Differentialgleichung 2. Ordnung

Beispiel 1 $\frac{d^2 s}{dt} = g$ oder anders geschrieben $\ddot{s} = g$ | g = Erdbeschleunigung

$$\ddot{S} = \frac{d(\dot{s})}{dt} = g \Rightarrow d(\dot{s}) = g\,dt$$

$$\Rightarrow = \int d(\dot{s}) = \int g\,dt$$

$$= \dot{s} = gt + C_1$$

$$\Rightarrow \dot{S} = \frac{ds}{dt} = g \cdot t + C_1$$

$$\int ds = \int g \cdot t + C_1 \, dt$$

$$s = g \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2$$

Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls ohne Luftwiderstand.

Wenn wir als Anfangsbedingung vorgeben $s(t=0)=0$ und $v(t=0)=0$, wobei $v(t) = \dot{s}(t)$ entspricht, dann erhalten wir $C_1=0$ und $C_2=0$ somit lautet die partikulare Lösung $s = \frac{g}{2} t^2$

Wronski-Determinante

① man prüfe ob die beiden Funktionen $y_1 = \sin x$ und $y_2 = \cos x$ linear abhängig sind

$y_1 = \sin x \quad y_1' = \cos x$

$y_2 = \cos x \quad y_2' = -\sin x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ nicht linear abhängig!

② Prüfung von $y_1 = 3 \cdot e^{-4x}$ und $y_2 = -6e^{-4x}$,

$y_1' = -12 e^{-4x} \quad y_2' = 24 e^{-4x}$

$$W(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot e^{-4x} & -6e^{-4x} \\ -12 e^{-4x} & 24 e^{-4x} \end{vmatrix} = 72 e^{-4x} - 72 e^{-4x} = 0$$

linear abhängig!

Fall 1 $k_1 \neq k_2$

Man löse die Dgl $\boxed{y'' - y' - 6y = 0}$

Mit dem Lösungsansatz $y = e^{kt}$ ergibt sich die char. Gl.

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$\Rightarrow k_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow k_1 = 3 \quad k_2 = -2$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-2x}$$

Fall 2 $k_1 = k_2$

Man löse die Dgl $\boxed{y'' - 6y' + 9y = 0}$

char. Gl.

$k_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-9} \Rightarrow k_1 = k_2 = 3$ doppelte Nullstelle

Lösungsformel: $y_h = (C_1 x + C_2)\, e^{3x}$

Fall 3 k_1 und k_2 komplex

Man löse die Dgl $\boxed{y'' + 2y' + 10y = 0}$

char. Gl. $k^2 + 2k + 10 = 0$

$$k_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9}$$

$$k_1 = -1 + 3j$$

$$k_2 = -1 - 3j$$

Lösungsformel: $y_h = e^{-x}\left[C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \sin(3x)\right]$

$\boxed{y'' + 3y' - 4y = x^2}$ Anfangsbed. $y(0) = \frac{19}{32}$ $y'(0) = \frac{13}{8}$

(Inhomogene Dgl 2. Ordnung mit konst. Koeff.)

<u>1. Schritt</u> Lösung der homogenen Dgl.

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

char. Gl $k^2 + 3k - 4 = 0$

$$k_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$k_1 = 1, \; k_2 = -4$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^{x} + C_2 e^{-4x}$$

2. direkter Ansatz: $S(x) = x^2$ (Störfunktion)

keine Resonanz da $S(x)$ keine Lösung der homogenen Dgl ist

x^2 ist Teil eines Polynoms

ableiten

$$y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$
$$y_p' = 2A_2 x + A_1$$
$$y_p'' = 2A_2$$

in Dgl einsetzen

$$2A_2 + 3(2A_2 x + A_1) - 4(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) = x^2$$
$$2A_2 + 6A_2 x + 3A_1 - 4A_2 x^2 - 4A_1 x - 4A_0 = x^2$$
$$-4A_2 x^2 + 6A_2 x + 2A_2 - 4A_1 x - 4A_0 + 3A_1 = x^2$$
$$-4A_2 x^2 + 6A_2 x - 4A_1 x + 2A_2 + 3A_1 - 4A_0 = x^2$$
$$\underbrace{-4A_2 x^2}_{x^2} + \underbrace{(6A_2 - 4A_1)x}_{x^1} + \underbrace{2A_2 + 3A_1 - 4A_0}_{x^0} = x^2$$

Koeffizientenvergleich

$$x^2: \quad -4A_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_2 = -\frac{1}{4}}}$$

$$x^1: \quad 6A_2 - 4A_1 = 0$$
$$-6\frac{1}{4} - 4A_1 = 0$$
$$-\frac{6}{4} - 4A_1 = 0$$
$$4A_1 = -\frac{6}{4} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{6}{16} = \underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$$x^0: \quad 2A_1 + 3A_1 - 4A_0 = 0$$
$$-\frac{2}{4} - \frac{9}{8} - 4A_0 = 0$$
$$-\frac{4}{8} - \frac{9}{8} = 4A_0$$
$$-\frac{13}{8} = 4A_0$$
$$A_0 = -\frac{13}{32}$$

die A's in y_p einsetzen $\Rightarrow$

Einsetzen in $y_p: A_2x^2 + A_1x + A_0$

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$$

$$\Rightarrow \quad y_{allg} = y_h + y_p$$

$$y_{allg} = C_1 \cdot e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$$

3. Auswerten der Anfangsbedingung

$$y_{allg}(0) = \frac{19}{32} \qquad y'_{allg}(0) = \frac{13}{8}$$

$$\frac{19}{32} = C_1 + C_2 - \frac{13}{32} \quad \Rightarrow \quad \text{I}: C_1 + C_2 = 1$$

