# Mathematatik

## - Analysis -

Dragan Milenkovic

# Inhaltsverzeichnis

# Der binomische Satz

$(a+b)^n$ *a + b heißt Binom !!!*

$(a+b)^1 \quad = \quad a + b$

$$(a+b)^2 \quad = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 \quad = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 \quad = 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$
$$(a+b)^n \quad = a^n+k\,a^{n-1}b^1+ka^{n-2}b^2.....+b^n$$

Pascal'sche Dreieck

| | |
|---|---|
| *n = 0* | 1 |
| *n = 1* | 1 1 |
| *n = 2* | 1 2 1 |
| *n = 3* | 1 3 3 1 |
| *n = 4* | 1 4 6 4 1 |
| *n = 5* | 1 5 10 10 5 1 |

*rekursive Formel*

*Def 2 :*

*gegeben seien : n, i* $\in$ *N*

$\boxed{\text{n über i}}$

$$\binom{n}{i} \ := \ \frac{n(n-1)(n-2)....(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,cdot.....\,i}$$

$\Rightarrow$ *heißen Binominalkoeffizienten (Eulersche)*

*Def 3 :* $n\,! \ := \ 1\cdot 2 \ ....n \qquad n \in N$ *( Fakultät )*

*Bsp. 1) :*

$$1!=1$$
$$2!=1\cdot2=2$$
$$3!=1\cdot2\cdot3=6$$
$$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$$
$$5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$$

*Satz 1 :*

1. $\binom{n}{i}=n\frac{!}{i!(n-i)!}$ *Fakultätsdarstellung*

2. $\binom{n}{i}=(n-i)$ *Symmetriegesetz*

3. $\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1}=\binom{n+1}{i+1}$ *Additionsgesetz*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Bsp.* | *n= 5* | *1* | *5* | *10* | *10* | *5* | *1* |
| | | *i = 0* | *i = 1* | *i= 2* | *i= 3* | *i= 4* | *i = 5* |

*Beweis Satz 1*

1) $\binom{n}{i}=n(n-1)(n-2).....\frac{(n-i+1)}{1\cdot2\cdot3.......\cdot i} \quad \cdot \quad \frac{(n-i)(n-i-1)\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-i-1)\cdot3\cdot2\cdot1}$

$$=\frac{n!}{i!(n-1)!}$$

2.) $l.S=\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\cdot(n-1)!}$ *nach Regel* 1

$$R.S=\binom{n}{n-i}=\frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} = \frac{n!}{(n-i)!\cdot i!} = L.S$$

3.) $\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1}=\frac{n!}{i!(n-i)!}+\frac{n!}{(i+1)!(n-(i+1))!}$

$$=\frac{n!(i+1)}{(i+1)!(n-i)!}+\frac{n!(n-i)}{(i+1)!\underbrace{(n-i-1)!\cdot(n-i)}_{(n-i)!}}$$

$$=\frac{n!(i+1)+n!(n-i)}{(i+1)!(n-i)!}$$

$$=\frac{n!(i+1+n-i)}{(i+1)!(n+1-(i+1))!}$$

$$=\frac{n!(n+1)}{(i+1)!(n+1-(i+1))!}$$

$$=\frac{(n+i)!}{(i+1)!(n+1-(i+1))!}$$

$$=\frac{(n+i)!}{(i+1)!} \qquad \textit{nach Regel } 1$$

Der Binomische Satz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2+....+\binom{n}{n-1}\cdot a^1 b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0 b^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i$$

*Folgerungen:*

*Es gilt*

(1) $(a+(-b))^n$

$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1+\binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2+...+\binom{n}{n-1}a\cdot(-b)^{n-1}+\binom{n}{n}(-b)^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-1}(-b)^i$$

(2) $(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+...+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+x^n$

(3) *Ist* $|x|$ *sehr klein, so ist wegen* (2) *abgeschätzt:* $(1+x)^n\approx 1+\binom{n}{1}x=1+nx$

*Beispiel:*

$(1)\quad \textit{Näherung zu}\,(1{,}0157)^4$

$1{,}0157^4=(1+0{,}0157)^4 \approx 1+4\cdot 0{,}0157=1{,}0628$

$\textit{Abschätzen des Fehlers durch den Term}\binom{n}{2}x^2$

$$\Leftrightarrow \binom{4}{2}0{,}0157^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0{,}0157^2$$
$$=6\cdot 0{,}0157^2=0{,}00147894$$

$\textit{TR sagt}: 1.0157^4=1{,}0642943$

$$(2)\quad \binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7}{1\cdot \cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{4}}=\frac{630}{3}=210$$

$$\binom{8}{0}=1\ \textit{gemäß Def. 2}$$

$$\binom{8}{8}=\frac{\cancel{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}}=1$$

$$\binom{4}{\sqrt{2}}=\textit{NICHT DEFINIERT}, \textit{da}\quad n, i\ \in N$$

*( 3 )*

*Gesucht ist der vorletzte Summand der Entwicklung* $(2a+3b)^5$

$d.h.: n=5 \qquad i=4 \quad (\textit{vorletzte!})$

$$d.h.: \binom{n}{i}2a^{n-i}3b^i=\binom{5}{4}(2a)^1(3b)^4=\frac{5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}=5\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ab^4$$
$$=810\,ab^4$$

# Reelle Funktionen

## Begriffe, Darstellungen

Def 0 :

Gegeben seien zwei Mengen D und B. Ordnet man den $\in$ von D irgendwelche $\in$ von B zu, so definiert man dadurch eine „ Relation ." D heißt „ Definitionsmenge " und B „ Bildmenge."

Def 1 :

Gegeben zwei Mengen D und B sowie eine Teilmenge R des Kartesischen Produkts $D \times B$ : $R < D \times B$. Für ein Element ( x, y ) dieser Teilmenge $(x,y) \in R$ schreibt man auch xRy und sagt :

„ x und y stehen in der Relation R".

Man erhält :

$$R=\{(x,y)|x\in D, y\in B\wedge xRy\}$$

Bsp. :

D = { 1,2,3,4 }  B = { 2,4,6 }

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Rightarrow$ $D\times B$ | = { | ***1,2*** | ***1,4*** | ***1,6*** |
| | | 2,2 | 2,4 | 2,6 |
| | | 3,2 | 3,4 | 3,6 |
| | | 4,2 | 4,4 | 4,6 } |

Die Relation sei definiert durch xRy mit der Bedingung :

$x < y$ , $x\in D$ , $y\in B$

$\Rightarrow$ R = { ( 1,2 ),( 1,4 ), ( 1,6 ), ( 2,4 ), (2,6 ), ( 3,4 ), ( 3,6 ),( 4,6 ) }

Bemerkung :

wegen ( 1,2 ), ( 1,4 ), ( 1,6 ) in R ist R keine Funktion

$$f=\{(x,y)x\in D\wedge y\in B\wedge y\in f(x)\}$$

Bsp. :

( 1 ) Es sei folgende Relation gegeben :

$R := (x, y) | x \in R, y \in R \wedge x^2 + y^2 = 4$

$P_1(1, \sqrt{3})$ *erfüllt* $\quad x^2 + y^2 = 4$

$P_2(1, -\sqrt{3})$ *erfüllt* $\quad x^2 + y^2 = 4$

Also ist R keine Funktion .

Man erhält durch auftrennen zwei Funktionen :

$R_1 = \{(x, y) | x \in R, y \in R \wedge y = \sqrt{4 - x^2}\}$

$R_2 = \{(x, y) | x \in R, y \in R \wedge y = -\sqrt{4 - x^2}\}$

*bzw.* $y_1 = f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$y_2 = f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

Bsp :

Gesucht ist der größtmögliche Definitionsbereich :

| | |
|---|---|
| ***a)*** $y = x^2 - 5x + 3$ | ***D = R*** |
| b) $y = \sqrt{x - 2}$ | $D = \{x \in R \| x \geqslant 2\}$ |
| c) $y = l_n(x)$ | $D = \{x \in R \| x > 0\}$ |
| d) $y = \frac{1}{x}$ | D = R \ { 0 } |
| e) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ | D = R \ { 1,2 } |

Bsp. :

(1) 2x + 5y = 11

a ) explizite Form : $y = \frac{11}{5} - \frac{2x}{5}$

b ) implizierte Form : 2x – 5y – 11 = 0

c ) Parameter Form : -----

(2)

Man betrachte $F_1(x,y)=y^2-x=0$

Es liegt eine Relation vor, da $F_1(1,1)=0\, und\, F_1(1,-1)=0$.

Damit gibt es zu x = 1 kein eindeutiges y .

$F_1(x,y)$ definiert keine Funktion !

Auflösen von $F_1(x,y)$ nach y ist nicht möglich.

$$y^2=x \Rightarrow |y|=\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}&1.\,Fall\; y>0: \quad y=\sqrt{x}\\ &2.\,Fall\; y<0: -y=\sqrt{x}\\ &\qquad\qquad\quad\; y=-\sqrt{x}\end{aligned}$$

$y=x^2$ *ist nicht surjektiv auf* $R$ *aber auf* $R'$

Bsp. :

(3) $F_2(x,y)=x-y-\sin y=0 \qquad , x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

implizierte Form

- Auflösung nach x möglich !

1.) x = y + sin(y)

2.) Berechnung von Urbildern x anhand von Bildern y.

$[z.B.\; y=0 \Rightarrow x=0+\sin y=0]$

⇒ Ermittlung des Graphen x = x ( y)

Anhand des Graphen sieht man erst , das eine Funktion vorliegt !

(4)

$$F^3(x,y)= \underbrace{\underbrace{x^2+y^2}_{immer \geqslant 0\,!} \;+1}_{immer \geqslant 1 \quad d.h. \neq 0} \;=0$$

diese Gleichung hat keine Lösung !

⇒ Es wird eine „ Leere „ Relation“ definiert. → $D=\emptyset$

(5)Gegeben seien : x ( t ) = 2 cos ( t ) $t \in [0, 2\pi]$

y ( t ) = 2 sin ( t ) [0, 360° ]

1.Weg : ( trickreich )

$$\textit{Quadrieren}: x^2(t) = 4\cos^2(t)$$
$$y^2(t) = 4\sin^2(t)$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{\textit{immer} = 1 \textit{ egal was } t \textit{ ist!}}$$

*d.h.:* $x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow$ *es liegt eine Relation vor.*

(*Kreis um* (0,0) *mit Radius* 2)

2.Weg:

1.) $x(t) = 2\cos t \qquad \cos t = \frac{x}{2}$

2.) *einsetzen von* $*$ in *die* 2. *Gleichung der Parameterform.*

$$y = 2\sin t \Rightarrow y^2 = 4\sin^2 t$$
$$y^2 = 4\cdot(1 - \cos^2 t)$$
$$y^2 = 4\cdot(1 - (\frac{x}{2})^2)$$
$$y^2 = 4 - 4\frac{x^2}{4}$$
$$y^2 = 4 - x^2$$

*d.h.:* $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{array}{c} \textit{Wertebereich} \\ \downarrow \end{array}$$

K = { $P(x, y) | x \in D \wedge y \in B \wedge F(x, y) = 0$ }

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \textit{Definitionsbereich} \end{array}$$

= ebene Kurve = Menge von Punkten wo F (x,y) = 0 !

