = \sum_{i=1}^n (-m_i g \vec{k}) = -\vec{k} \left(\sum_{i=1}^n m_i g = -m g \vec{k}, \text{ mit } m = \sum_{i=1}^n m_i \right) \quad (5.17)$$

Der Mittelpunkt **S** der Gewichtskräfte, auch als **Massenmittelpunkt** bezeichnet, hat den Ortsvektor:

$$\vec{r}_S = \overline{OS} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n (\overline{OA_i} \cdot G_i) = \frac{1}{mg} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \cdot m_i g) \quad \text{oder}$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \cdot m_i), \text{ mit } m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (5.18)$$

Daraus resultieren die Koordinaten des Massenmittelpunktes:

$$x_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot m_i), \quad y_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (y_i \cdot m_i), \quad z_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (z_i \cdot m_i),$$

$$\text{mit der Gesamtmasse } m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (5.18')$$

5.4. Volumenschwerpunkt

Die kontinuierlich verteilte Masse m eines Körpers mit dem Volumen V und der Dichte $\rho(x, y, z)$ sowie der Ortsvektor des Massenmittelpunktes errechnen sich wie folgt (Bild 5.10):

$$m = \int_V \rho dV,$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV. \quad (5.19)$$

Ist der Körper **homogen**, d.h. $\rho(x, y, z) = \rho = konst.$, so erhält man:

$$m = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \rho V,$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{\rho V} \rho \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad (5.20)$$

S heißt in diesem Fall **Volumenschwerpunkt**.

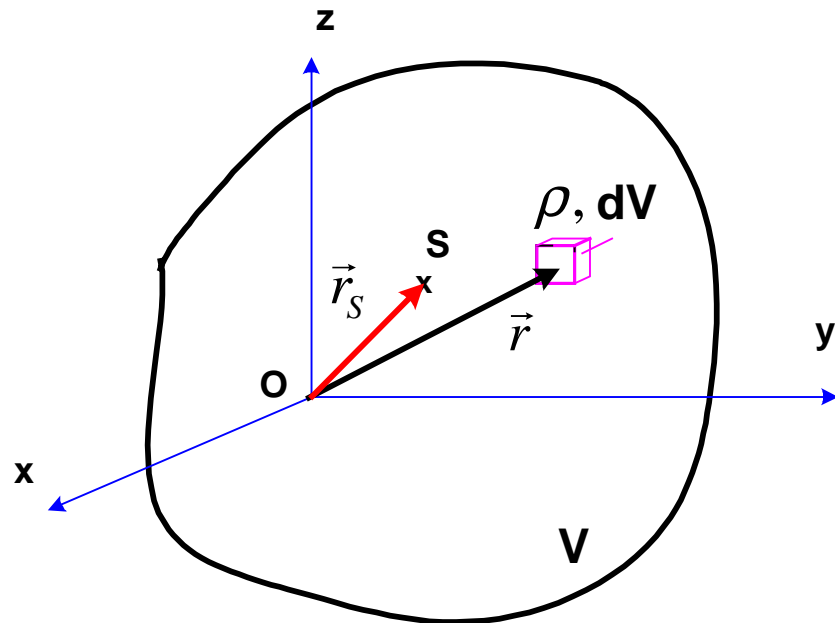


Bild 5.10: Massenmittelpunkt eines Körpers. Volumenschwerpunkt

Die Schwerpunktkoordinaten errechnen sich zu:

$$x_s = \frac{1}{V_v} \int x dV, \quad y_s = \frac{1}{V_v} \int y dV, \quad z_s = \frac{1}{V_v} \int z dV. \quad (5.21)$$

Beispiel 5.2: Man bestimme die Position des Schwerpunktes eines homogenen Kegels (Radius R , Höhe h , Bild 5.11).

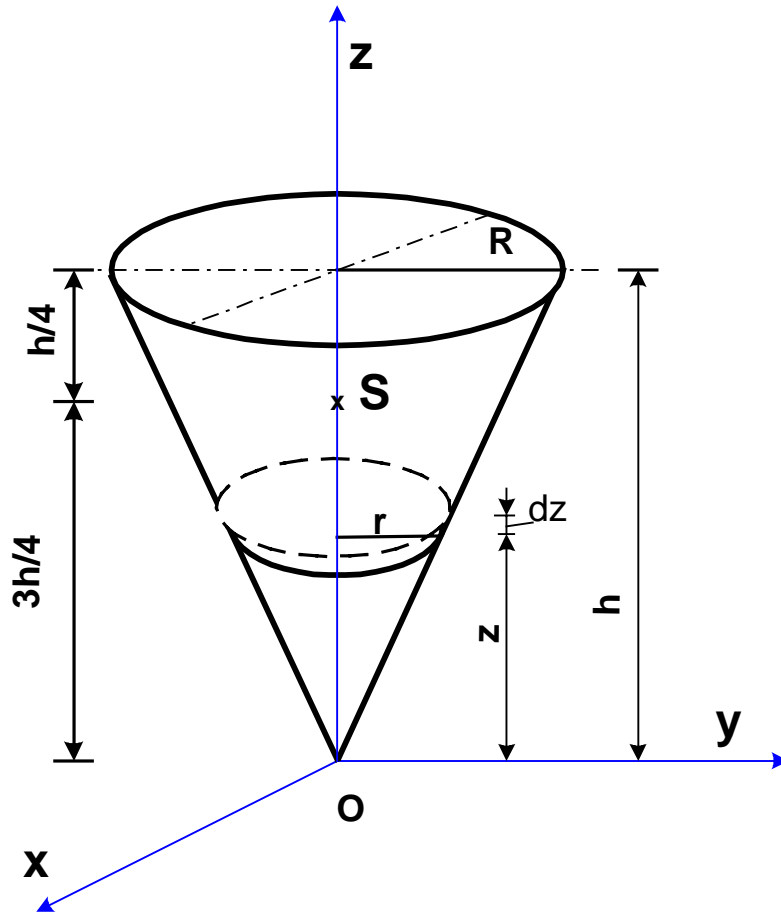


Bild 5.11: Schwerpunkt des homogenen Kegels

Lösung: Der Kreisschnitt in der Höhe z hat den Radius r , der sich nach dem Strahlsatz errechnet:

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \quad ; \quad r = R \frac{z}{h}$$

Die elementare Kreisscheibe mit dem Radius r und der Dicke dz hat das Volumen

$$dV = \pi r^2 dz = \pi \left(\frac{R}{h} z \right)^2 dz$$

Damit erhält man das Volumen des Kegels

$$V = \int_V dV = \pi \left(\frac{R}{h} \right)^2 \int_{z=0}^h z^2 dz = \pi \left(\frac{R}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Der Schwerpunkt liegt auf der z -Achse. Aus Gl.(5.21) errechnet sich die z_S -Koordinate zu:

$$z_S = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{z=0}^h z \cdot \pi \left(\frac{R}{h} z \right)^2 dz = \frac{3}{h^3} \int_{z=0}^h z^3 dz = \frac{3h}{4}$$

Beispiel 5.3: Man bestimme die Position des Schwerpunktes einer homogenen Halbkugel (Radius R , Bild 5.12).

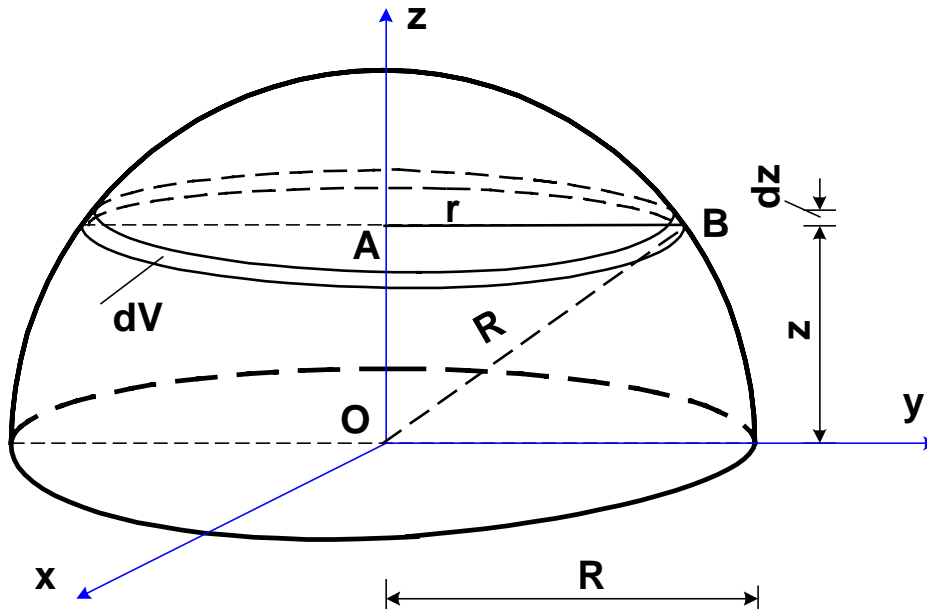


Bild 5.12: Schwerpunkt der homogenen Halbkugel

Lösung: Der Kreisschnitt in der Höhe z hat den Radius r , der sich nach aus dem Dreieck OAB errechnet. Es gilt $r^2 = R^2 - z^2$.