$$y'_{allg} = C_1 \cdot e^x - 4C_2 e^{-4x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$$

$$y'_{allg}(0) = C_1 - 4C_2 - \frac{3}{8} = \frac{13}{8}$$

$$C_1 - 4C_2 = \frac{16}{8} \Rightarrow \quad \text{II}: C_1 - 4C_2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II} & C_1 - 4C_2 = 2 \\ \text{I} & C_1 + C_2 = 1 \end{array}\right]^{+}_{-}$$

$$-5C_2 = 1 \quad \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{5}$$

$$\text{I} \Rightarrow \quad C_1 - \frac{1}{5} = 1$$

$$C_1 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$y_{spez} = \frac{6}{5}C_1 \cdot e^x + \frac{1}{5}e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$$

Beispiel 2

$y'' - 2y' - 3y = \cos x$ inhomogene Dgl 2. Ordnung mit konst. Koeff.

1. homogene Dgl.

$y'' - 2y' - 3y = 0$

Lösungsansatz : $y = e^{kx}$

char. Gleichung : $k^2 - 2k - 3 = 0$

$k_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4}$

$k_{1/2} = 1 \pm 2$

$k_1 = -1$

$k_2 = +3$

$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

2. direkter Ansatz : $S(x) = \cos x$, keine Resonanz möglich, also Ansatz laut Tabelle :

$y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$

$y_p' = A\cos x - B\sin x$

$y_p'' = -A\sin x - B\cos x$

einsetzen in die inhomogene Dgl.

$-A\sin x - B\cos x - 2(A\cos x - B\sin x) - 3(A\sin x + B\cos x) = \cos x$

$-A\sin x - B\cos x - 2A\cos x + 2B\sin x - 3A\sin x - 3B\cos x = \cos x$

$-A\sin x + 2B\sin x - 3A\sin x - B\cos x - 2A\cos x - 3B\cos x = \cos x$

$\sin x(-4A + 2B) + \cos x(-4B - 2A) = \cos x + 0\sin x$

Koeffizientenvergleich

$\sin x : \quad -4A + 2B = 0 \quad \mathrm{I}$

$\cos x : \quad -2A - 4B = 1 \quad \mathrm{II}$

$2\mathrm{I} + \mathrm{II}$
$$\begin{array}{r} -8A + 4B = 0 \\ \underline{-2A - 4B = 1} \\ -10A = 1 \end{array} \Rightarrow A = -\frac{1}{10}$$

$+2 \cdot \frac{1}{10} - 4B = 1$

$\frac{1}{5} - 4B = 1$

$-4B = \frac{4}{5}$

$B = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$

$y_{allg} = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$

Beispiel 3

$$y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^{-x}$$

1. Lösung der homogenen Dgl

$y'' + 3y' + 2y = 0$ Lösungsansatz: $y = e^{kx}$

char. Gl.: $k_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$

$k_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$k_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$k_1 = -\frac{4}{2} = -2$

$k_2 = -\frac{2}{2} = -1$

$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}$

2. direkter Ansatz $s(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$

s(x) ist nicht in der Tabelle enthalten, der Aufbau von s(x) entspricht Ansatz I

$s(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$
$= R_1(x) \cdot e^{-x}$ mit $\beta = -1$

$\beta = -1 = k_1$ ist einfache Nullstelle der char. Gl.
($\Rightarrow n = 1$)

Ansatz, Fall I,2 mit $n=1$

$$y_p = x^1 B(x) \cdot e^{-x}$$
$$= x(b_1 x + b_0) \cdot e^{-x}$$
$$y_p = e^{-x}(b_1 x^2 + b_0 x)$$

$$y_p' = -e^{-x}(b_1 x^2 + b_0 x) + e^{-x}(2b_1 x + b_0)$$
$$y_p' = e^{-x}(-b_1 x^2 - b_0 x + 2b_1 x + b_0)$$
$$y_p' = e^{-x}[-b_1 x^2 + (2b_1 - b_0)x + b_0]$$
$$y_p'' = -e^{-x}[-b_1 x^2 + (2b_1 - b_0)x + b_0] + e^{-x}[-2b_1 x + 2b_1 - b_0]$$

$$y_p'' = e^{-x}[b_1 x^2 - 2b_1 x + b_0 x - b_0 - 2b_1 x + 2b_1 - b_0]$$
$$y_p'' = e^{-x}[b_1 x^2 - 4b_1 x + b_0 x + 2b_1 - b_0]$$
$$y_p'' = e^{-x}[b_1 x^2 + (-4b_1 + b_0)x + 2b_1 - b_0]$$

Einsetzen der y_p's in die DGL $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^{-x}$

$$e^{-x}[b_1 x^2 + (-4b_1 + b_0)x + 2b_1 - b_0] + 3\left[e^{-x}(-b_1 x^2 + (2b_1 - b_0)x + b_0)\right] + 2e^{-x}(b_1 x^2 + b_0 x) = (x+1)e^{-x}$$

