Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

5. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeiner Lösungsweg für $y'' + py' + qy = S(x)$

1.1 homogene Lösung

1. Charakteristische Gleichung lösen:

$$k^2 + pk + q = 0$$

$$k_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

2. Fallunterscheidung:

Fall 1	Fall 2	Fall 3
$k_1 \neq k_2$ $y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$k_1 = k_2$ $y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$	$k = a \pm \mathrm{j}b$ $y_h = e^{ax}\left[C_1 \sin(bx) + C_2 \cos(bx)\right]$
Beispiel	Beispiel	Beispiel
$y'' + 10y' - 24y = 0$ $k^2 + 10k - 24 = 0$ $k = -5 \pm \sqrt{25 + 24}$ $k_1 = -12; \quad k_2 = 2$	$y'' + 8y' + 16y = 0$ $k^2 + 8k + 16 = 0$ $k = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$ $k_1 = k_2 = 4$	$y'' + 4y' + 13y = 0$ $k^2 + 4k + 13 = 0$ $k = -2 \pm \sqrt{4 - 13}$ $k = -2 \pm 3\mathrm{j}$
$y_h = C_1 e^{-12x} + C_2 e^{2x}$	$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$	$y_h = e^{-2x}\left[C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)\right]$

1.2 partikuläre Lösung

1. Lösungsansatz für y_p (mit den Tabellen) aufstellen.
2. y_p, y_p' und y_p'' in $y'' + py' + qy = S(x)$ einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen.

Störfunktion $S(x)$	Lösungsansatz für y_p
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0$ für $q \neq 0$
	$x(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0)$ für $q = 0,\ q \neq 0$
	$x^2(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0)$ für $p = q = 0$
$k\sin(\alpha x)$ oder $k\cos(\alpha x)$	$K_1 \sin(\alpha x) + K_2 \cos(\alpha x)$
$k\sinh(\alpha x)$ oder $k\cosh(\alpha x)$	$K_1 \sinh(\alpha x) + K_2 \cosh(\alpha x)$
$ke^{\beta x}$	$Ke^{\beta x}$
$ke^{\beta x}\sin(\alpha x)$ oder $ke^{\beta x}\cos(\alpha x)$	$e^{\beta x}(K_1 \sin(\alpha x) + K_2 \cos(\alpha x))$

Diese Ansätze dürfen nur dann benutzt werden, wenn die Störfunktion $S(x)$ keine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. $S(x)$ darf sich also nicht durch geeignete Wahl der Konstanten aus y_h bilden lassen. Ist $S(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialglgeichung oder komplizierter aufgebaut, so benutze man einen der drei folgenden Ansätze.

Störfunktion $S(x)$	Lösungsansatz für y_p
$S(x) = P_n(x)e^{\beta x}$	$\beta \neq k_1 \wedge k_2$ $y_p = A_n(x)e^{\beta x}$
	$\beta = k_1 \vee k_2$ $y_p = x \cdot A_n(x)e^{\beta x}$
	$\beta = k_1 = k_2$ $y_p = x^2 A_n(x)e^{\beta x}$
$S(x) = P_n(x)\sin(\alpha x) + Q(x)\cos(\alpha x)$	$\pm \mathrm{j}\alpha \neq k$ $y_p = A_n(x)\sin(\alpha x) + B_n(x)\cos(\alpha x)$
	$\pm \mathrm{j}\alpha = k$ $y_p = x(A_n(x)\sin(\alpha x) + B_n(x)\cos(\alpha x))$
$S(x) = e^{\beta x}[P_n(x)\sin(\alpha x) + Q(x)\cos(\alpha x)]$	$\beta + \mathrm{j}\alpha \neq k$ $y_p = e^{\beta x}(A_n(x)\sin(\alpha x) + B_n(x)\cos(\alpha x))$
	$\beta + \mathrm{j}\alpha = k$ $y_p = xe^{\beta x}(A_n(x)\sin(\alpha x) + B_n(x)\cos(\alpha x))$

$P_n(x)$, $Q_n(x)$: Polynome vom Grade n

$A_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0$

$B_n(x) = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + ... + B_1 x + B_0$

1.3 allgemeine Lösung

1. Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$
2. Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung einsetzen und Paramter bestimmen

2 Beispiele

2.1 $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(2x)$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} y\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ y'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} k^2 - 2k + 2 &= 0 \\ k &= 1 \pm \mathrm{j} \end{aligned}$$

homogene Lösung:

$$y_h = e^x \left[C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)\right]$$

partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_p &= e^x \left(K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x)\right) \\ y_p' &= e^x \left(K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x)\right) + e^x \left(2K_1 \cos(2x) - 2K_2 \sin(2x)\right) \\ &= e^x \left(K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x) + 2K_1 \cos(2x) - 2K_2 \sin(2x)\right) \\ y_p'' &= e^x \left(K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x) + 2K_1 \cos(2x) - 2K_2 \sin(2x)\right) \\ &+ e^x \left(2K_1 \cos(2x) - 2K_2 \sin(2x) - 4K_1 \sin(2x) - 4K_2 \cos(2x)\right) \\ &= e^x \left(-3K_1 \sin(2x) - 3K_2 \cos(2x) + 4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \sin(2x)\right) \end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} & e^x \left(-3K_1 \sin(2x) - 3K_2 \cos(2x) + 4K_1 \cos(2x) - 4K_2 \sin(2x)\right) \\ -2 \ & e^x \left(K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x) + 2K_1 \cos(2x) - 2K_2 \sin(2x)\right) \\ +2 \ & e^x \left(K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x)\right) = e^x \cos(2x) \\ \Rightarrow \ & -3K_1 \sin(2x) - 3K_2 \cos(2x) = \cos(2x) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} -3K_1 \sin(2x) &= 0 \\ K_1 &= 0 \\ -3K_2 \cos(2x) &= \cos(2x) \\ K_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p &= e^x \left(K_1 \sin(2x) + K_2 \cos(2x)\right) \\ &= -\frac{1}{3} e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= e^x \left(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)\right) - \frac{1}{3} e^x \cos(2x) \\ &= e^x \left(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(2x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= e^x \left(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(2x)\right) + e^x \left(C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x) + \frac{2}{3} \sin(2x)\right) \\ &= e^x \left(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(2x) + C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x) + \frac{2}{3} \sin(2x)\right) \end{aligned}$$

Anfangsbedingung $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ in y' einsetzen:

$$\begin{aligned}
y'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= 0 \\
e^{\frac{\pi}{4}}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) + C_1 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - C_2 \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3}\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right) &= 0 \\
1,55C_1 + 1,55C_2 + 1,55C_1 - 1,55C_2 + 1,46 &= 0 \\
C_1 &= -0,47
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ in y einsetzen:

$$\begin{aligned}
y\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= 0 \\
e^{\frac{\pi}{4}}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right) &= 0 \\
1,55C_1 + 1,55C_2 &= 0 \\
C_2 &= -1,55C_1 \\
C_2 &= 0,47
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$y = e^x\left(-0,47\sin(x) + 0,47\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(2x)\right)$$

2.2 $y'' - 3y' = (2x+1)\,e^{3x}$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 3 \\
y'(0) &= \tfrac{10}{9}
\end{aligned}$$

charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
k^2 - 3k &= 0 \\
k(k-3) &= 0 \\
k_1 &= 0 \\
k_2 &= 3
\end{aligned}$$

homogene Lösung:

$$\begin{aligned}
y_h &= C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{3\cdot x} \\
&= C_1 + C_2 e^{3x}
\end{aligned}$$

partikuläre Lösung:s

$$\begin{aligned}
y_p &= x\left(A_1 x + A_0\right) e^{3x} \\
&= \left(A_1 x^2 + A_0 x\right) e^{3x} \\
y_p' &= \left(2A_1 x + A_0\right) e^{3x} + \left(A_1 x^2 + A_0 x\right) 3e^{3x} \\
&= \left(2A_1 x + A_0 + 3A_1 x^2 + 3A_0 x\right) e^{3x} \\
y_p'' &= \left(2A_1 + 6A_1 x + 3A_0\right) e^{3x} \\
&+ \left(2A_1 x + A_0 + 3A_1 x^2 + 3A_0 x\right) 3e^{3x} \\
&= \left(9A_1 x^2 + 12A_1 x + 9A_0 x + 2A_1 + 6A_0\right) e^{3x}
\end{aligned}$$

in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned}
\left(9A_1x^2+12A_1x+9A_0x+2A_1+6A_0\right)e^{3x}-3\left(2A_1x+A_0+3A_1x^2+3A_0x\right)e^{3x} &= (2x+1)\,e^{3x}\\
9A_1x^2+12A_1x+9A_0x+2A_1+6A_0-6A_1x-3A_0-9A_1x^2-9A_0x &= 2x+1\\
6A_1x+2A_1+3A_0 &= 2x+1\\
\Rightarrow A_1 &= \tfrac{1}{3}\\
\Rightarrow A_0 &= \tfrac{1}{9}
\end{aligned}$$

$$y_p = \left(\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{9}x\right)e^{3x}$$

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p\\
&= C_1 + C_2e^{3x} + \left(\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{9}x\right)e^{3x}\\
&= C_1 + \left(C_2+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{9}x\right)e^{3x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{9}\right)e^{3x}+3\left(C_2+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{9}x\right)e^{3x}\\
&= \left(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{9}+3C_2+x^2+\tfrac{1}{3}x\right)e^{3x}\\
&\left(x^2+x+\tfrac{1}{9}+3C_2\right)e^{3x}
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung $y'(0)=\frac{10}{9}$ in y' einsetzen:

$$\begin{aligned}
\left(0+0+\tfrac{1}{9}+3C_2\right)e^{3\cdot 0} &= \tfrac{10}{9}\\
\tfrac{1}{9}+3C_2 &= \tfrac{10}{9}\\
9+27C_2 &= 10\\
C_2 &= \tfrac{1}{27}
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung $y'(0)=3$ in y einsetzen:

$$\begin{aligned}
C_1+(C_2+0+0)\,e^{3\cdot 0} &= 3\\
C_1+C_2 &= 3\\
C_1 &= 3-C_2\\
C_1 &= 3-\tfrac{1}{27}\\
C_1 &= \tfrac{80}{27}
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$y = \tfrac{80}{27}+\left(\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{9}x\right)e^{3x}$$