Die elementare Kreisscheibe mit dem Radius r und der Dicke dz hat das Volumen

$$dV = \pi r^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz$$

Damit erhält man das Volumen der Halbkugel

$$V = \int_V dV = \pi \int_{z=0}^R (R^2 - z^2) dz = \pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Der Schwerpunkt liegt auf der z -Achse. Aus Gl.(5.21) errechnet sich die z_S -Koordinate zu:

$$z_S = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{3}{2\pi R^3} \int_{z=0}^R z \cdot \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{3}{2R^3} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3R}{8}$$

Der Schwerpunkt der Boje soll sich in der Trennebene beider Körper befinden.
 Man bestimme den Quotienten h/R in zwei Fällen:

- a) die ganze Boje ist vom gleichen Material;
- b) die Dichten des Kegels und der Halbkugel sind unterschiedlich, $\rho_1 < \rho_2$

Lösung: Der Schwerpunkt der Boje **S** soll sich in **O** befinden, d.h. $z_s = 0$.

Fall a): **S** wird als Volumenschwerpunkt bestimmt:

$$z_s = \frac{z_{s_1}V_1 + z_{s_2}V_2}{V_1 + V_2} = 0 \Rightarrow z_{s_1}V_1 + z_{s_2}V_2 = 0 \Rightarrow \frac{h}{4} \cdot \frac{\pi R^2 h}{3} + \left(-\frac{3R}{8}\right) \cdot \frac{2\pi R^3}{3} = 0.$$

Daraus folgt es

$$h/R = \sqrt{3}.$$

Fall b): Der Schwerpunkt **S** der Boje ist diesmal ein Massenmittelpunkt. Somit erhalten wir:

$$z_s = \frac{z_{s_1}\rho_1V_1 + z_{s_2}\rho_2V_2}{\rho_1V_1 + \rho_2V_2} = 0 \Rightarrow z_{s_1}\rho_1V_1 + z_{s_2}\rho_2V_2 = 0 \Rightarrow \frac{h}{4} \cdot \rho_1 \frac{\pi R^2 h}{3} + \left(-\frac{3R}{8}\right) \cdot \rho_2 \frac{2\pi R^3}{3} = 0.$$

Daraus folgt es $\frac{h}{R} = \sqrt{\frac{3\rho_1}{\rho_2}}.$

Beispiel 5.5: Man bestimme V und x_s für die abgebildete Schraube, die als Rotationssymmetrischer Körper mit Hohlräum gestaltet wird (Bild 5.14).

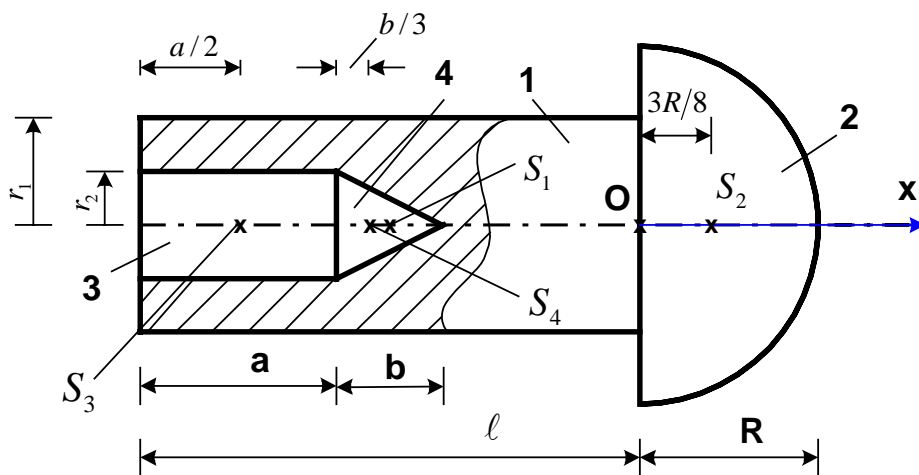


Bild 5.14: Schwerpunkt eines Rotationskörpers mit Hohlräum

Gegeben sind:

$$l = 140 \text{ mm}; r_1 = 30 \text{ mm}; R = 50 \text{ mm}; r_2 = 15 \text{ mm}; a = 55 \text{ mm}; b = 30 \text{ mm}.$$

5. 5. Flächenschwerpunkt

Der Körper ist nun eine **homogene Scheibe** mit konstanter Dicke $t = konst.$ (Bild 5.15).

Legt man die (x, y) - Ebene in die mittlere Ebene der Scheibe, so liegt der Schwerpunkt der Scheibe in dieser Ebene und der Ortsvektor von **S** errechnet sich nach Gl.(5.20) zu:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV = \frac{1}{t A} \int \vec{r} t dA = \frac{1}{A} \int \vec{r} dA \quad (5.22)$$

S heißt in diesem Fall **Flächenschwerpunkt**.

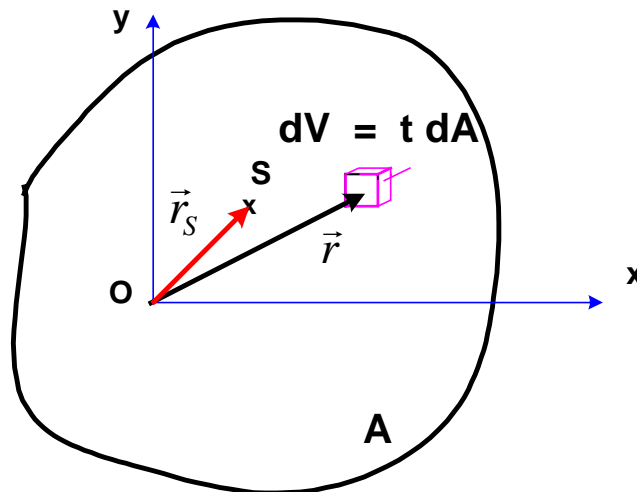


Bild 5.15: Flächenschwerpunkt

Die Schwerpunktkoordinaten errechnen sich zu:

$$x_S = \frac{1}{A} \int x dA, \quad y_S = \frac{1}{A} \int y dA. \quad (5.23)$$

Beispiel 5.5: Man bestimme die Position des Schwerpunktes eines Trapezes (Basen **B** und **b**, Höhe **h**, Bild 5.16).

Lösung: Der Flächenschwerpunkt **S** des Trapezes MNPQ befindet sich auf der Verbindungslinie RT der Mittelpunkte der Basen. Es genügt, die Koordinate x_S des Schwerpunktes zu bestimmen. Man zerlegt das Trapez in zwei Dreiecke: **1** – MQP und **2** – MNP. Es folgt:

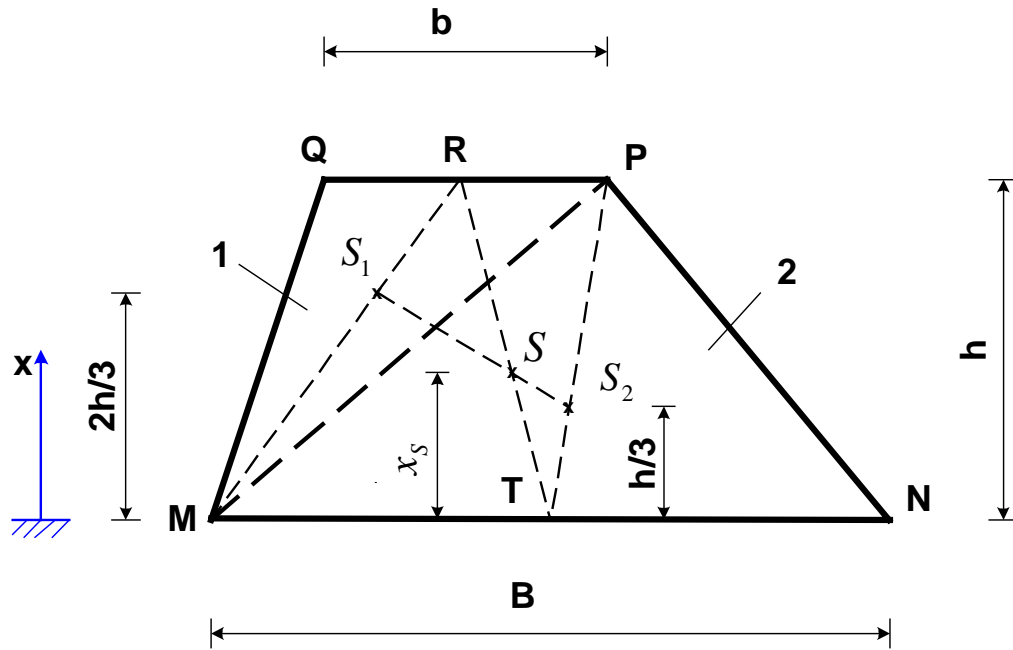


Bild 5.16: Flächenschwerpunkt eines Trapezes

$$A_1 = \frac{bh}{2}, x_{s1} = \frac{2h}{3}; A_2 = \frac{Bh}{2}, x_{s2} = \frac{h}{3};$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{h}{2}(B+b);$$

$$x_S = d_B = \frac{1}{A}(x_{s1} \cdot A_1 + x_{s2} \cdot A_2) = \frac{h}{3} \cdot \frac{B+2b}{B+b} - \text{Abstand von } S \text{ bis zur Basis } B$$

Beispiel 5.6: Man bestimme die Position des Schwerpunktes eines Kreissektors (Radius R , Zentriwinkel 2α , Bild 5.17).