Multiplizieren mit e^x ergibt:

$$b_1 x^2 + (-4b_1 + b_0)x + 2b_1 - b_0 + 3[-b_1 x^2 + (2b_1 - b_0)x + b_0] + 2(b_1 x^2 + b_0 x) = x + 1$$
$$b_1 x^2 - 4b_1 x + b_0 x + 2b_1 - b_0 - 3b_1 x^2 + 6b_1 x - 3b_0 x + 3b_0 + 2b_1 x^2 + 2b_0 x = x + 1$$
$$-4b_1 x + 6b_1 x + b_0 x - 3b_0 x + 2b_0 x + 2b_1 + 3b_0 - b_0 = x + 1$$
$$(-4b_1 + 6b_1 + b_0 - 3b_0 + 2b_0)x + 2b_1 + 2b_0 = x + 1$$
$$2b_1 x + 2b_1 + 2b_0 = x + 1$$

Koeffizientenvergleich

x^1: $\quad 2b_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{2}$

x^0: $\quad 2b_1 + b_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \frac{1}{2} + b_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 0$

$$y_{allg.} = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

Beispiel 4

Man löse $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$

1. Lösung der homogenen Dgl.:

$$\ddot{y} + 4y + 4y = 0$$

cha. Gl.

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$(k+2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

$$\Rightarrow y_h = (c_1 \cdot t + c_2) e^{-2t}$$

$S(t) = e^{-2t}$ (kann Lösung der homogenen Dgl sein. Ansatz I, Fall I,2)

$n = 2$ Resonanz

$\beta = -2$

$$y_p = t^2 \cdot B_0(t) \cdot e^{-2t} = b_0 t^2 \cdot e^{-2t}$$

$$\dot{y}_p = 2b_0 t \cdot e^{-2t} - 2e^{-2t} b_0 t^2 = e^{-2t}(2b_0 t - 2b_0 t^2)$$

$$\ddot{y}_p = -2e^{-2t}(2b_0 t - 2b_0 t^2) + e^{-2t}(2b_0 - 4b_0 t)$$

$$= e^{-2t}(2b_0 - 4b_0 t - 4b_0 t + 4b_0 t^2) = e^{-2t}(4b_0 t^2 - 8b_0 t + 2b_0)$$

einsetzen in die Ausgangs-DGL

$$e^{-2t}(2b_0 - 4b_0 t - 4b_0 t + 4b_0 t^2) + 4e^{-2t}(2b_0 t - 2b_0 t^2) + 4b_0 t^2 e^{-2t} = e^{-2t} \quad | : e^{-2t} \neq 0$$

$$4b_0 t^2 - 8b_0 t + 2b_0 + 8b_0 t - 8b_0 t^2 + 4b_0 t^2 = 1$$

$$t^2(4b_0 - 8b_0 + 4b_0) + t(8b_0 - 8b_0 t) + 2b_0 = 1$$

$$\Rightarrow 2b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}$$

$$y_{allg.} = y_h + y_p = (c_1 t + c_2) e^{-2t} + \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{-2t}$$

Beispiel 5 Man Löse $y''+2y+10y = \cos x - xe^{-x}$

1. homogene Lösung aus cha. Gl. $k^2+2k+10=0$

$$k_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-10}$$

$$k_{1/2} = -1 \pm j3$$

$$y_h = e^{-x}\left(C_1\cos(3x) - C_2\sin(3x)\right)$$

2. Direkter Ansatz $S(x) = \cos x - xe^{-x}$

gemäß § 5.3.7 Satz 13 spalten wir die $S(x)$ auf

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x)$$
$$= \cos x + (-xe^{-x})$$

direkter Ansatz für $S_1(x) = \cos x$ (keine Resonanz, also Tabelle)

$$y_{p_1} = A\sin x + B\cos x$$
$$y'_{p_1} = A\cos x - B\sin x$$
$$y''_{p_1} = -A\sin x - B\cos x$$

einsetzen in DGL, S_2 außen Vorlasssen, S_1 einsetzen

$\Downarrow$

$$-A\sin x - B\cos x + 2(A\cos x - B\sin x) + 10(A\sin x + B\cos x) = \cos x$$

sortieren

$$-A\sin x - B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x + 10A\sin x + 10B\cos x = \cos x$$
$$\sin x(-A+10A-2B) + \cos(-B+2A+10B) = \cos x$$
$$\sin x(9A-2B) + \cos(2A+9B) = \cos x$$

$\sin x$: $9A-2B = 0$ | $\cdot 9$
$\cos x$: $2A+9B = 1$ | $\cdot 2$

$$\begin{aligned} 81A - 18B &= 0 \\ 4A + 18B &= 2 \\ \hline 85A &= 2 \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{2}{85}$$

$$\frac{18}{85} - 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{9}{85}$$

$$y_{p_1} = \frac{2}{85}\sin x + \frac{9}{85}\cos x$$

direkter Ansatz für $S_2(x) = -x e^{-x}$ — S_2 ist nicht in der Tabelle enthalten. Aufbau entspricht Ansatz I

$$S_2(x) = -x e^{-x} = R_1(x)\cdot e^{-x} \quad \text{mit } \beta = -1$$

(β ist keine Nullstelle $\Rightarrow$ Ansatz 1, Fall I1)

$$y_{p2} = B_1(x)\cdot e^{-x} = (b_1 x + b_0)\,e^{-x}$$

$$y'_{p2} = -e^{-x}(b_1x+b_0) + e^{-x}(b_1) = -b_1 x e^{-x} - e^{-x}b_0 + e^{-x}b_1 = e^{-x}(-b_1x + b_1 - b_0)$$

$$y''_{p2} = -e^{-x}(-b_1x+b_1-b_0) - e^{-x}b_1 = e^{-x}(b_1x - 2b_1 + b_0)$$

Einsetzen in die Dgl. mit $S_2(x) = -xe^{-x}$ als Störfunktion.

