1 Physikalische Größen und Einheiten

Bezeichung	Einheit	Bezeichung	Einheit
Länge	m	Impuls	$\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}$
Zeit	s	Kraft	$\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$
Geschwindigkeit	$\frac{\mathrm{m}}{s}$	Arbeit, Energie	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$
Beschleunigung	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	Leistung	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^3} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$
Frequenz	$\frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$	Drehmoment	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{Nm}$
Winkel	rad	Trägheitsmoment	$\mathrm{kgm}^2 = \mathrm{Nms}^2$
Winkelgeschwindigkeit	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$	Drehimpuls	$\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}} = \mathrm{Nms}$
Winkelbeschleunigung	$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$	Temperatur	K
Masse	kg	el. Stromstärke	A
Dichte	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	Lichtstärke	cd

2 Kinematik

Translationsbewegung	**Rotationsbewegung**
Ort	Winkel
$\vec{r}(t) = \iint \vec{a}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t + \vec{r}_0$	$\vec{\varphi}(t) = \iint \vec{\alpha}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t + \vec{\varphi}_0$
$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) + \vec{r}_0$	$\vec{\varphi}(t) = \int \vec{\omega}(t) + \vec{\varphi}_0$
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\mathrm{d}t + \vec{v}_0$	$\vec{\omega}(t) = \int \alpha(t)\mathrm{d}t + \vec{\omega}_0$
$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\varphi}}$
$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}$	$\overline{\vec{\omega}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\vec{\varphi}(t_2)-\vec{\varphi}(t_1)}{t_2-t_1}$
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{\varphi}}$
$\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)}{t_2-t_1}$	$\overline{\vec{\alpha}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}(t_2)-\vec{\omega}(t_1)}{t_2-t_1}$
für $\vec{v} = \mathrm{const}$ gilt:	für $\vec{\omega} = \mathrm{const}$ gilt:
$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$	$\vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0 t + \vec{\varphi}_0$
für $\vec{a} = \mathrm{const}$ gilt:	für $\vec{\alpha} = \mathrm{const}$ gilt:
$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$	$\vec{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 + \vec{\omega}_0 t + \vec{\varphi}_0$
$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0$	$\vec{\omega}(t) = \vec{\alpha}t + \vec{\omega}_0$
$\Delta r = r - r_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$	$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$
$\Delta r = \overline{\vec{v}}t = \frac{1}{2}\left(v + v_0\right)t$	$\Delta\varphi = \overline{\vec{\omega}}t = \frac{1}{2}\left(\omega + \omega_0\right)t$
$v^2 = 2a\Delta r + v_0^2$	$\omega^2 = 2\alpha\Delta\varphi + \omega_0^2$

Tangentialgeschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Tangentialbeschleunigung: $\vec{a}_\mathrm{t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

Zentripetalbeschleunigung: $\vec{a}_\mathrm{z} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Gesamtbeschleunigung: $\vec{a} = \vec{a}_\mathrm{z} + \vec{a}_\mathrm{t} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}$

3 Dynamik

3.1 Newtonsche Axiome

1. $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \Rightarrow v = \text{const}$
2. $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ $\qquad m = \text{const} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$
3. $actio = reactio$
   $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

3.2 Kräfte

Gewichtskraft	$\vec{F}_\mathrm{g} = m\vec{g}$	
Federkraft	$\vec{F} = -D\vec{x}$	D = Federkonstante
Normalkraft	$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{g} \cos \sphericalangle (F_\mathrm{g},\ F_\mathrm{n})$	
Hangabtriebskraft	$F_\mathrm{h} = F_\mathrm{g} \sin \sphericalangle (F_\mathrm{g},\ F_\mathrm{h})$	
Auftriebskraft	$\vec{F}_\mathrm{A} = -m_\mathrm{Fl}\vec{g} = \rho_\mathrm{Fl} V \vec{g}$	$\varrho_\mathrm{Fl} V$ = Masse der verdängten Flüssigkeit
Kräfte bei Rotation		
Zentripetalkraft	$\vec{F}_\mathrm{z} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$	
Tangentialkraft	$\vec{F}_\mathrm{t} = m\vec{\alpha} \times \vec{r}$	
Reibungskräfte		
Haftreibungskraft	$F_\mathrm{H} = \mu_\mathrm{H} F_\mathrm{n}$	μ_H = Haftreibungszahl
Gleitreibungskraft	$F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{G} F_\mathrm{n}$	μ_G = Gleitreibungszahl
Rollreibungskraft	$F_\mathrm{r} = \mu_\mathrm{r} F_\mathrm{n}$	μ_r = Rollreibungszahl
Scheinkräfte		
Trägheitskraft:	$\vec{F}_\mathrm{tr} = -m\vec{a}$	
Zentrifugalkraft:	$\vec{F}_\mathrm{zf} = -\vec{F}_\mathrm{z} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$	
Corioliskraft:	$\vec{F}_\mathrm{c} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$	