Lösung: Der Flächenschwerpunkt S befindet sich auf der Symmetrieachse, die als x -Achse gewählt wird. Man zerlegt den Kreissektor in elementare Dreiecke. Das Flächenelement OMN hat den Flächeninhalt

$$dA = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot \overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot R d\beta \cdot R = \frac{1}{2} \cdot R^2 d\beta$$

und den Schwerpunkt S' , im Abstand $\overline{OS'} = \frac{2R}{3}$ von O . Die Abszisse von S' ist

$$x_{S'} = \overline{OS'} \cdot \cos\left(\beta + \frac{d\beta}{2}\right) \cong \frac{2R}{3} \cdot \cos \beta.$$

Der gesamte Flächeninhalt des Kreissektors errechnet sich zu:

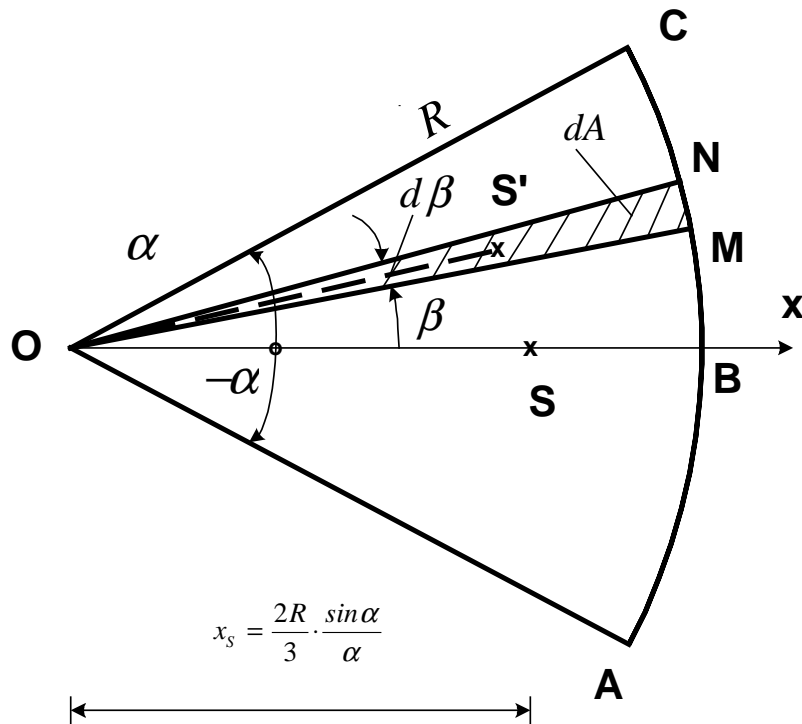


Bild 5.17: Flächenschwerpunkt eines Kreissektors

$$A = R^2 \alpha. \quad (5.24)$$

Die Abszisse des Schwerpunktes **S** wird mit Gl.(5.23) bestimmt:

$$x_s = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (5.25)$$

Einzelfall: Halbkreis ($\alpha = \pi/2$, Bild 5.18).

Aus Gl.(5.24) und (5.25) erhält man:

$$A = \frac{\pi R^2}{2}; \quad x_s = \frac{4R}{3\pi}. \quad (5.26)$$

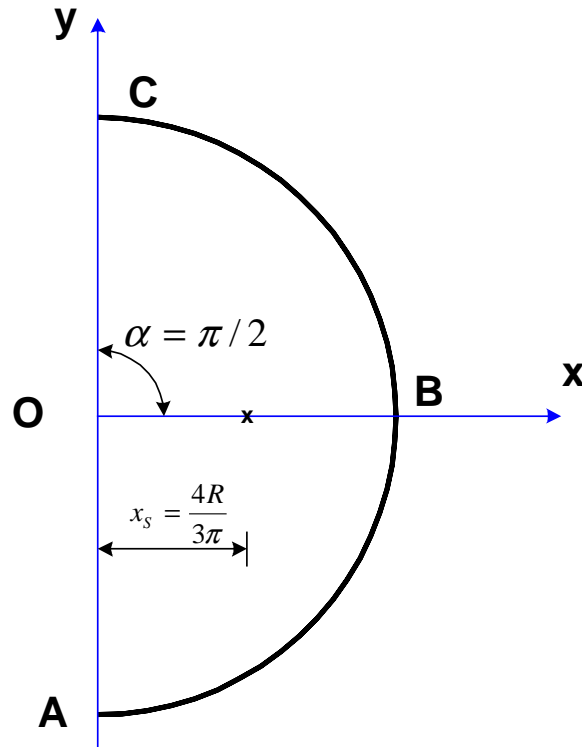


Bild 5.18: Flächenschwerpunkt eines Halbkreises

Beispiel 5. 9: Für die abgebildete viereckige, homogene Scheibe (Bild 5.19), mit den Eckpunkten $A(-4/0)$, $B(2/-5)$, $C(5/1)$ und $D(1/4)$, ist die Position des Schwerpunktes zu bestimmen. Die Koordinaten der Eckpunkte sind in m angegeben.

Lösung: Das Viereck wird in zwei Dreiecke zerlegt:

1 - ΔACD : Der Schwerpunkt S_1 liegt auf der Seitenhalbierenden DE. Es folgt:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_C & y_C \\ 1 & x_D & y_D \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 15,5 m^2$$

$$x_{S_1} = \frac{x_A + x_C + x_D}{3} = \frac{-4 + 5 + 1}{3} = 0,667 m,$$

$$y_{S_1} = \frac{y_A + y_C + y_D}{3} = \frac{0 + 1 + 4}{3} = 1,667 m.$$

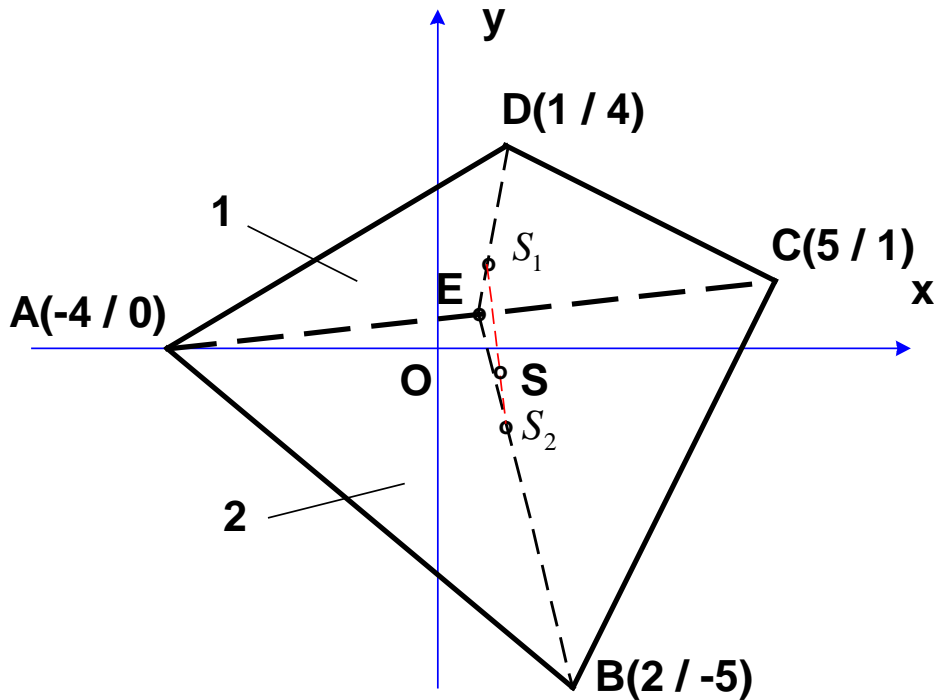


Bild 5.19: Viereckige homogene Scheibe

2 - ΔABC : Der Schwerpunkt S_2 liegt auf der Seitenhalbierenden BE. Es folgt:

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 25,5 m^2$$

$$x_{S_2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-4 + 2 + 5}{3} = 1,000 m,$$

$$y_{S_2} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0 - 5 + 1}{3} = -1,333 m.$$

Der Schwerpunkt S liegt auf der Verbindungslinie von S_1 und S_2 . Es gilt:

$$A = A_1 + A_2 = 15,5 + 25,5 = 41 m^2,$$

$$x_S = \frac{1}{A} (x_{S_1} A_1 + x_{S_2} A_2) = \frac{1}{41} (1,667 \cdot 15,5 - 1,333 \cdot 25,5) = 0,874 m,$$

$$y_S = \frac{1}{A} (y_{S_1} A_1 + y_{S_2} A_2) = \frac{1}{41} (0,667 \cdot 15,5 + 1,000 \cdot 25,5) = -0,199 m.$$

5.4. Volumenschwerpunkt

Die kontinuierlich verteilte Masse m eines Körpers mit dem Volumen V und der Dichte $\rho(x, y, z)$ sowie der Ortsvektor des Massenmittelpunktes errechnen sich wie folgt (Bild 5.10):

$$m = \int_V \rho dV,$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV. \quad (5.19)$$

Ist der Körper **homogen**, d.h. $\rho(x, y, z) = \rho = \text{konst.}$, so erhält man:

$$m = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \rho V,$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{\rho V} \rho \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad (5.20)$$

S heißt in diesem Fall **Volumenschwerpunkt**.