$$e^{-x}(b_1x-2b_1+b_0) + 2e^{-x}(-b_1x+b_1-b_0) + 10e^{-x}(b_1x+b_0) = -x\cdot e^{-x} \qquad |\cdot e^{-x} \neq 0$$

$$b_1x - 2b_1 + b_0 - 2b_1x + 2b_1 - 2b_0 + 10b_1x + 10b_0 = -x$$

$$-b_1x + 10b_1x + (-2b_1 + b_0 + 2b_1 + 10b_0 - 2b_0) = -x$$

$$9b_1x + 9b_0 = -x$$

Koeffizientenvergleich

$$x^1: \quad 9b_1 = -1 \quad \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{9}$$

$$x^0: \quad 9b_0 = 0 \quad \Rightarrow b_0 = 0$$

$$\Rightarrow y_{p2} = -\frac{1}{9}x\,e^{-x}$$

$$y_{allg} = y_h + y_{p1} + y_{p2} = e^{-x}\{\cos(3x) + C\sin(3x)\} + \frac{1}{85}(2\sin x + 9\cos x) - \frac{1}{9}xe^{-x}$$

Beispiel 6

$$y'' + y = -2\sin x + 4\cos x$$

1. Losung der homogenen Dgl. Ansatz: $y = e^{kx}$

Char. Gl.: $k^2 + 1 = 0$

$$k_{1/2} = \pm\sqrt{-1} = \pm j$$
$$k_1 = j \quad = 0 + j$$
$$k_2 = -j \quad = 0 - j$$

$$y_h = e^{0x}\{C_1 \cdot \cos x + C_2 \sin x\}$$

2. direkter Ansatz für $S(x) = 4 \cdot \cos x - 2\sin x$

$S(x)$ darf nicht in 2 Teile aufgespalten werden, den $S(x)$ paßt unmittelbar auf Ansatz II: $S(x) = R_1(x) \cdot \cos x + \hat{R}_0(x) \cdot \sin x$ mit

$$R_1(x) = 4x$$
$$\hat{R}_0(x) = -2$$

Es ist $\alpha = 1$ und $\pm \alpha j = \pm j$ sin α Nullstellen der char. Gleichung

Ansatz II, Fall II, 2

$$y_p = x\left[B_1(x) \cdot \cos x + C_1(x)\sin x\right]$$

$$y_p = x\left[(b_1 x + b_0)\cos x + (C_1 + C_0)\sin x\right]$$

$$y_p = \cos x\,(b_1 x + b_0 x) + \sin x(C_1 x^2 + C_0 x)$$

$$y'_p = -\sin x(b_1 x^2 + b_0 x) + \cos x(2b_1 x + b_0) + \cos x\left((C_1 x^2 + C_0 x)\right) + \sin x\left(2C_1 x + C_0\right)$$

$$y'_p = \cos x\left[C_1 x^2 + (2b_1 + C_0)x + b_0\right] + \sin x\left[-b_1 x^2 + (2C_1 - b_0)x + C_0\right]$$

$$y''_p = -\sin x\left[C_1 x^2 + (2b_1 + C_0)x + b_0\right] + \cos x\left[2C_1 x + 2b_1 + C_0\right] +$$
$$\cos x\left[-b_1 x^2 + (2C_1 - b_0)x + C_0\right] + \sin x\left[-2b_1 x + 2C_1 - b_0\right]$$

$$y''_p = \cos x\left[-b_1 x^2 + (4C_1 - b_0)x + 2b_1 + 2C_0\right] + \sin x\left[-C_1 x^2 - (4b_1 + C_0) + 2C_1 - 2b_0\right]$$

 09.02.05

A5 $y'' + 4y' + 13y = \frac{29}{2}\sin(2x)$, Anfangsbed. $y(0) = \frac{6}{5}$

$y'(0) = \frac{4}{5}$

1. Lösung der homogenen DGL

$y'' + 4y' + 13y = 0$ char. GL. $k^2 + 4k + 13 = 0$

$k_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-13}$

$k_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-9}$

$k_{1/2} = -2 \pm 3j$

$$y_h = e^{-2x}\left[c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)\right]$$

2. keine Resonanz, Ansatz aus Tabelle.

$s(x) = \frac{29}{2}\sin(2x)$

$y_p = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$

$y_p' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$

$y_p'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$

3 Einsetzen in DGL

$$-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) + 4\left(2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)\right) + 13\left(A\sin(2x) + B\cos(2x)\right) = \frac{29}{2}\sin(2x)$$

$$-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) + 8A\cos(2x) - 8B\sin(2x) + 13A\sin(2x) + 13B\cos(2x) = \frac{29}{2}\sin(2x)$$