3.3 Erhaltungssätze

Impulserhaltungssatz: $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \text{const}$

Drehimpulserhaltungssatz: $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{const}$

3.4 Gleichgewichtsbedingungen

Ein Körper ist in Ruhe, wenn die Summen aller Kräfte und aller Drehmomente gleich null sind:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \vec{0}$$

4 Arbeit, Leistung und Energie

4.1 Arbeit als Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F r \cos \sphericalangle \left(\vec{F}, \vec{r}\right)$$

4.2 Arbeit als Integral

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r}$$

4.3 Leistung

Mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Momentane Leistung: $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

4.4 Energie

Kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$

Rotationsenergie: $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Potentielle Energie: $E_{\text{pot}} = \int \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\vec{r} + C$

Potentielle Energie im Erdfeld: $E_{\text{pot}} = mgh$

Verschiebearbeit ΔW: $W = E_{\text{pot}}(\vec{r}_1) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_2)$

Für abgeschlossene Systeme mit nur konservativen Kräften gilt: $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const}$

Für abgeschlossene Systeme mit nicht konservativen Kräften gilt: $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{r}} = \text{const}$

E_{r} = Energieterm, der Reibungskräfte etc. berücksichtigt.

5 Teilchensysteme

5.1 Massenmittelpunkt

$m\vec{r}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$ $\quad m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ = Gesamtmasse $\quad m\vec{r}_s = \int \vec{r}\,\mathrm{d}m$ $\quad \vec{r}_s$ = Massenmittelpunkt

5.2 Eigenschaften des Schwerpunkts

Bei Abwesenheit äußerer Kräfte beschreibt der Massenmittelpunkt eine geradlinige Bahn. Unter dem Einfluß einer äußeren Kraft $\vec{F}_{\text{ext}}$ bewegt sich der Massenmittelpunkt wie ein Teilchen mit konstanter Masse m gemäß:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_s) \qquad \vec{v}_s = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{\mathrm{d}t} \text{ = Schwerpunktgeschwindigkeit}$$

Im Schwerpunktsystem ist der Gesamtimpuls null.

5.3 Energie von Teilchensystemen

Kinetische Energie: $E_{\text{k}} = E_{\text{k, int}} + \frac{1}{2}m\vec{v}_s^2$

$E_{\text{k,int}}$ = kinetische Energie im Schwerpunktsystem.

Potentielle Energie: $E_{\text{p}} = E_{\text{p, int}} + E_{\text{p, ext}}$

$E_{\text{p,int}}$ = potentielle Energie aufgrund innerer konservativer Kräfte.

$E_{\text{p,ext}}$ = potentielle Energie aufgrund äußerer konservativer Kräfte.

Gesamtenergie für konservative Kräfte: $E = E_{\text{p}} + E_{\text{k}} = U_{\text{int}} + E_{\text{p, ext}} + \frac{1}{2}m\vec{v}_s^2$

$U_{\text{int}} = E_{\text{p,int}} + E_{\text{k,int}}$ = innere Energie des Systems

5.4 Drehimpuls von Teilchensystemen

$\vec{L} = \vec{L}_{\text{int}} + \vec{L}_{\text{ext}}$ $\quad \vec{L}_{\text{int}}$ = Drehimpuls des Schwerpunktsystems = Spin

$\vec{L}_{\text{ext}} = \vec{r}_s \times \vec{p} = \vec{r}_s \times m\vec{v}_s$ = Bahndrehimpuls

6 Starre Körper

6.1 Translations- und Rotationsbewegung

Translation		**Rotation**	
Ort	$\vec{r}(t)$	Winkel	$\vec{\varphi}(t)$
Geschwindigkeit	$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t^2}$
Masse	$m = \int \varrho\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}V$	Trägheitsmoment	$I = \int r^2 \mathrm{d}m$
Wenn $\varrho\left(\vec{r}\right) = \text{const}$	$m = \varrho V$	Wenn $r = \text{const}$	$I = \frac{1}{2} m r^2$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Kraft	$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$	Drehmoment	$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$
Wenn $m = \text{const}$	$\vec{F} = m\vec{a}$	Wenn $I = \text{const}$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
Arbeit	$W = \int \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$	Arbeit	$W = \int \vec{M} \mathrm{d}\vec{\varphi}$
Wenn $\vec{F} = \text{const}$	$W = Fr\cos\sphericalangle(\vec{F}, \vec{r})$	Wenn $\vec{M} = \text{const}$	$W = M\varphi$
Leistung	$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}$	Leistung	$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\vec{\omega}$
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2$	Rotationsenergie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\vec{\omega}^2$