Beispiel dazu im Umdruck Seite 29 Def. 5 ( Begriffe )

(1) $x^2+y^2=4$

implizierte Form : F (x,y) = x^2 + y^2 – 4 = 0

Relation dazu : R = { $(x,y)|\ x^2+y^2=4$ }

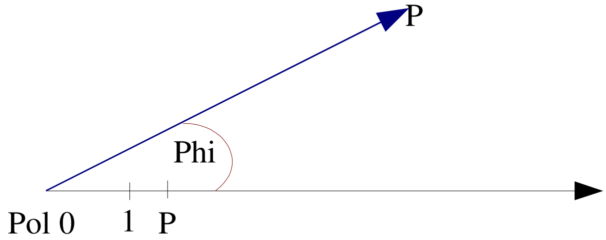
Def. 6 a )

In der Ebene erhält man wie folgt ein Polarkoordinationssystem

Man wählt :

- einen „ Pol 0“ $\rightarrow$ einen Punkt
- einen Strahl p, ausgehend vom Pol 0 , der POLACHSE genannt wird.
- eine Längeneinteilung auf der Polachse, also eine Einheit.

Nun ordnet man jeden Punkt P der Ebene folgende Zahlen zu :




**1.)**

$1.)\ Abstand\ \vec{OP}=r\ \leqslant 0$ *genannt Polarradius*

$2.)\ Der\ Winkel\ \phi=\sphericalangle(r,p)$ *genannt Polarwinkel*

$3.)\ P\rightarrow(r,\phi)$

Implizierte Form :

$F(r\phi)=0$

*explizierte Form :*

$r=f(\phi)\vee\phi=g(r)$

*irgendeine Funktion von r*

*parameter Form :*

$r=r(t)\qquad \phi=\phi(t)$

Merke: Sollte ein negativer Wert für r herauskommen , dann + 180° und den positiven Wert abtragen!

## Umrechnung kartesisch in Polar .

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\phi=\frac{y}{x}\Rightarrow\phi=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ *zzgl. Betrachtung des Quadranten !*

Bsp. :

Gegeben sein :

$(x_{1,}y_1)=(1,1)$
$(x_{2,}y_2)=(1,-1)$
$(x_{3,}y_3)=(-1,1)$
$(x_{4,}y_4)=(-1,-1)$

Für alle 4 Punkte gilt :

1.) $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad ab-1\,oder+1=egal$

2.) $\tan\phi_1=\frac{1}{1}=1\Rightarrow\phi 1=45°\vee\ -135°$

Betrachtung des Quadranten : $\Rightarrow(r_{1,}\phi_1)=(\sqrt{2},45°)$ $\quad(\sqrt{2},\frac{\phi}{4})$

2.) $\tan\phi_2=\frac{-1}{1}=-1\Rightarrow\phi_2=135°\vee-45$

Betrachtung des Quadranten : $\Rightarrow(r_2,\phi_2)=(\sqrt{2},-45°)$

3.) $\tan\phi_3=\frac{1}{-1}=-1\Rightarrow\phi_3=135°\vee-45°$

Betrachtung des Quadranten: $\Rightarrow(r_3,\Phi_3)=(\sqrt{2},135°)$

TR zeigt -45 ° an : Nachdenken!!! dann TR

4.) $\tan\phi_4=\frac{-1}{-1}=1\Rightarrow\phi_4=45°\vee-135°$ Betrachtung des Quadranten: $\Rightarrow(r_4,\phi_4)=(\sqrt{2},-135°)$

## Umrechnung Polar in Kartesisch

Hier sind gegeben $\phi$ und r.

Benötigt x,y !

$\cos\phi=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\cdot\cos\phi$

$\sin\phi=\frac{y}{r}\Rightarrow y=r\cdot\sin\phi$

Bsp :

Berechnung der kartesischen Koordinaten zu den Punkten $r_i, \phi_i$ aus den vorher gehenden ,

Bsp :

1.Punkt

$$(r_1, \Phi_1) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \qquad \frac{\pi}{4} = 45°$$

$$\begin{aligned} x = r \cdot \cos\phi \quad &\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \cos(45°) \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} \sqrt{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = r \cdot \sin\phi \quad &= \sqrt{2} \cdot \sin(45°) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Punkt

$$\begin{aligned} &(r_2, \phi_2) = (\sqrt{2}, -45°) \\ &x = r \cdot \cos\phi \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \cos(-45°) \\ &\qquad = 1 \\ &y = r \cdot \sin\phi = \sqrt{2} \cdot \sin(-45°) \\ &\qquad = -1 \end{aligned}$$

usw. für 3. und 4. Punkt

Bsp.: 1)

Man skizziere folgende Funktion in Polar Koordinaten :

$r(\phi)=2\cdot\sin(2\phi) \qquad 0\leqslant\phi\leqslant 360°$

1. Wertetabelle :

| $\phi$ | $r=2\cdot\sin(2\phi)$ | |
|---|---|---|
| 0° | 0 | |
| 15° | 1 | |
| 30° | $\sqrt{3}$ | '=1,73 |
| 45° | 2 | |
| 60° | $\sqrt{3}$ | '=1,73 |
| 75° | 1 | |
| 90° | 0 | |
| 105° | -1 | Bei 285° = 1 |
| 120° | $-\sqrt{3}\Rightarrow -1{,}73$ | Bei 300° $\sqrt{3}$ |
| 135° | -2 | Bei 315° 2 |
| 150° | -1,73 | Bei 330° 1,73 |
| 165° | -1 | Bei 345° 1 |
| 180° | 0 | Bei 360 0 |
| 195° | 1 | |
| 210° | $\sqrt{3}$ | |
| 225° | 2 | |
| 240° | $\sqrt{3}$ | |
| 255° | 1 | |
| 270° | 0 | |
| 285° | -1 | |
| 300° | $-\sqrt{3}$ | |
| 315° | -2 | |
| 330° | $-\sqrt{3}$ | |
| 345° | -1 | |
| 360° | 0 | |
| Bei -r = -r + 180° Bsp: 285° → 285° + 180° = 465° = 105° | | |

Jetzt Zeichnen :

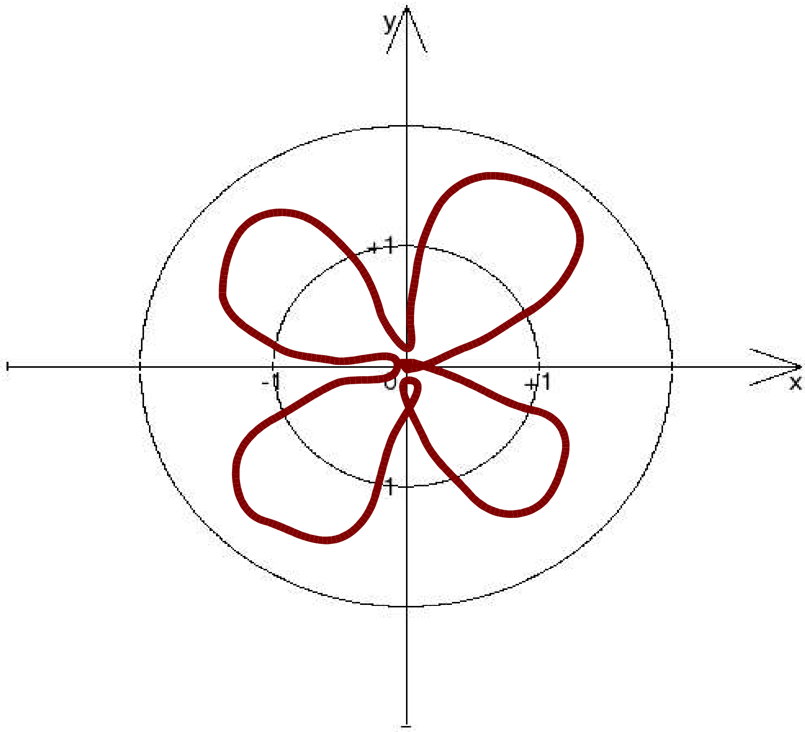
1. Kartesisches Kreuz zeichnen mit y über x
2. „Hilfskreise“ z eichnen mit r = 1 und r = 2
3.

    1. Punkt : 0,0 $\Rightarrow$ einfach mitten ins Kreuz !!!

    2. Punkt : Bei 15° ( Geodreieck!!!) die 1 auf dem Hilfsradius 1 abtragen, und zwar dort wo 15° den Hilfskreis schneidet !

    3. Punkt und -n-ter Punkt siehe 2. Punkt.

    4. Zeichnung : sieht ungefähr so aus!




2.)

Man stelle die Funktion y = 3x in Polarkoordinaten dar :

Es gilt : $y=r\cdot\sin\phi$ $\quad x=r\cdot\cos\phi$ daraus folgt

Einsetzen :

$$r\cdot\sin\phi=3r\cos\phi \qquad |:r\cdot\cos\phi$$

$$\cos\phi\neq 0 \qquad \frac{\cancel{r}\cdot\sin\phi}{\cancel{r}\cdot\cos\phi}=3 \;\rightarrow\; \frac{\sin}{\cos}=\tan \;\rightarrow\; 3=\tan\phi \;\rightarrow\; \phi=\tan^{-1}(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1=71{,}56\,°\\ \phi_2=-108{,}44\,°\end{array}\right\}\; diff=180\,° \qquad r=beliebig!!!$$

3.)

Man stelle die Funktion $r(\phi)=2\sin\phi$ in kartesischen Koordinaten dar !