$9A\sin(2x) - 8B\sin(2x) + 9B\cos(2x) + 8A\cos(2x) = \frac{29}{2}\sin(2x)$

$\sin(2x)(9A - 8B) + \cos(2x)(8A + 9B) = \frac{29}{2}\sin(2x)$

Koeffizientenvergleich

sin: $9A - 8B = \frac{29}{2}$

cos: $8A + 9B = 0 \quad \curvearrowright \quad B = -\frac{8}{9}A$

$$9A - 8 \cdot \frac{-8}{9} A = \frac{29}{2}$$

$$9A + \frac{64}{9} A = \frac{29}{2}$$

$$\frac{81A}{9} + \frac{64}{9} A = \frac{29}{2}$$

$$\frac{145}{9} A = \frac{29}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{29 \cdot 9}{2 \cdot 145} = A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{9}{10}$$

$$B = \frac{-8A}{9} = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = \frac{9}{10} \sin(2x) - \frac{4}{5} \cos(2x)$$

$$y_{allg} = y_h + y_p = e^{-2x}\left[c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)\right] + \frac{9}{10} \sin(2x) - \frac{4}{5} \cos(2x)$$

4. Auswerten der Anfangsbed.

$$y(0) = \frac{6}{5} = 1 \cdot [1c_1 + 0] - \frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{5} = c_1 - \frac{4}{5} \quad \rightsquigarrow \quad c_1 = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = \underline{\underline{2}}$$

$$y'_{allg} = -2 e^{-2x}\left[c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)\right] + e^{-2x} \cdot \left[-3c_1 \sin(3x) + 3c_2 \cos(3x)\right] + \frac{18}{10} \cos(2x) + \frac{8}{5} \sin(2x)$$

$$y'_{allg}(0) = \frac{4}{5} = -2 \cdot [2] + 1 \cdot (3c_2) + \frac{18}{10}$$

$$\frac{4}{5} = -4 + 3c_2 + \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{4}{5} = -\frac{20}{5} + 3c_2 + \frac{9}{5} = \underline{\underline{-\frac{11}{5}}}$$

$$\frac{15}{5} = 3c_2 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{c_2 = 1}}$$

$$y_{spez.} = e^{-2x}\left[-\frac{11}{5} \cdot \cos(3x) + \sin(3x)\right] + \frac{9}{10} \sin(2x) - \frac{4}{5} \cos(2x)$$

 11.02.04

A 5 $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$

Anfangsbed. $y(0) = -\frac{2}{3}$

$y'(0) = 3$

1. homogene DgL

$y'' - 6y' + 8y = 0 \Leftrightarrow$ char. Gl. $k^2 - 6k + 8 = 0$

$k_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$

$k_{1/2} = 3 \pm 1$

$k_1 = 2$

$k_2 = 4$

$y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{4x}$

2. Störfunktion

$S(x) = e^x + e^{2x}$

$S_1 = e^x$

$S_2 = e^{2x}$ (Resonanz !) [Durch geeignete wahl der c_1 und c_2 kann $S(x)$ Lösung von y_h werden]

$S(x) = S_1 + S_2$

I Ansatz für S_1

$S_1 = e^x \Rightarrow y_p = A \cdot e^x$

$y_p' = Ae^x$

$y_p'' = A \cdot e^x$

einsetzen in DgL mit S_1

$A \cdot e^x - 6Ae^x + 8Ae^x = e^x$

$A - 6A + 8A = 1$

$A(1 - 6 + 8) = 1$

$A \cdot 3 = 1$

$A = \frac{1}{3} \Rightarrow y_{p_1} = \frac{1}{3} e^x$

II Ansatz für S_2 Fall 2 da e^{2x} Lösung der char. Gl. ist

$$y_p = x \cdot B \cdot e^{2x}$$
$$y_p' = Be^{2x} + x \cdot 2Be^{2x} = Be^{2x}(1+2x)$$
$$y_p'' = 2Be^{2x}(1+2x) + Be^{2x} \cdot 2$$
$$y_p'' = 2Be^{2x} + 4Bxe^{2x} + 2Be^{2x} = 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$$

Einsetzen in DGL mit S_2

$$4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} - 6(Be^{2x}(1+2x)) + 8xBe^{2x} = e^{2x}$$

$$4B + 4Bx - 6B - 12x + 8Bx = 1$$

Koeffizientenvergleich

$$x: \quad 4Bx - 12x + 8Bx = 0$$
$$-: \quad 4B - 6B = 1$$
$$-2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$y_{p_2} = -\frac{1}{2}xe^{2x} \qquad y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

3. Allgemeine Lösung

$$y_{allg} = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}xe^{2x}$$

4. Auswerten der Anfangsbed.

$$y_{allg}' = 2c_1e^{2x} + 4c_2e^{4x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x}$$

$$y'(0) = 2c_1 + 4c_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 3$$
$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{I} \quad 2c_1 + 4c_2 = \frac{19}{6}$$
$$\text{II} \quad c_1 + c_2 = -1 \quad | \cdot 2$$
$$2c_1 + 2c_2 = -2$$
$$-\left(2c_1 + 4c_2 = \frac{19}{6}\right)$$
$$-2c_2 = -\frac{31}{6} \longrightarrow \quad c_1 = -\frac{43}{12}, \quad c_2 = \frac{31}{12}$$

$$y_{spez} = -\frac{43}{12}e^{2x} + \frac{31}{12}e^{4x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{x}$$

12.03.03

A5

$$y'' - y' = e^{x} \cdot \sin x$$ Anfangsbed. $y(x=0) = \frac{9}{2}$

$y'(x=0) = 4$

1. Lösung der hom. DGL

$y'' - y' = 0$ (Therm qy nicht vorhanden!)

char. Gl: $k^2 - k = 0$

$$k_{1/2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 0} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$k_1 = 0$

$k_2 = +1$

$$y_h = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{0} = c_1 \cdot e^{x} + c_2$$