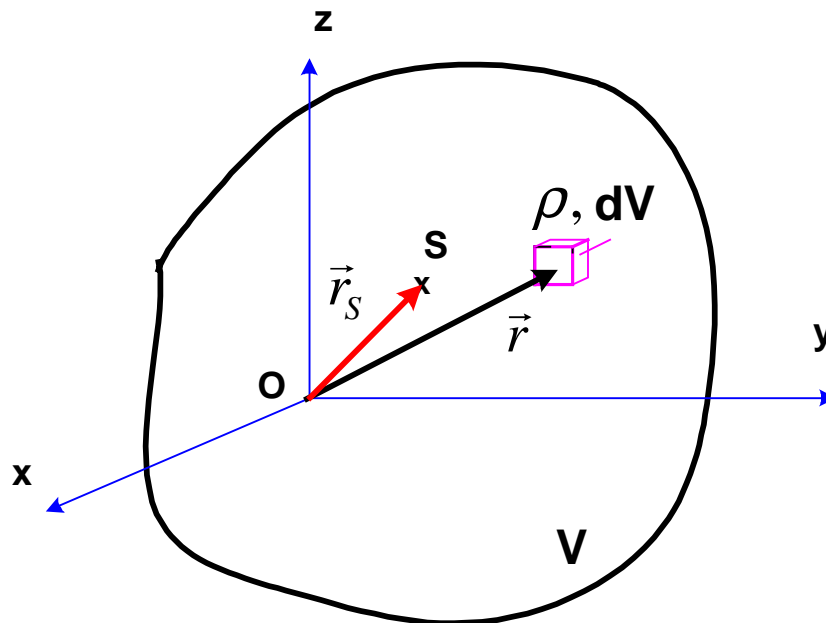


Bild 5.10: Massenmittelpunkt eines Körpers. Volumenschwerpunkt

Die Schwerpunktkoordinaten errechnen sich zu:

$$x_S = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad y_S = \frac{1}{V} \int_V y dV, \quad z_S = \frac{1}{V} \int_V z dV. \quad (5.21)$$

Beispiel 5.2: Man bestimme die Position des Schwerpunktes eines homogenen Kegels (Radius R , Höhe h , Bild 5.11).

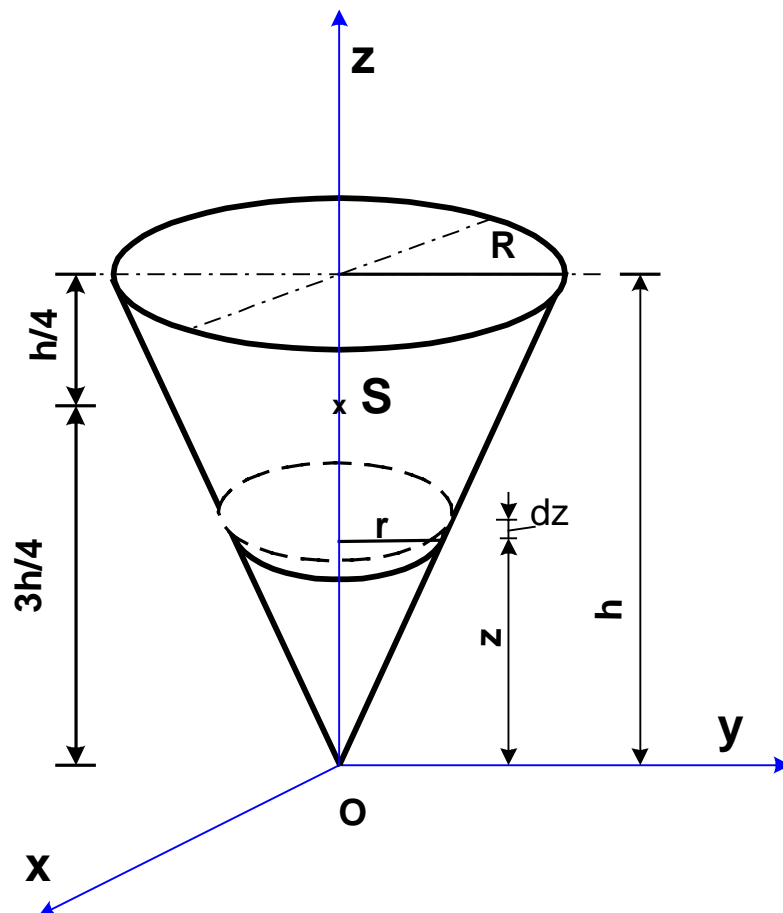


Bild 5.11: Schwerpunkt des homogenen Kegels

Lösung: Der Kreisschnitt in der Höhe z hat den Radius r , der sich nach dem Strahlsatz errechnet:

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \quad : r = R \frac{z}{h}$$

Die elementare Kreisscheibe mit dem Radius r und der Dicke dz hat das Volumen

$$dV = \pi r^2 dz = \pi \left(\frac{R}{h} z \right)^2 dz$$

Damit erhält man das Volumen des Kegels

$$V = \int_V dV = \pi \left(\frac{R}{h} \right)^2 \int_{z=0}^h z^2 dz = \pi \left(\frac{R}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Der Schwerpunkt liegt auf der z -Achse. Aus Gl.(5.21) errechnet sich die z_S -Koordinate zu:

$$z_S = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{z=0}^h z \cdot \pi \left(\frac{R}{h} z \right)^2 dz = \frac{3}{h^3} \int_{z=0}^h z^3 dz = \frac{3h}{4}.$$

Beispiel 5.3: Man bestimme die Position des Schwerpunktes einer homogenen Halbkugel (Radius R , Bild 5.12).

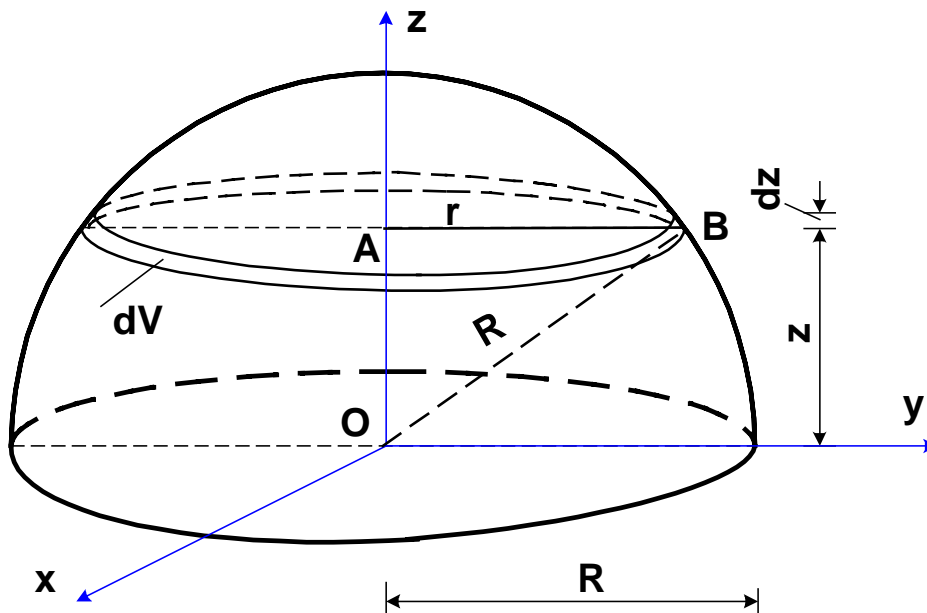


Bild 5.12: Schwerpunkt der homogenen Halbkugel

Lösung: Der Kreisschnitt in der Höhe z hat den Radius r , der sich nach aus dem Dreieck OAB errechnet. Es gilt $r^2 = R^2 - z^2$.

Die elementare Kreisscheibe mit dem Radius r und der Dicke dz hat das Volumen

$$dV = \pi r^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz$$

Damit erhält man das Volumen der Halbkugel

$$V = \int_V dV = \pi \int_{z=0}^R (R^2 - z^2) dz = \pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Der Schwerpunkt liegt auf der z -Achse. Aus Gl.(5.21) errechnet sich die z_S -Koordinate zu:

$$z_S = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{3}{2\pi R^3} \int_{z=0}^R z \cdot \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{3}{2R^3} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3R}{8}.$$

5. 5. Flächenschwerpunkt

Der Körper ist nun eine **homogene Scheibe** mit konstanter Dicke $t = konst.$ (Bild 5.15).

Legt man die (x, y) - Ebene in die mittlere Ebene der Scheibe , so liegt der Schwerpunkt der Scheibe in dieser Ebene und der Ortsvektor von **S** errechnet sich nach Gl.(5.20) zu:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{V_v} \vec{r} dV = \frac{1}{t A_A} \vec{r} t dA = \frac{1}{A_A} \vec{r} dA \quad (5.22)$$

S heißt in diesem Fall **Flächenschwerpunkt**.

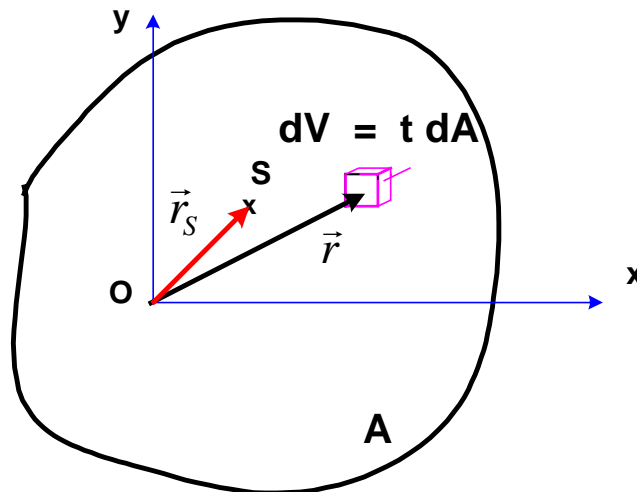


Bild 5.15: Flächenschwerpunkt

Die Schwerpunktkoordinaten errechnen sich zu:

$$x_S = \frac{1}{A_A} \int x dA, \quad y_S = \frac{1}{A_A} \int y dA. \quad (5.23)$$

Beispiel 5.5: Man bestimme die Position des Schwerpunktes eines Trapezes (Basen **B** und **b**, Höhe **h**, Bild 5.16).