Rotationsvektoren		**Betrag**
Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$
Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha}$	$\alpha = \frac{a_t}{r}$
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$M = \left\lvert \vec{r} \times \vec{F} \right\rvert = rF\sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{F}) = rma_t = m\alpha r^2$
Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$L = \lvert\vec{r} \times \vec{p}\rvert = rp\sin\sphericalangle\left(\vec{r}, \vec{p}\right) = rmv = m\omega r^2$
Tangentialvektoren		
Tangentialkraft	$\vec{F}_t$	$F_t = F\sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{F}) = ma_t = m\alpha r$
Tangentialimpuls	$\vec{p}_t$	$p_t = p\sin\sphericalangle\left(\vec{r}, \vec{p}\right) = mv = m\omega r$
Tangentialgeschwindigkeit	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$v = \lvert\vec{\omega} \times \vec{r}\rvert = \omega r$
Tangentialbeschleunigung	$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times r$	$a_t = \lvert\vec{\alpha} \times r\rvert = \alpha r$
Zentripetalvektoren		
Zentripetalbeschleunigung	$\vec{a}_z = \vec{\omega} \times \vec{v}$	$a_z = \lvert\vec{\omega} \times \vec{v}\rvert = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$
Zentripetalkraft	$\vec{F}_z$	$F_z = m \cdot a_z = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$

6.2 Drehimpuls und Trägheitsmoment des starren Körpers

Bei Rotationsbewegungen um die Hauptträgheitsachse gilt: $\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad I = \int r^2 \mathrm{d}m$
Für beliebige Rotation gilt: $\vec{L}_\omega = I\vec{\omega}$
L_ω = Komponente des Drehimpulses in Richtung der Drehachse

Steinerscher Satz:

Für das Trägheitsmoment bezüglich einer zur Schwerpunktachse parallelen Achse im Abstand s gilt: $I = I_s + ms^2$. I_s = Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktachse.

6.3 Energie der Rotationsbewegung starrer Körper

$$E_k = E_{k,\text{int}} + \frac{1}{2}m\vec{v}_s^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \mathrm{d}m + \frac{1}{2}m\vec{v}_s^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_s^2$$

$E_{k,\text{int}}$ = kinetische Energie im Schwerpunktsystem. $\vec{v}_s$ = Schwerpunktgeschwindigkeit

6.4 Kreisel und Präzession

$\vec{M} = \vec{\omega}_\text{p} \times \vec{L} \qquad \vec{L}' = \vec{L} + \Delta\vec{L} \qquad \vec{\omega}_\text{p}$ = Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung.

7 Schwingungen

7.1 Ungedämpfte Schwingungen

Differentialgleichung der ungedämpften Schwingung: $m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2} + Dx = 0$
Lösungen der Differentialgleichung: $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t) + y_0 \cos(\omega_0 t)$
$\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{D}{m}}$ = Eigen-Kreisfrequenz $\qquad x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

7.2 Gedämpfte Schwingungen

Differantialgleichung der gedämpften Schwingung: $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + r\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Dx = 0$

Lösungen der Differentialgleichung:

1. Wenn $\delta < \omega_0 \Rightarrow$ Schwingfall: $x(t) = x_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t) + y_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t)$
2. Wenn $\delta > \omega_0 \Rightarrow$ Kriechfall: $x(t) = x_0 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - w_0^2})t} + y_0 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - w_0^2})t}$
3. Wenn $\delta = \omega_0 \Rightarrow$ Aperiodischer Grenzfall: $x(t) = x_0 e^{-\delta t} + y_0 t e^{-\delta t}$

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\dfrac{D}{m} - \delta^2}$

Abklingkonstante: $\delta = \dfrac{r}{2m}$ r = Dämpfungskonstante

Energie der ungedämpften Schwingung: $E = \frac{1}{2}Da^2$

Energie der gedämpften Schwingung (Schwingfall): $E = \frac{1}{2}D(ae^{-\delta t})^2 = \frac{1}{2}Da^2e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}$

E_0 ist die Gesamtenergie zum Zeitpunkt $t = 0$.

7.3 Erzwungene Schwingungen

Differentialgleichung der erzwungen Schwingung: $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Dx = F_0\sin(\omega t)$

Lösung der Differentialgleichung: $x(t) = x_0\sin(\omega t + \varphi)$

Amplitude der erzwungenen Schwingung: $x_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$

Phasendifferenz zwischen Auslenkung und Anregung: $\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$

Resonanzfrequenz bei maximaler Resonanzamplitude: $\omega_\mathrm{r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

Resonanzamplitude: $x_{0,\mathrm{r}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

7.4 Überlagerung harmonischer Schwingungen

Zerlegung periodischer Schwingungen in harmonische Schwingungen mit Fourier-Reihe:

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin(n\omega_1 t) + b_n\cos(n\omega_1 t))$$

$$x_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\mathrm{d}t \qquad a_n = \frac{\omega_1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{\omega_1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

ω_1 = Grundfrequenz der anharmonischen Schwingung

Für nichtperiodische Vorgänge gilt: $x(t) = \displaystyle\int_0^{\infty}(a(\omega)\sin(\omega t) + b(\omega)\cos(\omega t))\mathrm{d}\omega$

Die Funktionen $a(\omega)$ und $b(\omega)$ bilden das Fourier-Spektrum. (Gleichung gilt fast überall)

Inhaltsverzeichnis