2. Berechnung y_p

Störfunktion $s(x) = e^{x} \cdot \sin x$ (keine Resonanz)

=> Ansatz aus Tabelle

$$y_p = e^{x}(A\sin x + B\cos x)$$

$$y_p' = e^{x}(A\sin x + B\cos x) + e^{x}(A\cos x - B\sin x)$$

$$y_p' = e^{x}(A\sin x + B\cos x + A\cos x - B\sin x)$$

$$y_p'' = e^{x}(A\sin x + B\cos x + A\cos x - B\sin x) + e^{x}(A\cos x - B\sin x - A\sin x - B\cos x)$$

$$y_p'' = e^{x}(\cancel{A\sin x} + \cancel{B\cos x} + A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x - \cancel{A\sin x} - \cancel{B\cos x})$$

$$y_p'' = e^{x}(2A\cos x - 2B\sin x)$$

3. einsetzen in Dgl

$$e^x(2A\cos x - 2B\sin x) - e(A\sin x + B\cos x + A\cos x - B\sin x) = e^x \sin x \qquad | : e^x \neq 0$$

$$2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x - B\cos x - A\cos x + B\sin x = \sin x$$

$$\cos x(2A - A - B) + \sin x(-A - B) = \sin x$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{ll} \sin x: & -A - B = 1 \\ \cos x: & A - B = 0 \\ \hline & -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$-A + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow -A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$y_p = e^x\left(-\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)$$

4 $\quad y_{alls} = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 + e^x\left(-\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)$

Auswerten der Anfangsbed.:

$$y'_{alls} = C_1 e^x + e^x\left(-\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) + e^x\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$y'_{alls}(0) = 4 = C_1 + \left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4 = C_1 - 1 \Rightarrow C_1 = 5$$

$$y_{alls}(0) = \frac{9}{2} = 5 \cdot e^0 + \left(0 - \frac{1}{2}\right) + C_2$$

$$\frac{9}{2} = 5 - \frac{1}{2} + C_2$$

$$\frac{10}{2} = 5 + C_2$$

$$C_2 = \frac{10}{2} - 5 = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$y_{spez.1} = 5 \cdot e^x + e^x\left(-\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)$$

 06.02.02

A5 $\quad y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(2x) \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

1. hom. Gl.

$y'' - 2y + 2y = 0$ $\qquad$ char. GL

$k^2 - 2k + 2 = 0$

$k_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1}$

$k_1 = 1 + j$

$k_2 = 1 - j$

$\Rightarrow y_h = e^x \left[C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x) \right]$

2. Partikuläre Lösung

Störfunktion $S(x) = e^x \cos(2x)$ $\qquad$ keine Resonanz

$\Rightarrow y_p = e^x \left[A \sin(2x) + B \cos(2x) \right]$

$y_p' = e^x \left[A \sin(2x) + B \cos(2x) \right] + e^x \left[2A \cos(2x) - 2B \sin(2x) \right]$

$y_p' = e^x \left[\sin(2x)(A - 2B) + \cos(2x)(2A + B) \right]$

$y_p'' = e^x \left[\sin(2x)(A-2B) + \cos(2x)(2A+B) \right] + e^x \left[2\cos(2x)(A-2B) - 2\sin(2x) \cdot (2A+B) \right]$

$y_p'' = e^x \left[\sin(2x)(A - 2B - 4A - 2B) + \cos(2x)(2A + B + 2A - 4B) \right]$

$y_p'' = e^x \left[\sin(2x)(-3A - 4B) + \cos(2x)(4A - 3B) \right]$

einsetzen in inhom. DGL.

$e^x \left[\sin(2x)(-3A - 4B) + \cos(2x)(4A - 3B) \right] - 2e^x \left[\sin(2x)(A - 2B) + \cos(2x)(2A + B) \right]$

$+ 2e^x \left[A \sin(2x) + B \cos(2x) \right] = e^x \cos(2x) \qquad | : e^x \neq 0$

$\sin(2x)(-3A - 4B) + \cos(2x)(4A - 3B) - 2\sin(2x)(A - 2B) - 2\cos(2x)(2A + B) + 2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) = \cos(2x)$

$\sin(2x)(-3A - 4B - 2A + 4B + 2A) + \cos(2x)(4A - 3B - 4A - 2B + 2B) = \cos(2x)$

$\sin(2x)(-3A) + \cos(2x)(-3B) = \cos(2x)$

$$-3A\sin(2x) - 3B\cos(2x) = \cos(2x)$$

Keff. Vergleich:

$\cos x: \quad -3B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{3}$

$\sin x: \quad -3A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$

$$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{3}e^x \cdot \cos(2x)$$

$$y_{allg} = y_h + y_p = e^x[c_1\cos(x) + c_2\sin(x)] - \frac{1}{3}e^x \cdot \cos(2x)$$

$$= e^x\left[c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(2x)\right]$$

$$y'_{allg} = y_{allg} + e^x\left[-c_1\sin(x) + c_2\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(2x)\right]$$

$y'_{allg}(\frac{\pi}{4}) = 0 \quad \Big| \quad y'_{allg} : e^x \neq 0$

$$y'_{allg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_1\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2} - c_1\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}$$

$$0 = 2c_2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} = c_2\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 = c_1\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2} = c_1\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} = c_1\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} = c_1\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{2}{3\sqrt{2}}$ $\quad \Big|$ y durch $e^x \neq 0$ geteilt um leichter zu rechnen

$$y_{spez} = e^x\left[\frac{2}{3\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{2}{3\sqrt{2}}\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(2x)\right]$$