Lösung: Der Flächenschwerpunkt **S** des Trapezes MNPQ befindet sich auf der Verbindungslinie RT der Mittelpunkte der Basen. Es genügt, die Koordinate x_S des Schwerpunktes zu bestimmen. Man zerlegt das Trapez in zwei Dreiecke: **1** – MQP und **2** – MNP. Es folgt:

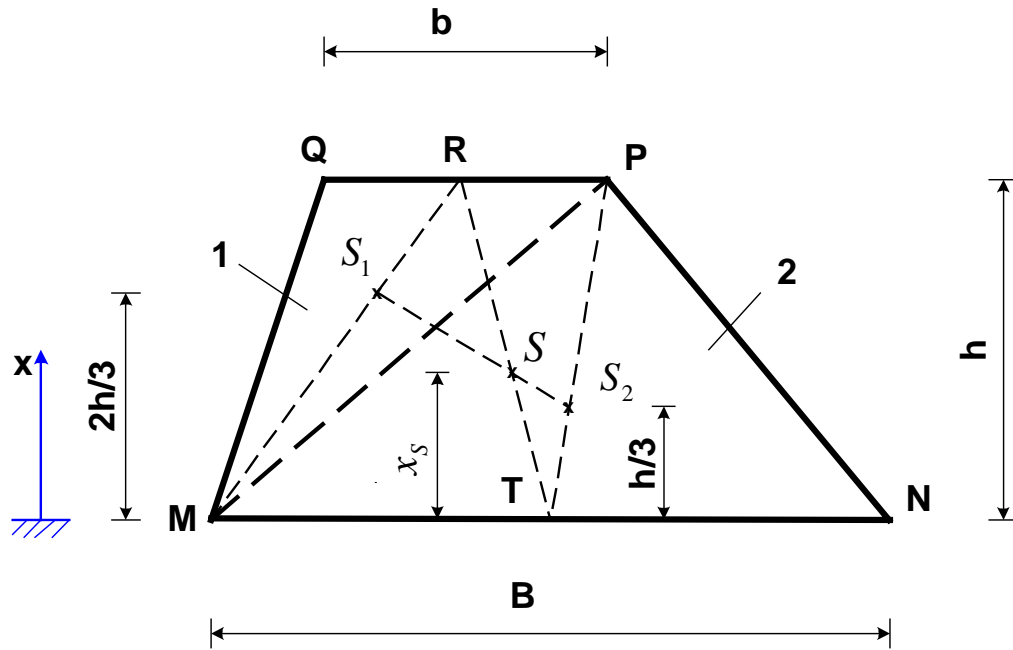


Bild 5.16: Flächenschwerpunkt eines Trapezes

$$A_1 = \frac{bh}{2}, x_{s1} = \frac{2h}{3}; A_2 = \frac{Bh}{2}, x_{s2} = \frac{h}{3};$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{h}{2}(B+b);$$

$$x_S = d_B = \frac{1}{A}(x_{s1} \cdot A_1 + x_{s2} \cdot A_2) = \frac{h}{3} \cdot \frac{B+2b}{B+b} - \text{Abstand von } S \text{ bis zur Basis } B$$

Beispiel 5.6: Man bestimme die Position des Schwerpunktes eines Kreissektors (Radius R , Zentriwinkel 2α , Bild 5.17).

Lösung: Der Flächenschwerpunkt S befindet sich auf der Symmetrieachse, die als x -Achse gewählt wird. Man zerlegt den Kreissektor in elementare Dreiecke. Das Flächenelement OMN hat den Flächeninhalt

$$dA = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot \overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot R d\beta \cdot R = \frac{1}{2} \cdot R^2 d\beta$$

und den Schwerpunkt S' , im Abstand $\overline{OS'} = \frac{2R}{3}$ von O . Die Abszisse von S' ist

$$x_{S'} = \overline{OS'} \cdot \cos\left(\beta + \frac{d\beta}{2}\right) \cong \frac{2R}{3} \cdot \cos \beta.$$

Der gesamte Flächeninhalt des Kreissektors errechnet sich zu:

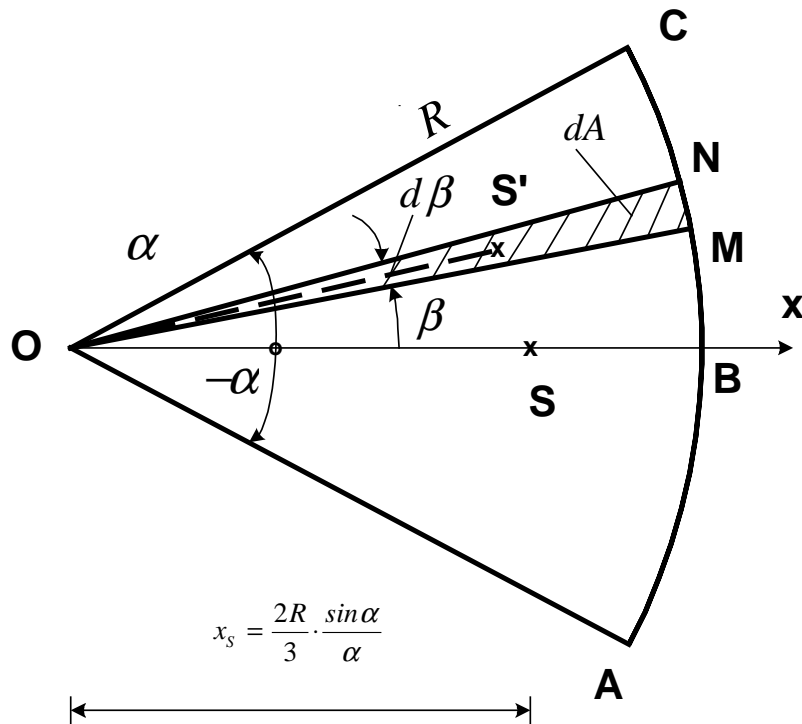


Bild 5.17: Flächenschwerpunkt eines Kreissektors

$$A = R^2 \alpha. \quad (5.24)$$

Die Abszisse des Schwerpunktes **S** wird mit Gl.(5.23) bestimmt:

$$x_s = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (5.25)$$

Einzelfall: Halbkreis ($\alpha = \pi/2$, Bild 5.18).

Aus Gl.(5.24) und (5.25) erhält man:

$$A = \frac{\pi R^2}{2}; \quad x_s = \frac{4R}{3\pi}. \quad (5.26)$$

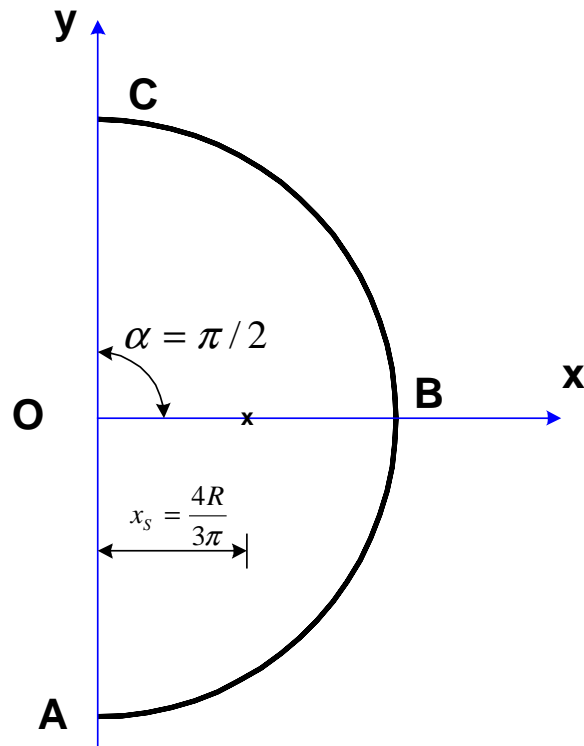


Bild 5.18: Flächenschwerpunkt eines Halbkreises

Für ein **Dreieck ABC** sind:

- der **Flächeninhalt**

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}$$

- die **Schwerpunktkoordinaten**:

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

5. 6. Linienschwerpunkt

Der Körper ist nun eine **homogene materielle Linie MN der Länge L, d.h. drahtförmig**, mit konstanter Querschnittsfläche $A = konst.$ (Bild 5.20). Somit ist das Volumen $V = AL$ und der Ortsvektor von **S** errechnet sich nach Gl.(5.20) zu:

$$\bar{r}_S = \frac{1}{V_V} \bar{r} dV = \frac{1}{AL_{MN}} \bar{r} A ds = \frac{A}{AL_{MN}} \bar{r} ds = \frac{1}{L_{MN}} \bar{r} ds \quad (5.24)$$

S heißt in diesem Fall **Linienschwerpunkt**.