Gemäß Satz 0 b gilt :

$$x=r\cdot\cos\phi \qquad y=r\cdot\sin\phi$$

$$\Rightarrow x=2\sin(\phi)\cos(\phi) \ \wedge \ y=2\sin^2(y)$$

$$\downarrow\downarrow$$

$$\frac{y}{2}=\sin^2\phi$$

$$d.h.: \qquad \sin\phi=\frac{\sqrt{y}}{2}$$

$$Einsetzen: x=2\cdot\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{1-\sin^2(\phi)}$$

$$=2\cdot\sqrt{\frac{y}{2}}\sqrt{1-(\frac{y}{2})}$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \qquad |HN$$

$$=\frac{2\sqrt{y}\sqrt{2-y}}{\sqrt{2} \qquad \sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{y}\sqrt{2-y} \qquad |x^2$$

$$x^2=y(2-y)$$

$$x^2=2y-y^2 \qquad |sotieren$$

$$x^2+y^2-2y=0 \qquad |quadratische\ Erg.$$

$$x^2+y^2-2y+1=1 \quad d.h.: \quad x^2+(y-1)^2=1$$

Kreis um den Punkt ( 0,1) mit r = 1

# Die Umkehrfunktion

Spiegelung an Winkel halbierenden = Vertauschen der Koordinaten

d.h.

$$(y_2=x_1 \qquad x_2=y_1)$$

$$P_2(y,x_1)$$

$$K_1\in P(x_{1,}y_1)\Rightarrow P(y_{1,}x_1)$$

$$K_2=\{P(x,y)|(x,y)\in \ K_1\}$$

$$K_2=\{P(x,y)|x=f(y)\}$$

$K_2 =$ keine Funktion, da zu 1x mehrere y vorhanden damit nicht eindeutig .

$K_2$ *definiert zunächst nur eine Relation*

$$f^{-1}\div=\{(x,y)|x=f(y)\}$$

Frage : Wann definiert $f_{-1}$ eine Funktion ?

$y=f^{-1}(x):\Leftrightarrow\ (x,y)\ \in\ \{(x,y)\ |x=f(y)\}$

$d.h.: y=f^{-1}(x):\Leftrightarrow\ x=f(y)$

Ausführlich :

$Für\ f=\{(x,y)\ |x\in D_f\wedge y\in B_f\wedge y=f(x)\}\ ist\ f^{-1}=\{(x,y)\ |x\in D_{f^{-1}}=B_f\wedge ....\}$

Bsp. 1) : $f=\{(x,y)|y=\frac{1}{2}x-2\}$

1. Winklelhalbierende zeichnen (45° durch den Nullpunkt!)
2. Einsetzen:

$P_1(2,-1)\in K_1$

$\rightarrow\quad 2,-1\ \in f$

$\rightarrow\quad -1=f(2)$ 2 für x eingesetzt!

$\rightarrow\quad -1=\frac{1}{2}2-2$

-------------------------------------------------------------------------------------

$P_2(-1{,}2)\in K_2$ , da

$\rightarrow\quad -1{,}2\ \in f^{-1}$

$\rightarrow\quad 2=f^{-1}(-1)$ -1 für x eingesetzt!

$\rightarrow\quad 2=-1$

$\rightarrow\quad 2=\frac{-1}{2}2-2$

f(y) = x

Def.1b)

Eine Funktion heißt **streng monoton steigend**, $\Leftrightarrow(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2))$

$\downarrow$

*genau dann* $\forall\ x_{1,}x_2\in D$

*für alle*

Eine Funktion f heißt **streng monoton fallend**, $\Leftrightarrow(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2))\quad \forall\ x_{1,}x_2\in D$

Bsp. 2) : y = sin(x) ist nicht umkehrbar !!! auf ganz D = R

Jedoch gibt es bijektive Teilfunktionen

(unendlich viele !)

Bsp. 3) ( Fortsetzung von Bsp.1)

$$f=\{x,y \mid |y=\frac{1}{2}x-2\} \qquad Kehrform\ 4+2y=x$$

$1. Schritt: Vertausche\ x\ und\ y$

$d.h.: x=\frac{1}{2}y-2$

$2. Schritt: Auflösen\ nach\ y$

$x=\frac{1}{2}y-2 \qquad |+2\cdot 2$

$d.h.: y=2x+4$

Bsp.4) :

$f: y=x^2$
$f\ ist\ nicht\ bijektiv, da\ f(3)=f(-3)=9$
$Aufspaltung\ von\ f: f=f_1\vee f_2$
$f_1=\{(x,y)|x<0, y=f_1(x)=x^2\}$
$f_2=\{(x,y)|x\geqslant 0, y=f_2(x)=x^2\}$

Die dazugehörigen Umkehrfunktionen sind :

$f_1^{-1}=\{(x,y)|x\in W_{f1}\wedge y=f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x}<0\}$
$f_2^{-1}=\{(x,y)|x\in W_{f2}\wedge y=f_2^{-1}(x)\pm\sqrt{x}\geqslant 0\}$

W = Wertmenge = Bildmenge

$Wf_1=\{y|y=x^2\wedge x<0\}=(0,\infty)$
$Wf_2=\{y|y=x^2\wedge x\geqslant 0\}=[0;\infty]$

Bsp.5) : $f: y=x^2-6x+7$

$Trick: \cdot\ +x^2\ nach\ oben\ geöffnet$

$\cdot$ binom $herausfinden\ \frac{6x}{2}=3\ und\ dann^2$

$\Rightarrow \qquad x^2-6x+3^2-9+7$

$\cdot\ =(x-3)^2-9+7\Rightarrow(x-3)^2-2$

Parabel zeichnen: $y=(x-3)^2-2 \qquad |+2$
$y+2=(x-3)^2$

daraus wird mit der Scheitelform: $(y-y_s)=(x-x_s)$ einsetzen der „blauen" Werte: $y-(-2)=x+3$
daraus wird letztendlich die Scheitelform S (3,-2)

bedeutet: Normalparabel mit Scheitel in x = 3 und y = -2.

$f=f_1\vee f_2$
$f_1=\{(x,y)|x<3\wedge y=x^2-6x+7\}$
$f_2=\{(x,y)|x\geqslant 3\wedge y=x^2-6x+7\}$

Umkehrung von $f_1$ :

$$y+2=(x-3)^2 \quad | \quad x<3 \wedge y-(-2)$$
$$\sqrt{y+2}=|x-3| \quad |Betragsstriche\ weg\ mit \cdot(-1)$$
$$\sqrt{y+2}=3-x \quad \Rightarrow x=3-\sqrt{y+2} \quad (x<3)$$
$$(y \geqslant -2)$$

Vertauschen x und y :

$$y=3-\sqrt{x+2} \quad (x \geqslant -2)$$
$$(y<3)$$
$$f_1^{-1}(x)=3-\sqrt{x+2} \quad ; x \geqslant -2$$

Umkehrung von $f_2$ :

$$y+2=(x-3)^2 \quad x>3 ; y \geqslant -2$$
$$\sqrt{y+2}=|x-3|$$
$$=x-3 \quad |+3$$
$$3+\sqrt{y+2}=x$$

Vertauschen x und y :

$$d.h.: 3+\sqrt{x+2} \quad x \geqslant -2 \quad y \geqslant 3$$
$$f_2^{-1}(x)=3+\sqrt{x+2}$$
$$Probe: Berechne\ f_1^{-1}(f_1(x))=f_1^{-1}(y)$$
$$=3-\sqrt{x+2}$$
$$=3-\sqrt{x^2 \cdot 6x+7+2}$$
$$=3-\sqrt{(x-3)^2}$$
$$=3-|x-3|$$
$$=3-(3-x)$$
$$=x$$

Bsp. 6 )

$$f: s=\frac{1}{2}>^2 \quad t \geqslant 0$$
$$\Rightarrow 2s=\mathrm{gt}^2 \quad (Weg-Zeit-Gesetz)$$
$$t^2=\frac{2s}{g} \quad \Rightarrow |t|=\frac{\sqrt{2s}}{g}$$
$$Kehrform: \quad t=\frac{\sqrt{2s}}{g}$$

# Polynome ( PN)

( Ganzrationale Funktion )

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad P(x) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 1.\, Grad\, P(x) = Grad\, Q(x) & \\ 2.\, a_i = b_i & \forall i \\ & 0 \leqslant i \leqslant n \end{array}$$

Beispiele :

Koeffizientenvergleich

$1)\, P(x) = a_0 \quad konstantes\ Polynom \quad 0-ten\ Grades$

$2)\, P(x) = a_1 \cdot x + a_0 \quad (a_1 \neq 0) \qquad lineares\ PN \quad 1.\, Grades$

$3)\, P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad quadratisches\ PN \quad 2.\, Grades$

$4)\, Gegeben\ sei\ das\ quadratische\ Polynom\ P(x) = x^2 - 3x + 5.$

$$Forme\ P(x)\ so\ um\ das\ gilt\ x^2 - 3x + 5 \equiv \underbrace{a_2 \cdot (x-1)^2 + a_1 \cdot (x-1) + a_0}_{RS}$$

$Bestimme: \quad a_2 ?\ a_1 ?\ a_0$

$RS = a_2 x^2 - 2 a_2 x + a_2 + a_1 x - a_1 + a_0$

$\quad = a_2 x^2 + (-2 a_2 + a_1) \cdot x + (a_0 - a_1 + a_2)$

$Gemäß\ Def3\ muß\ gelten:$

$Koeffizienten\ von\ x^2: \quad 1 = a_2$

$Koeffizienten\ von\ x^1: \quad -3 = -2 a_2 + a_1$

$Koeffizienten\ von\ x^0: \quad 5 = a_0 - a_1 + a_2$

$-3 = -2 + a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1$

$\ 5 = a_0 + 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 3$

$$\Rightarrow P(x) = x^2 - 3x + 5 \equiv Q(x) = 1(x-1)^2 - 1 \cdot (x-1)^1 + 3$$

$$(x-1)^0$$

$Das\ war\ der\ Koeffizientenvergleich!!!$

## Polynomwerte

Bsp.

*Gesucht ist der Wert von*

$P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 2x + 3 \quad für\ x_1 = 1{,}2$

$\qquad = (3x+5)x^3 - 4x^2 + 2x + 3$

$\qquad = ((3x+5)x - 4)x^2 + 2x + 3$

$\qquad = (((3x+5)x - 4)x + 2)x + 3$

Horner - Schema .