2018.09.01

A5

$$y'' - 3y' = (2x+1)e^{3x} \qquad y(0)=3, \quad y'(0)=\frac{10}{9}$$

1. hom. Dgl

$$y'' - 3y' = 0 \qquad \text{char. Gl.} \qquad k^2 - 3k = 0$$

$$k(k-3) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 0, \quad k_2 = 3$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{3x} + C_2$$

2. partikulare Lösung

$$S(x) = e^{x}(2x+1) \quad \Rightarrow \text{Ansatz I, Fall II}$$

$$y_p = e^{3x}(Ax+B)x = e^{3x}(Ax^2+Bx)$$

$$y_p' = 3e^{3x}(Ax^2+Bx) + e^{3x}(2Ax+B) = e^{3x}(3Ax^2+3Bx+2Ax+B)$$

$$y_p'' = 3e^{3x}(3Ax^2+3Bx+2Ax+B) + e^{3x}(6Ax+2A+3B)$$
$$= e^{3x}(9Ax^2+9Bx+6Ax+3B+6Ax+2A+3B)$$

einsetzen in Dgl

$$e^{3x}(9Ax^2+9Bx+6Ax+3B+6Ax+2A+3B) - 3e^{3x}(3Ax^2+3Bx+2Ax+B) = (2x+1)e^{3x} \;\Big|\; : e^{3x}$$

$$\cancel{9Ax^2} + \cancel{9Bx} + \cancel{6Ax} + \cancel{3B} + 6Ax + 2A + 3B - \cancel{9Ax^2} - \cancel{9Bx} - \cancel{6Ax} - \cancel{3B} = 2x+1$$

$$6Ax + 2A + 3B = 2x + 1$$

koeff. vergl.

$$x: \quad 6A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$-: \quad 2A + 3B = 1$$
$$3B = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$B = \frac{1}{9}$$

$$y_p = e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{9}\right)$$

$$Y_{allg} = Y_h + Y_p = c_1 e^{3x} + c_2 + e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{9}\right) = c_2 + e^{3x}\left(c_1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{9}\right)$$

3. Auswerten der Anfangsbed.

$$Y'_{allg} = 3c_1 e^{3x} + 3e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{9}\right) + e^{3x}\left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

$$y'(0) = 3c_1 + 0 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$3c_1 = \frac{10}{9} - \frac{1}{9}$$

$$c_1 = \frac{1}{3}$$

$$y(0) = 3 = c_1 e^0 + c_2 + e^0(0)$$

$$3 = \frac{1}{3} + c_2$$

$$c_2 = \frac{9}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$Y_{spez} = \frac{8}{3} + e^{3x}\left(\frac{1}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{9}\right)$$

 13.03.01

A5 $\quad y'' - 4y' + 3y = e^{2x}\sin x$

1. homogene Dgl

$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad$ char. Gl. $\quad k^2 - 4k + 3 = 0$

$k_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

$k_1 = 1$

$k_2 = 3$

$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{3x}$

2 y_p - Bestimmen

$s(x) = e^{2x} \cdot \sin x \qquad$ (keine Resonanz)

Ansatz aus Tabelle

$y_p = e^{2x}(A\sin x + B\cos x)$

$y_p' = 2e^{2x}(A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(A\cos x - B\sin x) = e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x)$

$y_p'' = 2e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x) + e^{2x}(2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x - B\cos x)$

$y_p'' = e^{2x}(4A\sin x + 4B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x + 2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x - B\cos x)$

$y_p'' = e^{2x}(3A\sin x + 3B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x)$

einsetzen in Dgl.

$$e^{2x}(3A\sin x + 3B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x) - 4e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x) + 3e^{2x}(A\sin x + B\cos x) = e^{2x}\sin x$$

$3A\sin x + 3B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x - 8A\sin x - 8B\cos x - 4A\cos x + 4B\sin x + 3A\sin x + 3B\cos x = \sin x$

$\sin x(3A - \cancel{4B} - 8A + \cancel{4B} + 3A) + \cos x(3B + \cancel{4A} - 8B - \cancel{4A} + 3B) = \sin x$

$\sin x \cdot (-2A) + \cos x(-2B) = \sin x$

Koeffizientenvergleich

$\sin x: \quad -2A = 1 \quad \leadsto \quad A = -\frac{1}{2}$

$\cos x: \quad -2B = 0 \quad \leadsto \quad B = 0$

$$Y_p = -\frac{1}{2} e^{2x} \sin(x)$$

$$Y_{allg} = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \sin x$$

$$Y'_{allg} = c_1 e^{x} + 3 c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$$

Auswerten der Anfangbed.