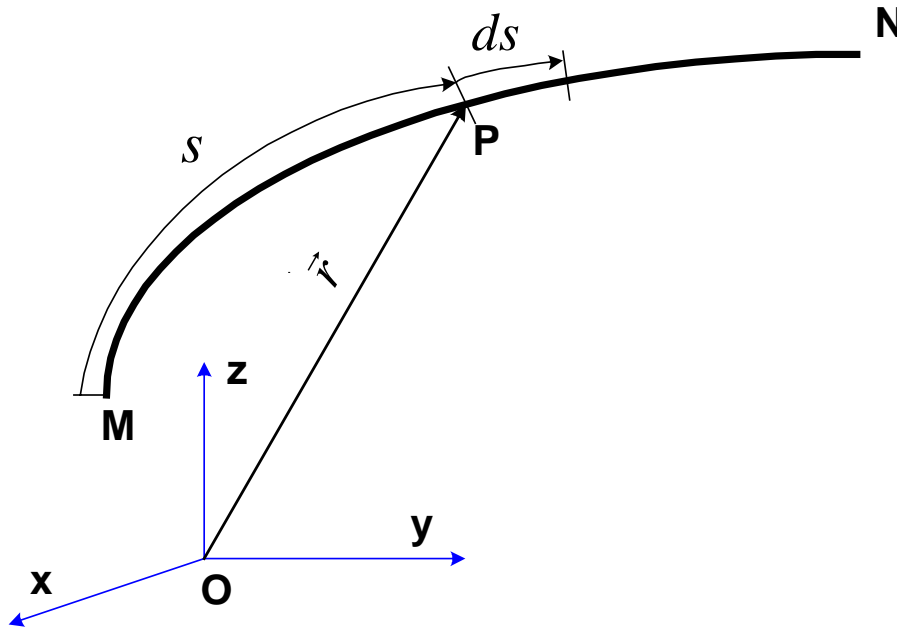


Bild 5.20: Linienschwerpunkt

Aus Gl.(5.24) erhält man die Schwerpunktkoordinaten:

$$x_S = \frac{1}{L_{MN}} \int x ds, \quad y_S = \frac{1}{L_{MN}} \int y ds, \quad z_S = \frac{1}{L_{MN}} \int z ds. \quad (5.25)$$

Beispiel 5. 10: Für das abgebildete Viereck (Bild 5.21), mit den Eckpunkten $A(-4/0)$, $B(2/-5)$, $C(5/1)$ und $D(1/4)$, ist die Position des Schwerpunktes des Umfangs zu bestimmen. Die Koordinaten der Eckpunkte sind in m angegeben.

Lösung: Der Umfang besteht aus vier Strecken. Es folgt:

$$\begin{aligned} 1 - AB: L_1 = L_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+4)^2 + (-5-0)^2} = 7,8102 m, \\ L_2 = L_{BC} &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (1+5)^2} = 6,7082 m, \\ L_3 = L_{CD} &= \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = 5 m, \\ L_4 = L_{DA} &= \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(-4-1)^2 + (0-4)^2} = 6,4031 m; \end{aligned}$$

Gesamtlänge ist der Umfang des Vierecks:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 7,8102 + 6,7082 + 5 + 6,4031 = 25,9216 m.$$

Der Schwerpunkt S_1 ist der Mittelpunkt der Seite AB. Es folgt:

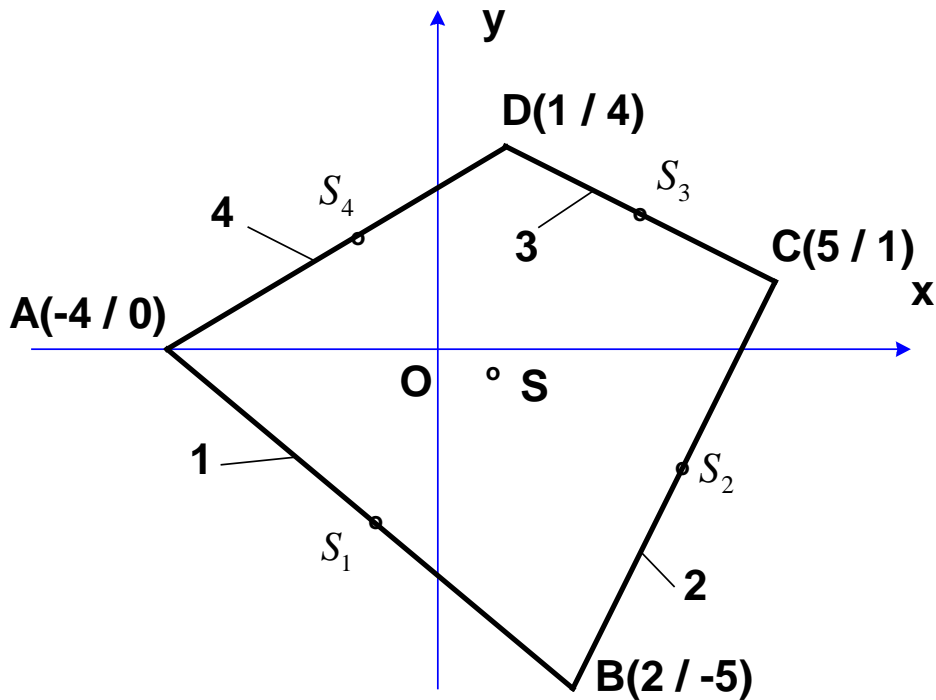


Bild 5.21: Umfangschwerpunkt des Vierecks ABCD

$$x_{S_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1 m, \quad y_{S_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 - 5}{2} = -2,5 m;$$

$$x_{S_2} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 5}{2} = 3,5 m, \quad y_{S_2} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-5 + 1}{2} = -2 m;$$

$$x_{S_3} = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3 m, \quad y_{S_3} = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{1 + 4}{2} = 2,5 m;$$

$$x_{S_4} = \frac{x_D + x_A}{2} = \frac{1 - 4}{2} = -1,5 m, \quad y_{S_4} = \frac{y_D + y_A}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 m.$$

Der Schwerpunkt S des Umfangs hat die Koordinaten:

$$x_S = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^4 x_{S_i} L_i =$$

$$\frac{1}{25,9216} [(-1) \cdot 7,8102 + 3,5 \cdot 6,7082 + 3 \cdot 5 + (-1,5) \cdot 6,4031] = 0,8126 m;$$

$$y_s = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^4 y_{s_i} L_i =$$

$$\frac{1}{25,9216} [(-2,5) \cdot 7,8102 + (-2) \cdot 6,7082 + 2,5 \cdot 5 + 2 \cdot 6,4031] = -0,2946 \text{ m.}$$

Beispiel 5. 11: Man bestimme die Position des Schwerpunktes eines Kreisbogens vom Radius R und Zentriwinkel 2α .

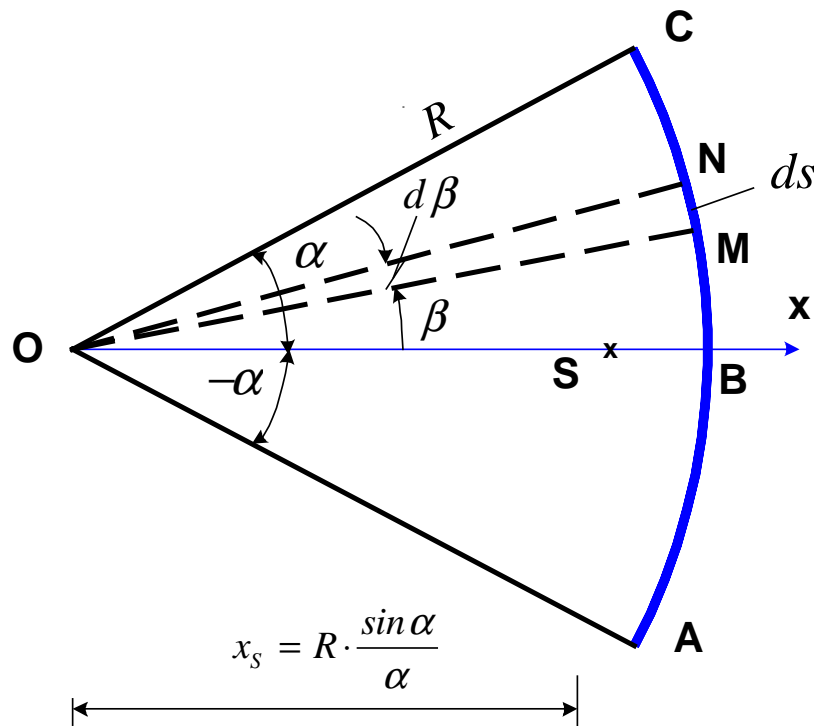


Bild 5.22: Schwerpunkt eines Kreisbogens

Lösung: Der Schwerpunkt S des Kreisbogens ABC befindet sich auf der Symmetrieachse OB , die als x -Achse gewählt wird. Man zerlegt den Kreisbogen in elementare Bogenstücke. Das Bogenelement MN hat die Länge $ds = R d\beta$ und den Schwerpunkt im Mittelpunkt dieses Elementes, mit der Abszisse

$$R \cdot \cos\left(\beta + \frac{d\beta}{2}\right) \cong R \cos \beta.$$

Die Gesamtlänge des Kreisbogens ABC ist $L = 2R\alpha$.