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **3** | **5** | **-4** | **2** | **3** | |
| | - | 3,60 | 10,32 | 7,584 | 11,5008 | |
| $x=x_1=1{,}2$ | 3 | 8,6 | 6,32 | 9,584 | 14,5008 | |

d.f. 14,5008 = P(1,2)

Vorgehensweise:

$1.\,Unter\,der\,3-setzen.\,2.$
$3\cdot x_1\,unter\,der\,5\,stellen\,3.$
$3{,}6\cdot x_1\,unter-4\,stellen\,4.\,so\,fortfahren.....$

Allgemeines Verfahren:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | **...** | $a1$ | $a_0$ |
| | $b_n=0$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | ... | $b_1$ | $b_0$ |
| $x=x_1$ | $c_n$ | $c_{n-1}$ | $c_{n-2}$ | ... | $c_1$ | $c_0$ |

$$b_n=0 \qquad c_n=a_n \qquad \underbrace{b_{n-1}=c_n\cdot x_1 \qquad c_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-1}}_{f\ddot{u}r\;jedes\;Feld\;Wiederholen}$$

Zum Schluß gilt $P(x_1) \;=\; c_0$

Bsp 2: $P(x)=3x^4-2x^3+x-1$ $\qquad Gesucht\;P(2)$

Achtung hier: es fehlt der Term x², das heißt 0 schreiben

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **3** | **-2** | **0** | **1** | **-1** | |
| | 0 | 6 | 8 | 16 | 34 | |
| $x_1=2$ | 3 | 4 | 8 | 17 | 33 | '= P(2) |

# Zerlegungssatz für Polynome

(Umdruck S.28)

$$P(x)=p(x_1)+(x-x_1)\cdot P_1(x)$$

$Folgerung:\,gilt\,P(x_1)=0\,dann\,folgt\,P(x)=(x-x_1)P_1(x)$ $\qquad P_1(x)=\dfrac{P(x)}{(x-x_1)}$

Für die Einträge im Horner-Schema gilt:

$1.\,P(x_1)=C_0$
$2.\,C_n, C_{n-1}, C-n-2, \ldots, C_1\,sind\,Koeffizienten\,des\,RestPolynoms\,P_1(x)$

Beispiele: (vgl. weiter oben)

$$P(x)=3x^4+5x^3-4x^2+2x+3$$
$$=P(1{,}2)+(x-1{,}2)\cdot P_1(x)$$
$$=14{,}5008+(x-1{,}2)(3x^3+8{,}6x^2+6{,}32x+9{,}584)$$

## Darstellung eines Polynoms in Potenzen

*Gegeben:* $P(x)=3x^4-2x^3+x-1$ *Gesucht Darstellung von* $P(x)$ in *Potenzen von* $(x-1)$

Gemäß Satz 1 (Zerlegungssatz) folgt:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***3*** | ***-2*** | ***0*** | ***1*** | ***-1*** | |
| | 0 | 3 | 1 | 1 | 2 | |
| $x=1$ | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | '= P(1) |

Es gilt außerdem $P(x)=(x-1)(3x^3+x^2+x+2)+1$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***3*** | ***1*** | ***1*** | ***2*** | | |
| | 0 | 3 | 4 | 5 | 11,5 | |
| $x=1$ | 3 | 4 | 5 | 7 | $'=P_1(1)$ | |
| | 0 | 3 | 7 | | | |
| $x=1$ | 3 | 7 | 12 | $'=P_2(1)$ | | |
| | 0 | 3 | | | | |
| $x=1$ | 3 | 10 | $'=P_3(1)$ | | | |
| | 0 | | | | | |
| | 3 | $'=P_4(1)$ | | | | |

$$P_1(1)=\rightarrow P_1(x)=(x-1)(3x^2+4x+5)+7$$
$$P_2(1)=\rightarrow P_2(x)=(x-1)(3x+7)+12$$
$$P_3(1)=\rightarrow P_3(x)=(x-1)(3)+10$$

Insgesamt: P(x) $= (x-1)\underbrace{(3x^3+x^2+x+2)}_{P_0}+1$

$$=(x-1)^2\underbrace{(3x^2+4x+5)}_{P_1}+7(x-1)+1$$

$$=(x-1)^3\underbrace{(3x+7)}_{P_2}+12(x-1)^2+7(x-1)+1$$

$$=(x-1)^4\cdot 3+10(x-1)^3+12(x-1)^2+7(x-1)+1$$

# Lösungen von Polynomen

$P(x)=(x-x_1)P_1(x)$ gilt nur bei Nullstelle Bsp. -3 d.f. (x-(-3))

$$P(x)=\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_i)}_{\text{höchstens n verschieden Faktoren, wenn n der Grad des Polynoms ist}}\cdot P_i(x)$$

Bei n Nullstellen gilt $P(x)=a_n\cdot(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x-n)$ $\rightarrow a_n=kostantes\,Polynom$

Gesucht sind Nullstellen vom Polynom $P(x)=x^4-\frac{13}{6}x^3+\frac{13}{6}x-1$

2 Nullstellen seien bekannt $x_1=1\,und\,x_2=-1$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***1*** | $-\frac{13}{6}$ | ***0*** | $\frac{13}{6}$ | ***-1*** | |
| | 0 | 1 | $-\frac{7}{6}$ | $-\frac{7}{6}$ | 1 | |
| $x_1=1$ | 1 | $-\frac{7}{6}$ | $-\frac{7}{6}$ | 1 | 0 | '= P(1) |
| | 0 | -1 | $\frac{13}{6}$ | -1 | | |
| $x_1=-1$ | 1 | $-\frac{13}{6}$ | 1 | 0 | $'=P_1(1)$ | |

Das Restpolynom $P_2(x)$ lautet: $P_2(x)=x^2-\frac{13}{6}x+1$

Merke: Man muss sich „runter“ arbeiten, bis x² noch steht und dann mit pq-Formel

$$P(x)=(x-1)(x+1)P_2(x)=(x-1)(x+1)(x^2-\frac{13}{6}x+1)$$

Zum erreichen der 1. Nullstelle: den kleinsten Teiler der normierten letzten stelle suchen:

$$x_{3,4}=\frac{13}{12}\pm\sqrt{\frac{169}{144}-\frac{144}{144}} \quad =\frac{13}{12}\pm\frac{5}{12} \qquad x_3=\frac{3}{2} \qquad x_4=\frac{2}{3}$$

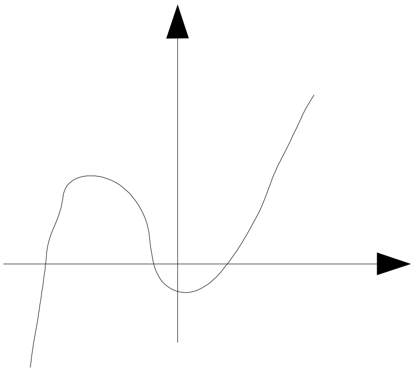
$$d.f \quad (x-1)(x+1)(x^2-\frac{13}{6}x+1)=(x-1)(x+1)(x-\frac{3}{2})(x-\frac{2}{3})$$

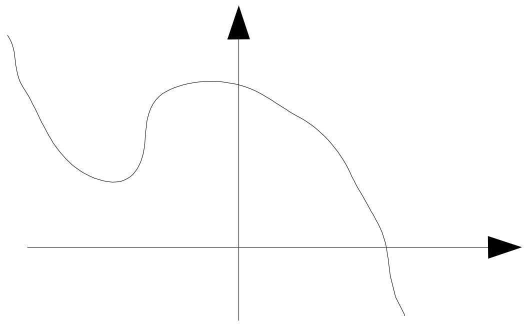
$$d.f \quad P(x)=(x-1)(x+1)(x-\frac{3}{2})(x-\frac{2}{3})$$

Bsp 2: Gesucht sind die Nullstellen von $P(x)=x^3-5x^2+x-5$ bekannt sei $x_1=5$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***1*** | ***-5*** | ***1*** | ***-5*** | |
| | 0 | 5 | 0 | 5 | |
| $x_1=5$ | 1 | 0 | 1 | 0 | '= P(5) |

d.h. $P(x)=(x-5)(x^2+1)$ $x^2=-1$ $|x|=\sqrt{-1}$ $\rightarrow$ $P_1$ hat keine reele Nullstelle
Polynom 3. Grades sehen ungefähr so aus:



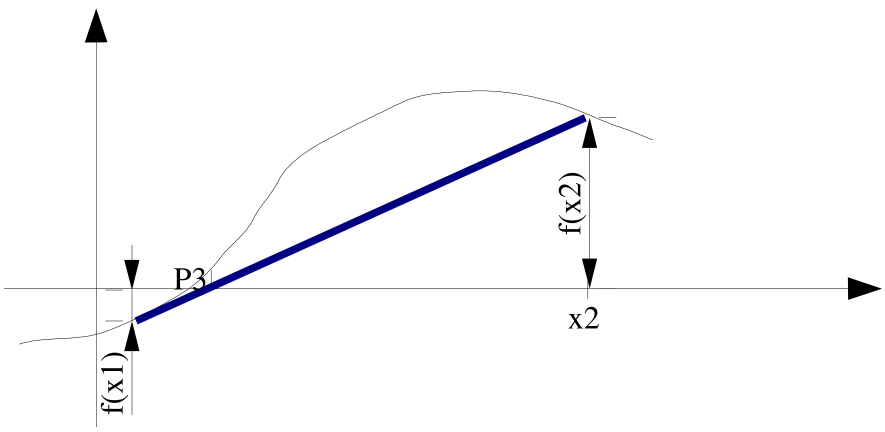


also min. 1 Nullstelle!
$P(x)=1\cdot x^6-5x^5+...-10=0$ Alle Teiler von 10 sind ganzzahlige Kandidaten : $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$

Regel: Sei P(x) ein Polynom $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}....+a_1 x+a_0$ $a_i\in\ Z\ \forall_i$

Dann sind folgende rationalen Zahlen Nullstellenkandidaten: $\dfrac{|Teiler\ von\ a_0|}{|Teiler\ von\ a_n|}$

# Regula falsi



Gegeben stetige Funktion f sowie $x_{1,} x_2$ mit signum $f(x_1)$ $\neq$ signum $f(x_2)$

Idee: Ersetzt den Kurvenbogen $P_1 P_2$ durch die Strecke $P_1 P_2$. Sei $x_3$ der Schnittpunkt von $P_1 P_2$ mit der x-Achse. Man berechne $x_3$.