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2$$
$$y'(0) = 0 = c_1 + 3c_2 - \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & c_1 + c_2 = 0 \\ \text{II} & c_1 + 3c_2 = \frac{1}{2} \\ \text{IIb} & -c_1 - 3c_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \quad -$$

$$-2c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}$$

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{4}$$

$$Y_{spez} = -\frac{1}{4} e^{x} + \frac{1}{4} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \sin x$$

 28.09.04

A6

$$y'' + 4y' + 16x + 8 = 0 \qquad y(0) = \frac{3}{4}$$
$$y'(0) = -2$$

$$y'' + 4y' = -16x - 8$$

1. homogene Dgl

$$y'' + 4y' = 0$$ (Problem qy fehlt!)

char. Gl. $k^2 + 4k = 0$

$k(k+4) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = -4$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{-4x} + C_2$$

2. partikuläre Lösung: $S(x) = -16x - 8$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$ (um $A_{n+1} x^{n+1}$ erweitert)

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

einsetzen in inh. Dgl.

$$2A + 4(2Ax + B) = -16x - 8$$
$$2A + 8Ax + 4B = -16x - 8$$

Koeffizientenvergleich

x: $8A = -16 \Rightarrow A = -\frac{16}{8} = -2$

x^0: $2A + 4B = -8$

$-4 + 4B = -8$

$4B = -4 \Rightarrow B = -1$

$$y_p = -2x^2 - x$$

$$y_{allg} = C_1 e^{-4x} + C_2 - 2x^2 - x$$

Auswerten der Anfangsbed

$y'_{allg} = -4C_1e^{-4x} - 4x - 1$

$y'_{allg}(0) = -2 = -4C_1 - 1$

$-1 = -4C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$

$y_{allg}(0) = \frac{3}{4} = C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 - 2\cdot 0^2 - 0$

$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + C_2$

$\frac{2}{4} = C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$

$y_{spez} = \frac{1}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} - 2x^2 - x$

24.09.02
45

$y'' + 2y' + y = 4\sin(2x) - 22\cos(2x)$

Anfangsbed. $y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0$

1. homogene Dgl

$y'' + 2y' + y = 0$ char. Gl. $k^2 + 2k + 1 = 0$

$k_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1}$

$k_1 = k_2 = -1$

$y_h = e^{-x}(C_1 + C_2 \cdot x)$

2. y_p - Berechnung

$S(x) = 4\sin(x2) - 22\cos(2x)$ keine Resonanz, Ansatz II aus Tabelle Fall I

$y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x)$

$y'_p = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$

$y''_p = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$

einsetzen in DGL

$$-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) + 4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + A\sin(2x) + B\cos(2x) = 4\sin(2x) - 22\cos(2x)$$

$$\sin(2x)(-4A - 4B + A) + \cos(2x)(-4B + 4 + B) = \sin(2x) - 22\cos(2x)$$

$$\sin(2x)(-3A - 4B) + \cos(2x)(4A - 3B) = 4\sin(2x) - 22\cos(2x)$$

Koeffizientenvergleich

$\sin(2x)$: $-3A - 4B = 4$

$\cos(2x)$: $4A - 3B = -22$

$$-3A = 4 + 4B$$

$$A = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}B$$

$$4\left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}B\right) - 3B = -22$$

$$-\frac{16}{3} - \frac{16}{3}B - \frac{9}{3}B = -\frac{66}{3}$$

$$-\frac{25}{3}B = -\frac{50}{3}$$

$$B = \frac{50\cdot 3}{25\cdot 3} = 2$$

$$4A - 3\cdot 2 = -22$$

$$4A = -22 + 6 = -16$$

$$A = -4$$

$$Y_{allg} = Y_h + Y_p = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + 2\sin(2x) - 4\cos(2x)$$

Auswerten der Anfangsbed.

$$Y'_{allg} = -e^{-x}(c_1 + c_2 x) + e^{-x} c_2 + 4\cos(2x) + 8\sin(2x)$$

$$Y''_{allg} = e^{-x}(c_1 + c_2 x) - e^{-x}\cdot c_2 - e^{-x} C_2 - 8\sin(2x) + 16\cos(2x)$$

$y'(0) = -c_1 + c_2 + 4 = 0$

$y''(0) = c_1 - c_2 - c_2 + 16 = 0$

$\text{I} \quad -c_1 + c_2 = -4 \qquad \curvearrowright c_1 = 4 + c_2$

$\text{II} \quad c_1 - 2c_2 = -16$

$4 + c_2 - 2c_2 = -16$

$-c_2 = -20$

$c_2 = 20$

$\text{I} \quad -c_1 + 20 = -4$

$-c_1 = -24$

$c_1 = 24$

$y_{spez.} = e^{-x}(24 + 20 \cdot x) + 2\sin(2x) - 4\cos(2x)$

23.09.03
AS

$y'' - 4y' + 4y = x^2$

1. hom. Dgl

$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad$ char. Gl. : $k^2 - 4k + 4 = 0$

$k_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$k_1 = k_2 = 2$

$y_h = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$

2. y_p

$s(t) = x^2 \qquad$ keine Resonanz, Ansatz aus Tabelle

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

einsetzen in Dgl

$2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$

$x^2(4A) + x(-8A + 4B) + 2A - 4B + 4C = x^2$

Koeffizientenvergleich

x^2: $\quad 4A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{4}$

x^1: $\quad -8A + 4B = 0$

$$-\frac{8}{4} + 4B = 0$$

$$4B = 2$$

$$B = \frac{1}{2}$$

x^0: $\quad 2A - 4B + 4C = 0$

$$\frac{2}{4} - \frac{4}{2} + 4C = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{2} + 4C = 0$$

$$4C = \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{3}{8}$$

$$y_p = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$y_{allg} = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$y'_{allg} = 2e^{2x}(c_1 + c_2 x) + e^{2x} c_2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$y(0) = \frac{11}{8} = c_1 + \frac{3}{8}$$

$$c_1 = \frac{11}{8} - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y'(0) = \frac{5}{2} = 2c_1 + c_2 + \frac{1}{2}$$

$$2 + c_2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$c_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = 0$$

$$y_{spez} = e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$