Die Abszisse des Schwerpunktes S wird mit Gl.(5.25) bestimmt:

$$x_s = \frac{1}{2L\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} x ds = \frac{1}{2R\alpha} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \beta \cdot R d\beta = \frac{R}{2\alpha} \sin \beta \Big|_{\beta=-\alpha}^{\alpha},$$

$$x_S = \frac{R}{2\alpha} \left[\sin \alpha - \sin(-\alpha) \right] = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

oder

$$x_S = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (5.26)$$

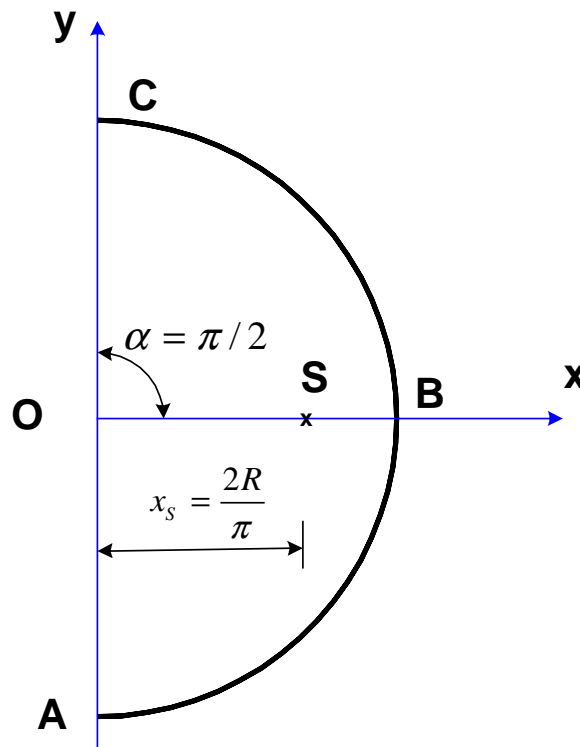


Bild 5.23: Schwerpunkt eines Halbkreisbogens

Einzelfall: Halbkreis ($\alpha = \pi/2$, Bild 5.23). Aus Gl.(5.26) erhält man:

$$x_S = \frac{2R}{\pi}. \quad (5.27)$$

5. 7. Pappus – Guldin - Sätze

Diese Sätze ermöglichen die einfache **Bestimmung der Mantelfläche und des Volumens eines rotationssymmetrischen Körpers**.

5. 7.1. Erster Satz von Pappus - Guldin

Der rotationssymmetrische Körper entsteht durch die Rotation einer ebenen Linie (Kurve oder Polygonzug) um eine Achse. Die Linie kann die Drehachse berühren, aber nicht überschreiten, d.h. sie liegt nur auf einer Seite der Drehachse (Bild 5.24).

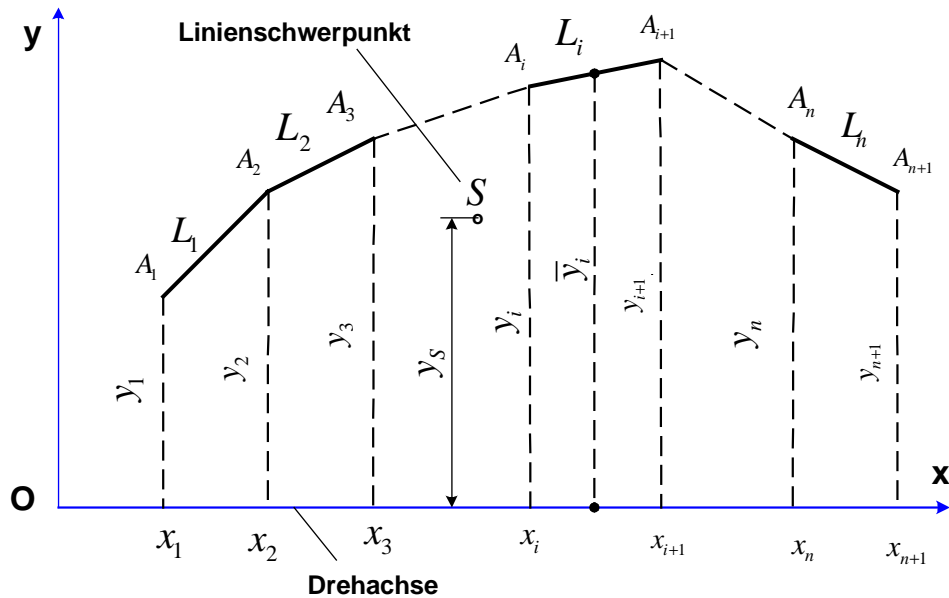


Bild 5.24: Mantelfläche des Rotationssymmetrischen Körpers

Angenommen, ist die Linie ein Polygonzug $A_1A_2A_3\dots A_iA_{i+1}\dots A_nA_{n+1}$ in der Oberhalbene ($y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n+1$) und die Drehachse sei die \mathbf{x} - Achse. Jede Strecke $\overline{A_iA_{i+1}}$ generiert durch Rotation um die \mathbf{x} - Achse einen Kegelstumpf, mit der Mantelfläche

$$O_i = \pi (y_i + y_{i+1}) \cdot L_i = 2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} L_i = 2\pi \bar{y}_i L_i$$

Die vom Polygonzug generierte Mantelfläche des rotationssymmetrischen Körpers errechnet sich zu:

$$O = \sum_{i=1}^n O_i = 2\pi \sum_{i=1}^n \bar{y}_i L_i \quad (5.28)$$

oder, mit der Gesamtlänge $L = \sum_{i=1}^n L_i$,

$$O = 2\pi y_S L \quad (1. \text{ Satz von Pappus - Guldin}) \quad (5.29)$$

Ist die Linie eine Kurve C der Länge L , so kann man sie näherungsweise durch einen Polygonzug ersetzen. Mit dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und $L_i \rightarrow 0$ schreibt sich Gl.(5.28) wie folgt um:

$$O = 2\pi \int_C y ds = 2\pi y_S L$$

Damit ist Gl.(5.29) auch in diesem Fall gültig.

Die Mantelfläche eines Körpers, der durch die Rotation einer Linie um eine Achse entsteht, errechnet sich als Produkt der Linielänge L mit dem Umfang des Kreises, den der Linienschwerpunkt S beschreibt.

Beispiel 5. 12: Man bestimme die Kugeloberfläche mit Hilfe des 1. Satzes von Papus – Guldin

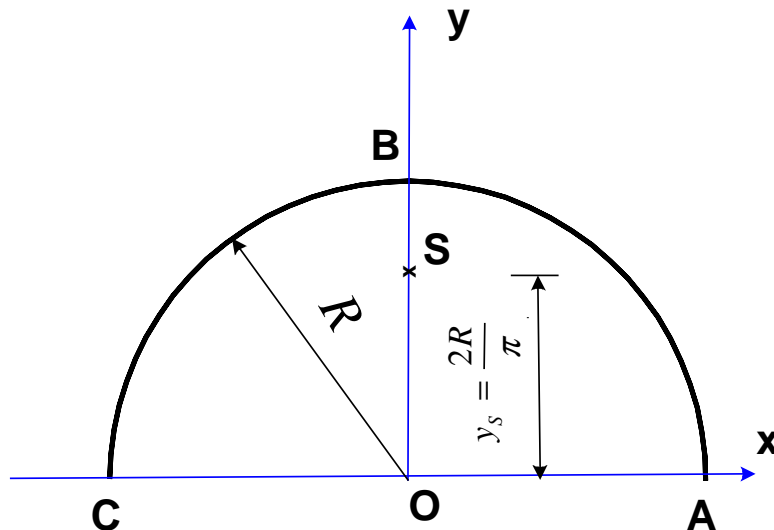


Bild 5.25: Kugeloberfläche mit Hilfe des 1. Satzes von Papus - Guldin

Lösung: Der Schwerpunkt S liegt in Bild 5.25 auf der y –Achse im Abstand

$y_s = 2R/\pi$ von der Drehachse \mathbf{x} . Mit der Länge $L = \pi R$ des Halbkreisbogens ABC , schreibt sich der 1. Satz von Papus – Guldin zu:

$$O = 2\pi y_s L = 2\pi \cdot \frac{2R}{\pi} \cdot \pi R = 4\pi R^2 \quad (\text{ein wohl bekanntes Ergebnis})$$

5. 7.2. Zweiter Satz von Papus - Guldin

Der rotationssymmetrische Körper entsteht nun durch die Rotation einer Fläche \mathbf{A} um die \mathbf{x} – Achse. Die Fläche \mathbf{A} kann zwischen einer Kurve und dieser Achse, oder zwischen einem Polygonzug und der \mathbf{x} – Achse enthalten sein, oder auch von einer Kurve umschlossen sein. Die Fläche kann die Drehachse berühren, aber nicht überschreiten, d.h. sie liegt nur auf einer Seite der Drehachse (Bild 5.26).

Durch die Rotation einer elementaren Fläche $d\mathbf{A}$ im Abstand \mathbf{y} von der Drehachse entsteht ein „gekrümmtes“ Parallelepiped, dessen elementares Volumen ist $dV = 2\pi y dA$.