Strahlensatz : $\frac{|f(x_2)|}{x_2 - x_3} = \frac{|f(x_2)|}{x_3 - 1}$ negative Seite mit -1 multiplizieren $\frac{|f(x_2)|}{x_2 - x_3} = -\frac{|f(x_2)|}{x_3 - x_1}$

=> $(x_3 - x_1) \cdot f(x_2) = -f(x_1) \cdot (x_2 - x_3)$

=> $x_3 \cdot f(x_2) - x_3 \cdot f(x_1) = x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)$

=> $x_3 \cdot (f(x_2) - f(x_1)) = x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)$

daraus folgt: $x_3 = \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$

1. $x_3 = x_1 - \frac{\frac{f(x)}{f(x) - f(x_1)}}{x_2 - x_1} \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
2. ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(x_2)$ > 0 , $f(x_1)$ < 0. Setze $x_2^{neu}$ := $x_3$ , $x_1$ wird beibehalten $f(x_2^{neu})$ := $f(x_3)$
3. Gehe zu Punkt 1 zurück, wenn $|f(x_3)|$ > eps
   eps = vorgabe wie eps = $10^{-4}$
   ansonsten Schluss, Nullstelle gefunden. Nämlich bei $x_2^{neu}$ .

# Gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Def. 2 :

1. Also: Nullstelle k-ter Ordnung $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\rightarrow$ *zum Beispiel* $\frac{0}{3}$

   d.f. $x_0$ heißt Nullstelle k_ter Ordnung eines Polynoms P(x), wenn es folgende Zerlegung gilt: $P(x) = (x - x_0)^k \cdot P_1(x)$ und $x_0$ keine Nullstelle des Restpolynoms $P_1(x)$ ist!

2. Pol k-ter Ordnung $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\rightarrow \frac{3}{0}$

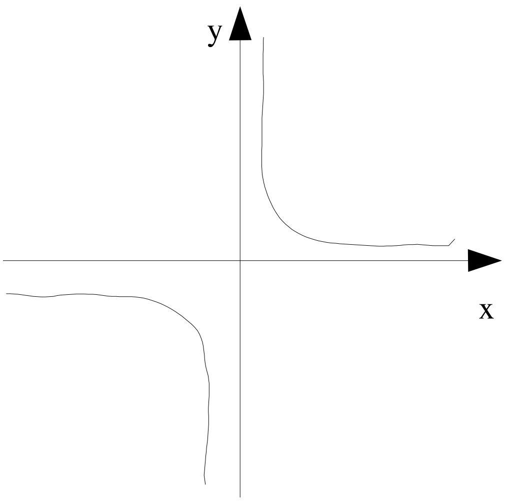
3. Lücke der Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\rightarrow$ $\frac{0}{0}$

Ist $x_0$ Nullstelle gleicher Ordnung von P(x) und Q(x), dann auch Lücke z.B. $\frac{0}{0}$ oder $\frac{3}{3}$ oder $\frac{n}{n}$

Pole und Lücke gehören nicht zur Definitionsmenge!

Bsp. 1: $y_n = \frac{1}{x^{2n+1}}$ $n \in N \vee \{0\}$

Wenn Nenner = 0, dann ist an der Stelle ein Pol




$X^{2n-1} = (x-0)^{2n+1} \cdot 1$

Bei $x_0 = 0$ liegt ein Pol (2n+1)-ter Ordnung vor.

Für x $\downarrow$ 0 gilt f(x) $\rightarrow + \infty$

Für x $\uparrow$ 0 gilt f(x) $\rightarrow - \infty$

Def. 3a. Seien f und g Funktionen, dann heißt g „Aymptote von f", falls

1. f(x) $\rightarrow$ f(x) (f langsam die Werte von g annimmt)
   für x $\rightarrow + \infty \vee - \infty$
2. f(x) $\rightarrow$ g(x) für x $\rightarrow$ $x_0$ , $x_0$ Polstelle

Bsp. 1: (Fortsetzung)

$y=\frac{1}{x}$

Asymptoten (A):

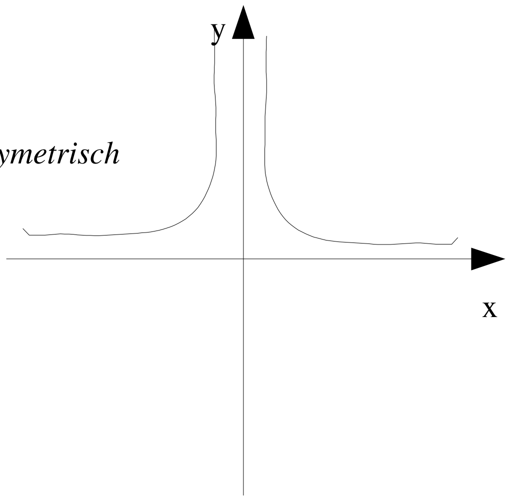
| | | |
|---|---|---|
| x → 0 | | A = x = 0 |
| x → + ∞ | | A = y = 0 |
| x → − ∞ | | A = y = 0 |

Bsp. 1: (Fortsetzung)

$x=\frac{1}{x}$ ist eine ungerade Funktion . Sie ist punktsymetrisch.

$f(-x)=\frac{1}{-x}=\frac{-1}{x}=-f(x)\Rightarrow -f(-x)=f(x)$

$y=\frac{1}{x^2}\ \rightarrow f(-x)=\frac{1}{(-x^2)}=\frac{1}{x^2}=f(x)$ *Achsensymetrisch*




Bsp. 2: Betrachte die Funktion y(x) = $\frac{1}{x^{2n}}$

bei x = 0 liegen die Pole (2n)-ter Ordnung vor.
Asymptoten x → 0 : y – Achsen
x → ±∞ : x – Achse

keine Nullstellen, keine Lücken

Def. 5: Alle Funktionen $y=x^n$ heißen Parabeln n-ter Ordnung für n > 1
bzw. Hyperbeln n-ter Ordnung für $\leqslant -1$

Bsp. 3:

sei D = R \ {-2,-3} und f(x) = $\frac{-x^3-3x^2+x+3}{x^2+5x+6}$

Wichtig: Umwandelbar in $\frac{(1-x)(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}$

(1)Pol 1-ter Ordung bei x = -2

Wenn man im Nenner -2 für x einsetzt, ergibt es 0. Pol ist definiert als $\frac{n}{0}$

(2)Lücke bei x = 3

-3+3 = 0 sowohl im Nenner als auch im Zähler. Lücke ist definiert als $\frac{0}{0}$

(3)Nullstelle: +- 1

Kürzen ergibt eine neue Funktion $\frac{(1-x)(1+x)\cancel{(x+3)}}{(x+2)\cancel{(x+3)}}$

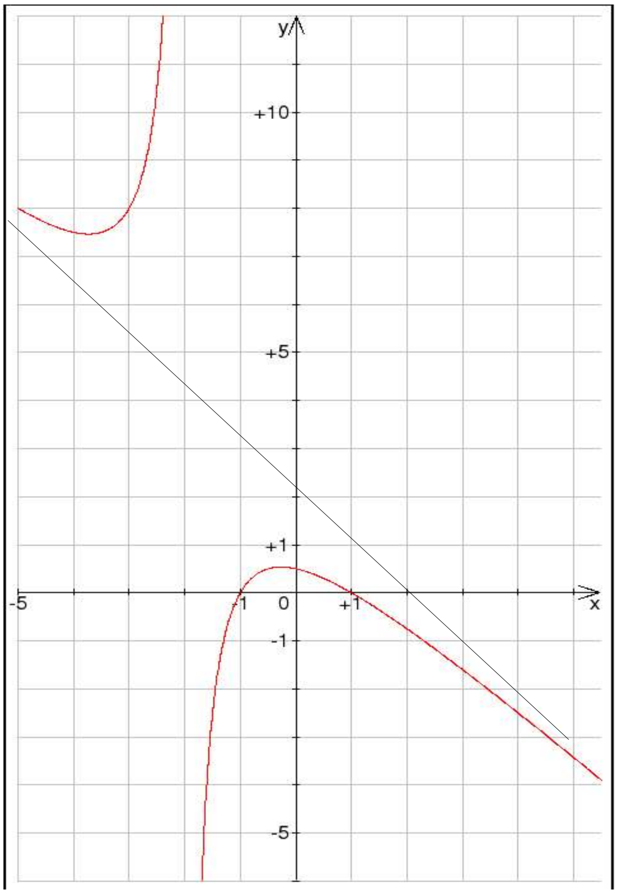
$$\Rightarrow f(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{x+2} = \frac{1-x^2}{(x+2)} \qquad D_f = \mathbb{R}\, ohne\,(-2)$$

$$Es\ gilt\ f(x) \equiv \tilde{f}(x) \quad \forall x \ \in D_f\, und\ x \neq -3.$$

Untersuche jetzt statt f, $\tilde{f}$

Wertetabelle:

| ***0*** | ***-5*** | ***-4*** | ***-3*** | ***-2*** | ***-1*** | ***0*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 7,5 | 8 | $\pm\infty$ | 0 | 0,5 | 0 | -0,75 | -1,6 | -2,5 | 3,43 |




Asymptoten x = -2 für x ---> -2

y = -x +2 für x ---> $\pm\infty$

Polynomdivision:

$$(-x^2+1):(x+2)=-x+2 \; Rest \frac{-3}{x+2} \qquad oder -\frac{3}{x+2}=\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-(-x^2-2x)} \\ \quad +2x+1 \\ - \quad \underline{2x+4} \\ \qquad 0-3 \end{array}$$

Da sieht man sofort die Asymptote

# Partialbruchzerlegung von Polynombrüchen

– echt gebrochen rationale Funktionen

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\underbrace{\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}}_{\text{echt gebrochen}} \qquad S \text{ ist eine ganze rationale Funktion}$$

Satz 1:

$$Q(x)=b_n\cdot(x-x_1)(x-x_2)...\cdot(x-x_m)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A-1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_2)}+...+\frac{A_m}{(x-x_m)} \qquad *$$

Berechnung der Zerlegung:

0. ggf. Polynomdivision, um echten Partialbruch zu ermitteln ---> Nenner höherer Grad als Zähler
1. Aufstellen des Ansatzes ---> Nullstelle Q(x)
2. Multiplizieren Q(x) * Ansatz (*)
3. a) Berechnung der $A_i$ durch Koeffizientenvergleich oder:
   b) Berechnung der $A_i$ durch einsetzen der Nullstellen oder geeignete Werte

Bsp. 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{6x^2-26x+8}{x^3-3x^2-x+3}$$

0) -

1) Nullstellen von Q(x)
   Kandidaten suchen: 1, -1, 3
   Bsp. x_1 = 1 → Horner-Schema
   d.f. X_1 = 1 , x_2 = -1 , x_3 = 3
   Ansatz :

$$\frac{6x^2-26x+8}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{x-3}$$

2) Q(x) = (x-1)(x+1)(x-3)

$$6x^2-26x+8=\frac{A_1(x+1)(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x+1)$$

3) a) Koeffizientenvergleich

$$= A_1(x^2-2x-3)+A_2(x^2-4x+3)+A_3(x^2-1)$$

$$= x^2(A_1+A_2+A_3)+x(-2A_1-4A_2)+(-3A_1+3A_2-A_3)$$

Vgl.: $x^2$: $6=A_1+A_2+A-3$

$x^1$: $-26=-2A_1-4A_2$

$x^0$: $8=-3A_1+3A_2-A_3$

Mit Sarrus oder Cramersche Regel : → $A_1$ = 5 ; $A_2$ = 5 ; $A_3$ = -2

3) b) Einsetzen der Nullstellen

$x_1$ = 1: $6-26+8=-12=A_1\cdot 2(-2)$

$x_2$ = -1: $6+26+8=40=A_2(-2)\cdot(-4)$

$x_3$ = 3: $54-78+8=-16=A_3\cdot 2\cdot 4$

$$A_1=\frac{-12}{-4}=3 \qquad A_2=\frac{40}{8}=5 \qquad A_3=-2$$

$$Q(x)=b_m(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r} \qquad \sum_{i=1}^{r}k_i=grad\,Q(x)=m$$

Satz 2:

$$P\frac{(x)}{Q}(x)=\frac{A_{11}}{(x-x_1)}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1K_1}}{(x-x_1)^{K_1}} \quad \text{1. Nullstelle}$$

$$=\frac{A_{21}}{(x-x_2)}+\frac{A_{22}}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2K_2}}{(x-x_2)^{K_2}} \quad \text{2. Nullstelle}$$

$$=\frac{A_{r1}}{(x-x_r)}+\frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{A_{rK_r}}{(x-x_r)^{K_r}} \quad \text{r-te Nullstelle}$$

Bsp. 2:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2-6x+3}{1x^3-15x^2+75x-125}$$

Schema:

0.) Polynomdivision entfällt, da es bereits ein echter Polynombruch ist
   → Nenner hat einen höheren Grad als der Zähler.

1.) Nullstelle von Q(x)
   1. Regel Teiler von 125 beachten: 1;5 → somit ist 5 Nullstelle
   daraus folgt x_1 = 5 mit Vielfachheit 3
   Q(x) = $1(x-5)^3$

2.) Ansatz gemäß Satz 2:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2-6x+3}{(x-5)^3}=\frac{A_{11}}{x-5}+\frac{A_{12}}{(x-5)^2}+\frac{A_{13}}{(x-5)^3}$$

   Multiplikation mit Hauptnenner (Q(x))
   Es bleibt übrig $x^2-6x+3=A_{11}(x-5)^2+A_{12}(x-5)+A_{13}$

3.) Einsetzen der Nullstellen und geeigneter Werte:
   x_N : 5
   daraus folgt 25 – 30 + 3 = -2 = A_13
   daraus folgt A_13 = -2
   irgendwas Eingesetzt:

| | | |
|---|---|---|
| x = 4 | 16 – 24 + 3 = -5 = $A_{11} - A_{12} - 2$ | |
| x = 6 | 36 – 36 + 3 = 3 = $A_{11} + A_{12} - 2$ | \|+ |

$-2 = \quad 2A_{11} \quad -4$

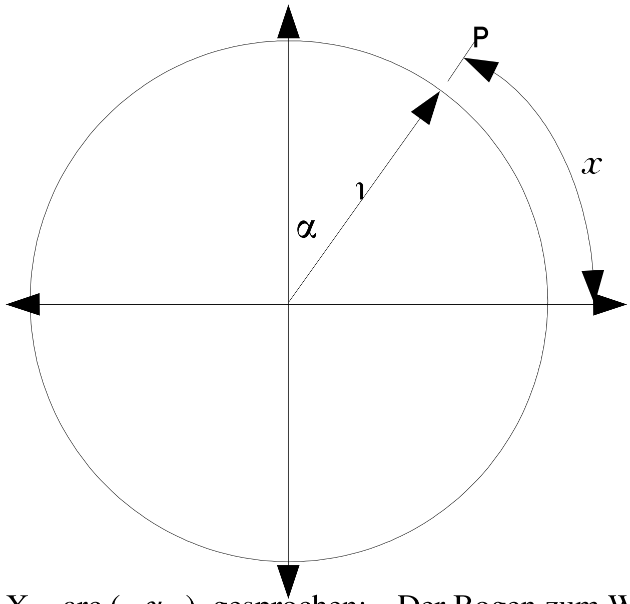
dann: $-2=2A_{11}-4 \Rightarrow 2A_{11}=2 \Rightarrow A_{11}=1$

3 = $A_{11}$ + $A_{12}$ -2 ⇒ 3 = 1 + $A_{12}$ -2 ⇒ $A_{12}$ = 4

Insgesamt:

$$\frac{x^2-6x+3}{x^3-15x^2+75x-125}=\frac{1}{x-5}+\frac{4}{(x-5)^2}-\frac{2}{(x-5)^3}$$

# Trigonometrische Funktionen



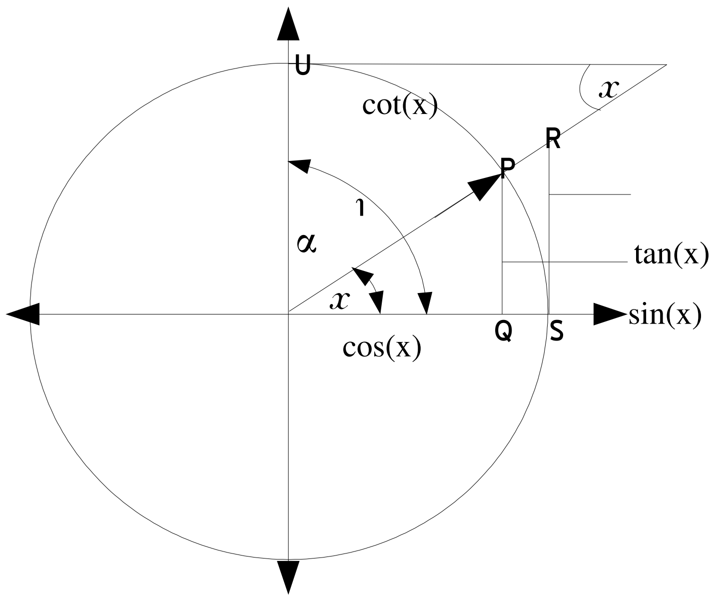

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$$

$$x = 0.0174 \cdot \alpha$$

$$\alpha = 57.296 \cdot x$$

X = arc ( $\alpha$ ) gesprochen: „ Der Bogen zum Winkel $\alpha$ ist x




$$\sin(x) = \overline{PQ}$$

$$\cos(x) = \overline{0Q}$$

$$\tan(x) = \overline{RS}$$

$$\cot(x) = \overline{UT}$$

$X \neq k \cdot \pi \qquad k \in \mathbb{R}$

## Zusammenhang Sinus Cosinus Tangens

$\sin(x)=\cos(90-x)$ $\qquad \cos(x)=\sin(90-x)$ $\qquad \sin(45°)=\cos(45°)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$

$(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ $\qquad \sin(x_1\pm x_2)=\sin(x_1)\cdot\cos(x_2)\pm\cos(x_1)\cdot\sin(x_2)$

$\cos(x_1\pm x_2)=\cos x_1\cos x_2\mp\sin x_1\sin x_2$

$\tan(x)=\cot(90-x)$ $\qquad \cot(x)=\tan(90-x)$ $\qquad \tan(45°)=\cot(45°)=1$

$$\tan(x_1\pm x_2)=\frac{\tan(x_1)\pm\tan(x_2)}{1\mp\tan(x_1)\cdot\tan(x_2)}$$

$$\sin(2x)=2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sin^2(x)=\frac{1}{2}[1-\cos(2x)]} \quad\Rightarrow\quad \boxed{-\sin^2(x)=\cos^2(x)-1}$$

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\cos^2(x)=\frac{1}{2}[1+\cos(2x)]} \quad\Rightarrow\quad \boxed{-\cos^2(x)=\sin^2(x)-1}$$

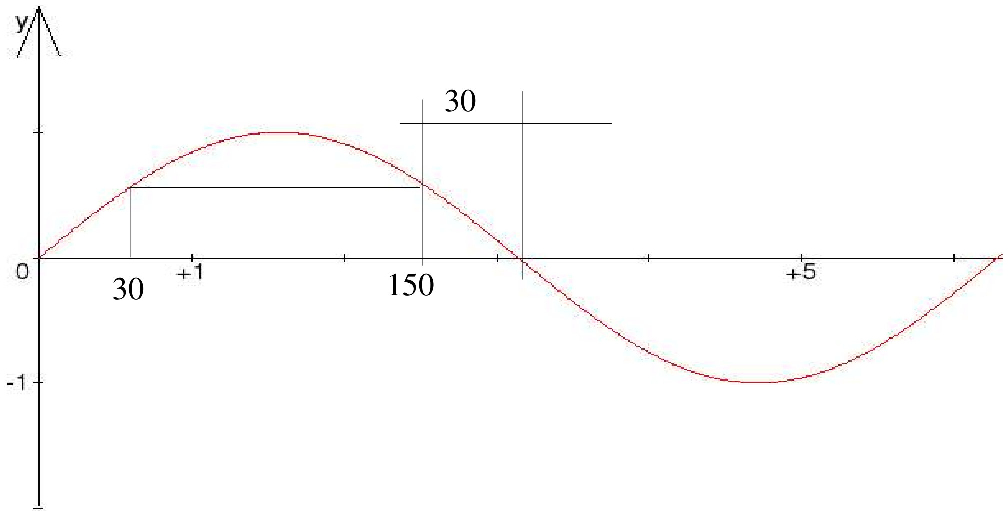
$$\Rightarrow\quad \boxed{\sinh^2(x)=\frac{1}{2}[\cosh(2x)-1]}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\cosh^2(x)=\frac{1}{2}[\cosh(2x)+1]}$$

Immer daran denken: In Trigonometrischen Funktionen gibt es immer eine 2.Lösung.