Das Gesamtvolumen des rotationssymmetrischen Körpers errechnet sich durch Integration zu:

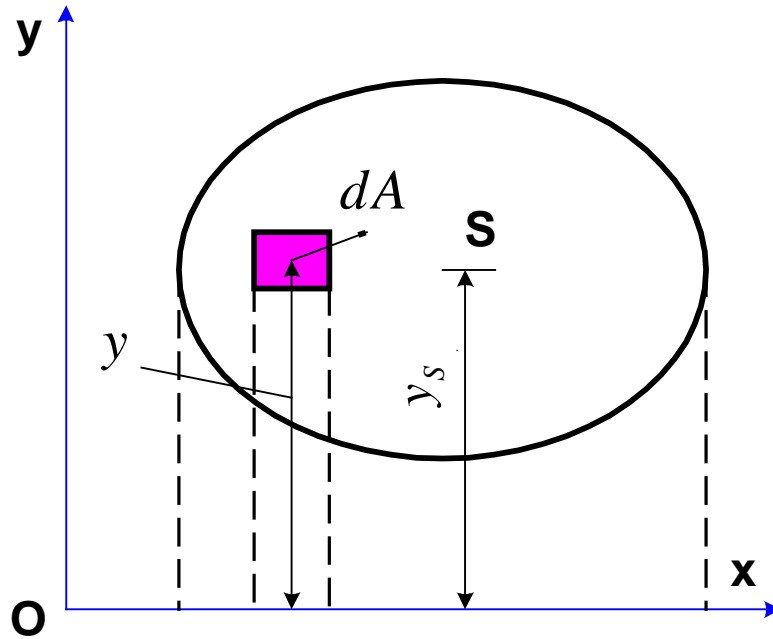


Bild 5.24: Volumen des Rotationssymmetrischen Körpers

$$V = 2\pi \int_A y dA = 2\pi y_s A$$

$$V = (2\pi y_s) A \quad - \text{2. Satz von Pappus -Guldin} \quad (5.30)$$

Das Volumen eines Körpers, der durch die Rotation einer Fläche um eine Achse entsteht, errechnet sich als Produkt des Flächeninhaltes A mit dem Umfang des Kreises, den der Flächenschwerpunkt S beschreibt.

Beispiel 5. 13: Man bestimme das Kugelvolumen mit Hilfe des 2. Satzes von Pappus – Guldin.

Lösung: Der Schwerpunkt S liegt in Bild 5.26 auf der y –Achse im Abstand $y_s = \frac{4R}{3\pi}$

von der Drehachse \mathbf{x} . Mit dem Flächeninhalt $A = \pi R^2 / 2$ des Halbkreises ABC, schreibt sich der 2. Satz von Pappus – Guldin zu:

$$V = (2\pi y_s) A = 2\pi \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (\text{bekanntes Ergebnis})$$

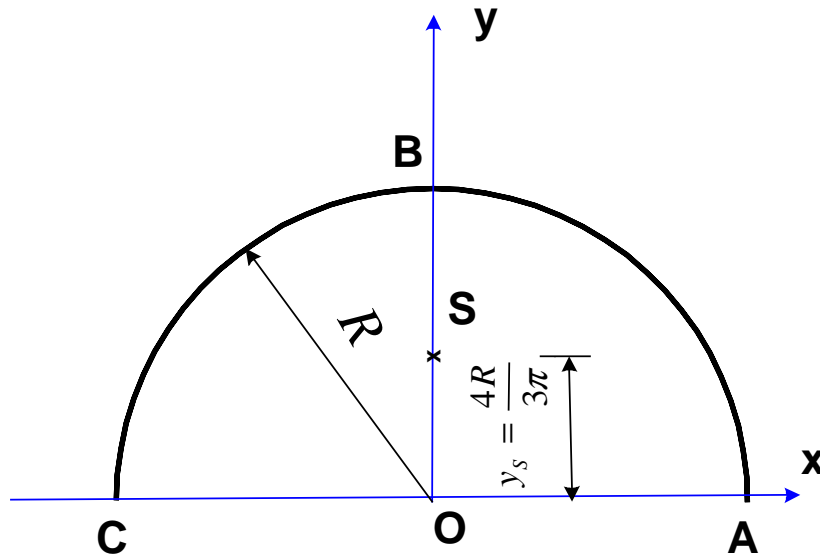


Bild 5.26: Kugelobervolumen mit Hilfe des 2. Satzes von Pappus - Guldin

Beispiel 5. 14: Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(1/0)$, $B(5/2)$ und $C(3/6)$, Bild 5.27. Die Koordinaten sind in cm angegeben.

Man bestimme:

- den Umfang L und die Koordinaten des Umfangsschwerpunktes S ;
- den Flächeninhalt A und die Koordinaten des Flächenschwerpunktes G ;
- die Oberfläche des Körpers, der durch die Rotation des Dreiecks um die x – Achse entsteht;

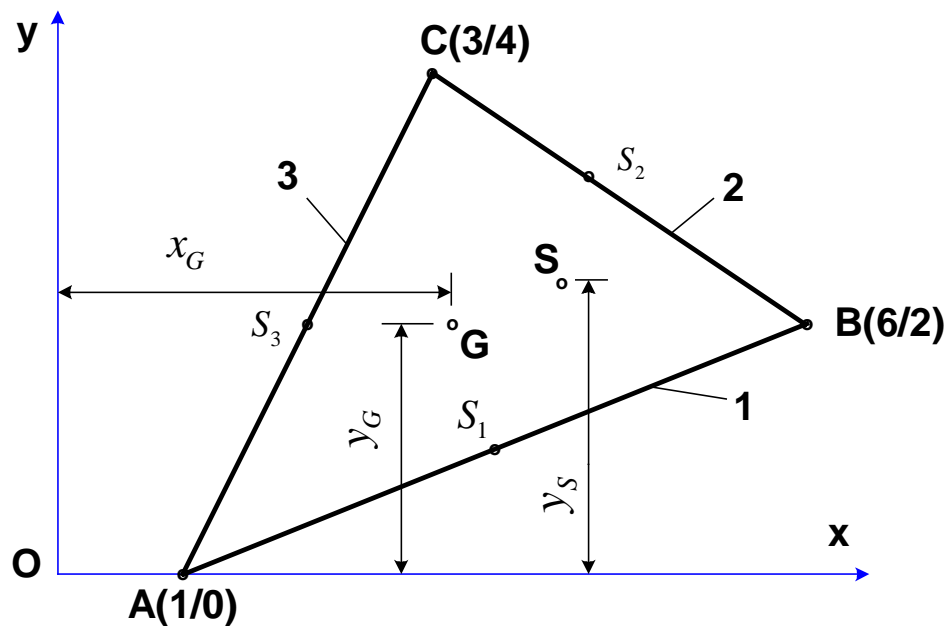


Bild 5.27: Oberfläche und Volumen des durch Rotation des Dreiecks generierten Körpers

- d) das Volumen des Körpers, der durch die Rotation des Dreiecks um die \mathbf{x} – Achse entsteht;
 e) das Volumen des Körpers, der durch die Rotation des Dreiecks um die \mathbf{y} – Achse entsteht.

Lösung: a) $L_1 = 5,3852\text{ cm}$, $S_1 (3,5\text{ cm}/1\text{ cm})$;
 $L_2 = 3,6056\text{ cm}$, $S_2 (4,5\text{ cm}/3\text{ cm})$;
 $L_3 = 4,4721\text{ cm}$, $S_3 (2\text{ cm}/2\text{ cm})$;
 $L = 13,4629\text{ cm}$, $S (4,0907\text{ cm}/2,6890\text{ cm})$.

b) $A = 8\text{ cm}^2$, $G(3,3333\text{ cm}/2\text{ cm})$. c) $O = 227,4627\text{ cm}^2$.

d) $V = 100,5310\text{ cm}^3$. e) $V_1 = 167,5516\text{ cm}^3$.

Beispiel 5. 15: Durch Rotation des abgebildeten Kreises (Bild 5.27) um die \mathbf{x} – Achse entsteht ein Torus. Gegeben sind \mathbf{R} und \mathbf{r} . Man bestimme die Oberfläche und das Volumen des Torus.

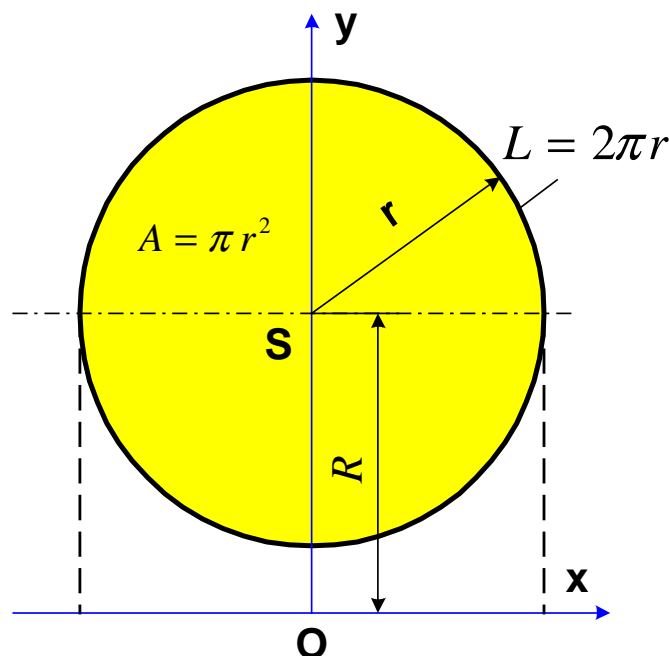


Bild 5.27: Oberfläche und Volumen des Torus

Lösung: Die Schwerpunkte des Umfangs und der Fläche des Kreises sind identisch.

$$O = 2\pi y_s L = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr;$$

$$V = 2\pi y_s A = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$