Bem. 2B

$$\tan(x)=\sin\frac{(x)}{\cos}(x) \;=\frac{1}{\cot}(x) \qquad \cot(x)=\cos\frac{(x)}{\sin}(x)$$



| | ***0°*** | ***30°*** | ***45°*** | ***60°*** | ***90°*** | ***120°*** | ***135°*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin = | $\frac{1}{2}\sqrt{0}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| cos = | $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |

Bsp. 1) Gesucht sind die Lösungen von $2\cos^2(\frac{1}{2}x)=\cos^2(x)$

1. Schritt: „ auf ein Argument bringen“

2. $1+\cos(x)=\cos^2(x) \qquad \rightarrow \qquad \cos(x)=z$

$$\cos^2(x)-\cos(x)-1=0$$
$$z^2-z-1=0$$
$$z_1, z_2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}$$
$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{(5)}}{2}$$
$$z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(5)}}{2}$$

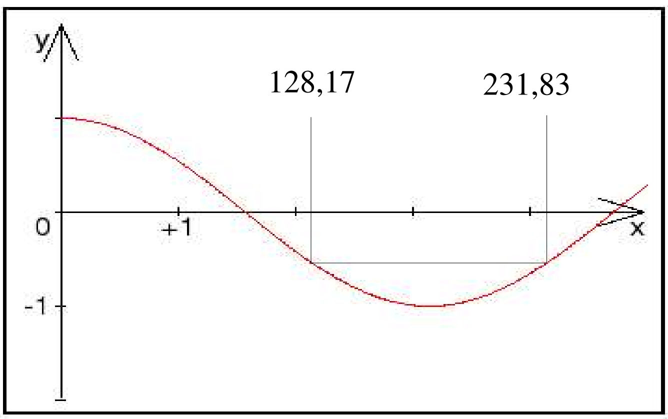
$$\cancel{\cos(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{(5)}}{2}} \qquad\qquad \cos(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(5)} \quad \approx \quad -0{,}618$$

Weil cos(x) nie > 1

$x_1=arcos(-0{,}618)\Rightarrow x_1$ = in Bogenmaß 2,237 = in Grad 128,17°

$x_2=$ = 270°– 38,17°= in Bogenmaß 4,046 = in Grad 231, 83°

= 128,17 – 90 $\quad x_1 k=128{,}17°+k\cdot 360°$ $\qquad x_1 k=231{,}83+k\cdot 360°$



Bsp. 2: Gesucht sind alle Lösungen von $\sin(2x)=\cos(4x)$

1. Schritt Auf gleiche Argumente bringen!
   $\Rightarrow \sin(2x)=1-2\sin^2(2x)$
   Aus der Formelsammlung:
   $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$ daraus folgt :
   $\cos(4x)=1-2\sin^2(2x)$
2. 1 Winkelfaktor hier zufällig gewählt!
   $2\sin^2(2x)+\sin(2x)-1=¿\ 0$

   substituiere $w=\sin(2x) \Rightarrow w^2=\sin^2(2x)$
   $2w^2+w-1=0 \quad |:2$
   $w^2+\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}=0$

   pq-Formel:

   $w_{1,2}=\frac{-1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{8}{16}} \qquad =\frac{-1}{4}\pm\frac{3}{4} \qquad w_1=-1 \qquad w_2=\frac{1}{2}$

   Resubtitution:

   $w_1=-1\Rightarrow\sin(2x)$
   $\Rightarrow 2x_1\Rightarrow arsin(-1)$
   $\Rightarrow 2x_{1k}=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$

   $\boxed{x_{1k}=\frac{3}{4}\pi+k\pi}$ $\rightarrow$ *alle Lösungen von* $\arcsin(-1)$ *haben die Form* $\frac{3}{2}\pi+2k\pi$

   $w_2=\frac{1}{2}=\sin(2x_2)$
   $2x_2=\arcsin(\frac{1}{2}) \qquad 2x_{2,3}=\arcsin(\frac{1}{2}) \qquad 2x_{2K}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

   $x_{2k}=\frac{\pi}{12}+k\pi$
   Lösungen im Intervall $0\leq x\leq 2\pi$
   $x_{3k}=\frac{5}{12}\pi+k\pi$

Def 3a) Seien a, $\omega$ , $\phi \in \mathbb{R}$ , dann heißt die Funktion $y(t)=a\cdot\sin(\omega t+\phi)$ , also eine harmonische Schwingung. Bei vorgegebener Schwingungsdauer (Periode) T $\rightarrow$ $\omega=\frac{2\pi}{T}$ .

1 Schwingung in 1 sec: $A\cdot\sin(\frac{2\pi}{1}\cdot 1\,sec+\phi)=A\cdot\sin(2\pi+\phi)$

Nullstellen von $\sin=k\pi$ $A\cdot\sin(\omega t+\phi)=0 \Leftrightarrow \omega t+\phi=k\pi$

$$\omega t=k\pi-\phi \quad |:\omega$$

$$t=\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\phi}{\omega}$$

$$A\cdot\sin(\omega t+\phi)=A\cdot(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2})$$

Bsp 4: Welche harmonische Schwingung entsteht durch Überlagerung von $y_1=5\cdot\sin(t+\frac{\pi}{2})$ und $y_2=4\cdot\sin(t)$

1. Ablesen der Werte a, $\omega$ , $\phi$ ergibt

zu $y_1$ : $\omega_1=1$ $a_1=5$ $\phi_1=\frac{\pi}{2}$

zu $y_2$ : $\omega_2=1$ $a_2=4$ $\phi_2=0$

wegen $\omega_1$ = $\omega_2 \Rightarrow$ Satz 3 anwendbar und $\omega_1=\omega_2=1$

Bestimmung a und $\phi$

$$\begin{aligned} a&=\sqrt{a_1^2+a_2^2+2\,a_1 a_2\cdot\cos(\phi_2-\phi_1)}\\ &=\sqrt{25+16+40\cdot\cos(\frac{-\pi}{2})}\\ &=\sqrt{41}\\ &=6,403 \quad \rightarrow \text{ Amplitude}\end{aligned}$$

$$\tan\phi=\frac{5\cdot\sin(\frac{\pi}{2})+4\cdot\sin(0)}{5\cdot\cos(\frac{\pi}{2})+4\cdot\cos(0)} \qquad =\frac{5\cdot 1+4\cdot 0}{5\cdot 0+4\cdot 1} \qquad =\frac{5}{4}$$

$\phi=\arctan\frac{5}{4}=0{,}896055=51{,}34\,^\circ$ + weitere Lösungen

daraus folgt für die neue Schwingung: $y(t)=6{,}403\cdot\sin(t+\underline{0{,}896})\rightarrow$ <u>nicht in Grad angeben!</u>

Injektiv

| | | |
|---|---|---|
| Arcus sin | -1 | 1 |
| Arcus cos | 0 | $\pi$ |
| Arcus tan | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

# Arkusfunktionen

Bei Arkusfunktionen erhält man stets unendlich viele Funktionswerte

Bsp. : 1

| | |
|---|---|
| y $= \arcsin \frac{1}{2}$ | Hauptwert gesucht |
| $=30° = \frac{\pi}{6}$ | Probe: sin(30°) = $\frac{1}{2}$ |

Bsp. 2 : Gesucht ist der Definitionsbereich von f: $x \rightarrow y \quad = \quad \frac{\pi}{4} - \arcsin(x+1)$

Definitionsbereich von $\arcsin z$ ist $-1 \leq z \leq 1$ . Setze z = x + 1

$$-1 \leq x+1 \leq 1 \qquad |-1$$

$$-2 \leq x \leq 0 \qquad \text{d.f.} \quad D_f = [-2,0]$$

Bsp. 3: Gesucht ist die Auflösung der folgenden Gleichung nach x: $y = \sqrt[3]{\arcsin(k-x)+4}$

$$y^3 = \arcsin(k-x)+4 \qquad |-4$$

$$y^3 - 4 = \arcsin(k-x) \qquad |\sin$$

$$\sin(y^3-4) = k-x \qquad |-k$$

$$k - \sin(y^3-4) = x$$

Bsp. 4: $\frac{\sin(4x)}{\sin(2x)} \quad = \quad \frac{2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)}{\sin(2x)} \quad = \quad 2\cos(2x)$

Merke : sin(2x) = 2 sin(x) cos (x)

Bsp. 5: Wichtige Werte der Arcus – Funktion:

arctan (0) = 0 arccot(0) = $\frac{\pi}{2}$

arctan(+- 1) = $\pm \frac{\pi}{3}$ arccot(1) = $\frac{\pi}{4}$ und arccot(-1) = $\frac{3}{4}\pi$

arccos ( 0) = $\frac{\pi}{2}$ arcsin ( 0 ) = 0

arccos ( -1 ) = $\pi$ arcsin (+- 1) = $\pm \frac{\pi}{2}$

# Exponential- und Logarithmusfunktionen

$a^{\frac{p}{q}}$ $a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$a^x$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^{>0}$

Funktionen vom Typ y = a^x heißen Exponentialfunktion.

Def. 1. a > 1 Streng monoton wachsend

a < 1 Streng monoton fallend

$$e^x \rightarrow e = \lim_{n\rightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828.......$$

Def. 1A Gegeben sei die Euler'sche Zahl e = 2,71828.....

Dann heißt die folgende Exponentialfuntktion e – Funktion

$\mathbb{R}^{\rightarrow} R^r$

$x^{\rightarrow} y = e^x = exp.(x)$

Bem. 1 Es gilt allgemein :

$$a^x = e^{l(a^x)} = \boxed{e^{x\,lna}}$$

Bsp.:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$$

$$\frac{3^5}{3^7} = 3^{5-7} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(2^3)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15} = 32768$$

Logarithmus :

$$x = a^y \quad \Rightarrow \quad y = \log_a x$$

$$= \log_a(a^y)$$

Rechenregel :

1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$ *Bsp:* $\log_2(8\cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3+2 = 5$

2) $\log_a(\frac{u}{v}) = loga\,u - \log_a v$ *Bsp:* $\log_3(\frac{81}{27}) = \log_3 81 - \log_3 27 = 4-3 = 1$

3) $\log_a u^n = n \cdot \log_a u$ *Bsp:* $\log_5 125^4 = 4 \cdot \log_5 125 = 4 \cdot 3 = 12$

Bsp. :

$$\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}=\left(\frac{1}{\log_b(a)}\right)\cdot\log_b(x)$$

$$\log_3(\frac{81}{27})=\frac{\log(\frac{81}{27})}{\log(3)}=1$$

Umrechnung von lg 2 nach ln 2: $\ln 2\Rightarrow\log_e(2)=\frac{lg_{10}(2)}{lg_{10}(e)}$

# Hyperbel – und Areafunktionen

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \qquad \cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \coth x=\frac{e^x+e-x}{e^x-e-x}$$

*Beziehungen:*

$$\tanh x=\frac{sinhx}{\cosh}x=\frac{e^2x-1}{e^2x+1}=\frac{e^2x+1-2}{e^2x+1}=1-2\frac{x}{e^2}x+1 \qquad \coth x=\cosh\frac{x}{sinhx}=\frac{1}{\tanh}x$$

$\sinh(x)$ *ist eine ungerade Funktion!*

*Achsensymetrie* $f(x)=f(-x)$ *Punktsymetrie* $f(x)=-f(-x)$

*Bew. Auf linker Seite!*

*d.h.:* $\sinh(x)=-\sinh(-x)$

*Es gilt* $|\tanh|(x)<1$ *weiter gilt:* $\cosh^2x-\sinh^2x=1$ $\quad \operatorname{arsinh}(1{,}5)=\ln(1{,}5+\sqrt{1{,}5^2+1})$

*d.h.:* $\operatorname{arsinh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $\quad \operatorname{arcosh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $\quad \operatorname{artanh}(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

*Bew. von* 1 in *Satz* 2 $\quad y=\sinh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ $\quad$ *Berechnung der Umkehrfunktion*

1) *Vertausch x und y*

$$x=\sinh(y)=\frac{1}{2}(e^y-e^{-e}) \quad |\cdot\ e^y$$

$$x\cdot e^y=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})\cdot e^y \qquad d.h.:xe^y=\frac{1}{2}(e^2y-1)$$

$$\Rightarrow 0=\frac{1}{2}e^2y-\frac{1}{2}\cdot xe^y \quad |\cdot\ 2$$

$$e^2y-2xe^y-1=0$$

$$e^2y-2xe^y+x^2=(x^2+1)$$

$$(e^y-x)^2=x^2+1 \quad |\sqrt{()} \qquad |e^y|-x=\sqrt{x^2+1} \qquad \Rightarrow e^y=x\pm\sqrt{x^2+1}$$

*Es gilt* $e^y>0$ $\quad$ *aber* $x-\sqrt{x^2+1}<0$

*d.h.:* $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$ $\quad |\ln \quad \rightarrow \quad y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \quad =\operatorname{arsinh}(x)$

# Differentialrechnung

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(a_n)=a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$

Beispiele:

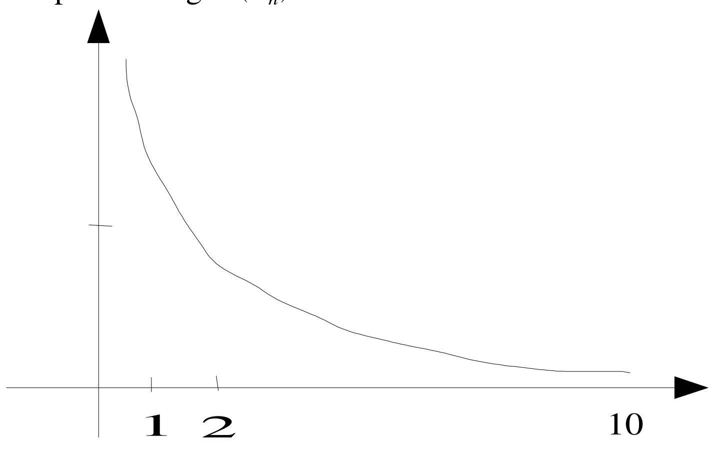
1. f:

**1.** *f:* $\left.\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\to n^2\end{array}\right\}$ $a_n:=n^2 \quad bzw. (a_n)=1,4,9,16,25, \ldots. n\circ 2$

**2.** *f:* $\left.\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\to\dfrac{1}{n}\end{array}\right\}$ $b_n:=\dfrac{1}{n} \qquad bzw. \ (b_n)=1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots.., \dfrac{1}{n},$

**3.** *f:* $\left.\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\to(-1)^n\cdot 2^{-n}\end{array}\right\}$ $c_n:=(-1)^n\cdot 2^{-n} \qquad bzw. (c_n)=\dfrac{-1}{2,}+\dfrac{1}{4,}-\dfrac{1}{8,}+\dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{32}$

4.) Graph der Folge $(b_n)$



arithmetische Folge:

$d = a_{n+1} - a_n$ $\qquad$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

geometrische Folge:

$q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $\qquad$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Bsp Gegeben sei eine arithmetische Folge, sowie $a_2 = 6 \quad \wedge \quad a_5 = 15$ .
Gesucht : Bildungsgesetz

$a_2 = a_1 + (2-1) \cdot d = a_1 + d$ $\qquad$ *und*
$a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d = a_1 + 4d$

Insgesamt durch Addition:

$$\begin{array}{l} 6 = a_1 + d \\ \underline{15 = a_1 + 4d} \\ -9 = \quad -3d \end{array} \qquad d = 3 \quad und \quad a_1 = 3$$

Bsp zu (2) Verzinsung eines Anfangskapitales K_0 mit p % Zinsen / Jahr

Zinsen nach 1 Jahr $\quad K_0 \left( \dfrac{p}{100} \right)$

Kapital nach 1 Jahr $\quad K_1 = K_0 + K_0 \left( \dfrac{p}{100} \right)$

Zinsen nach 2 Jahren $\quad K_1 \left( \dfrac{p}{100} \right)$

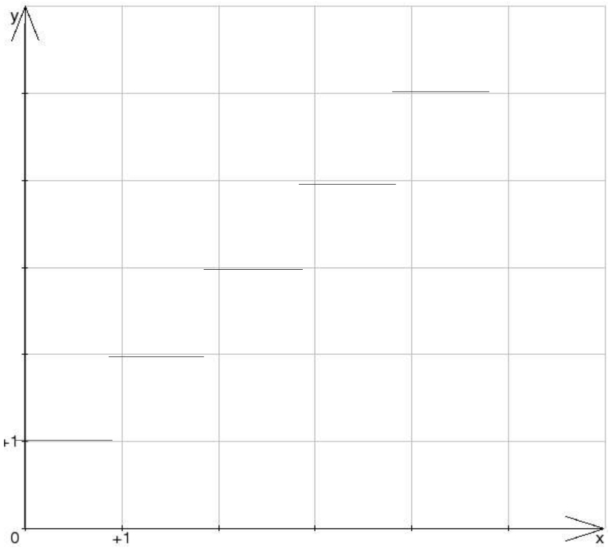
Kapital nach 2 Jahren $\quad K_1 + K_1 \left( \dfrac{p}{100} \right) = K_2$

$= \quad K_1 \left( 1 + \dfrac{p}{100} \right) = K_0 \left( 1 + \dfrac{p}{100} \right)^2$

allgemein: $\quad K_n = K_0 \left( 1 + \dfrac{p}{100} \right)^n$

# Stetigkeit und Unstetigkeit

Bsp 1: die Funktion f(x) = 5n, wenn n-1 < x <= n $n \in \mathbb{N}$ . Untersuche sie Stellen $x_n 0 = n$ auf Stetigkeit.




$$f(x_n) = 5_n$$

$$\lim_{x \nearrow n} f(x) = 5_n \qquad \textit{von links}$$

$$\lim_{x \nwarrow n} f(x) = 5(n+1) \qquad \textit{von rechts}$$

Daraus folgt : $\lim f(x)$ existiert nicht!

Daraus folgt : f ist nicht stetig in den Stellen $x_1 = n$

Bsp 2: f(x) = $\dfrac{1}{x-2}$ ist Unstetig an der Stelle x = 2, da gilt:

a) f(2) existiert nicht, da $\{2\} \in D$

b) $\lim\limits_{x \nearrow 2} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ , $\lim\limits_{x \nwarrow 2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

jedes Argument allein, reicht aus als Begründung für die Unstetigkeit.

Bsp 3: f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

Kürzen ergibt $\tilde{f}(x) = x+2$ mit $f(x) = \tilde{f}(x)$ *für* $\tilde{f}(2) = 4$ $x \neq 2$

f ist nicht stetig bei x = 2, da $\{2\} \notin D$ Grenzwert existiert aber: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Schließen der Definitionslücke durch.

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \qquad f^* \;\; ist \;\; stetig \; \forall x$$

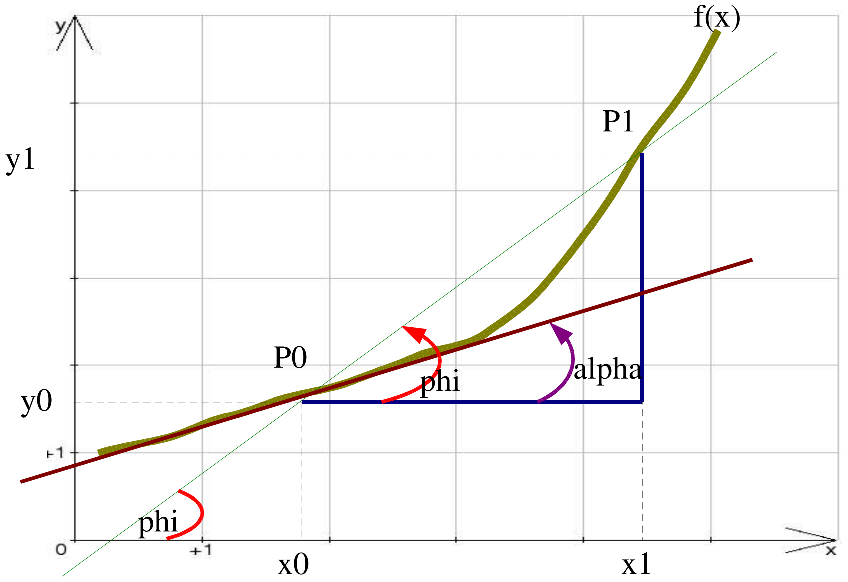
$y = \tan x = \dfrac{sinx}{\cos x}$ ist stetig nach Satz 2. Für $x \neq \dfrac{(2h+1) \cdot \pi}{2}$ $h \in \mathbb{R}$

# Der Begriff der Ableitungsfunktion

Sei f stetig [a;b] $\to \mathbb{R}$ $\qquad x \to f(x)$

Gesucht: Steigung von f an einer beliebigen Stelle. $x_0 \in$ [a;b]

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$




Die Steigerungsgrade wird Sekante genannt!

$$\textit{Steigung der Sekante}: \overline{P_0 P_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$m_s := \tan \phi_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\textit{Differentierquotient}}$$

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \tan \alpha = m_t \qquad , x_1 \neq x_0$$

$$f'(x) = y'(x) := \frac{\lim}{\Delta x \to 0} \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Merke : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x \Delta x - x}$

Bem 1 : An Unstetigkeitsstellen ist eine Funktion nicht differentierbar
Bsp 1) ----

Bem 2 : Es gibt Funktionen , die sind stetig ( in $x_0$ ) aber dort nicht differentierbar!

Bsp. 2) $f(x)=|x|$

- von links $\tan 135° = m_t = -1$
- von rechts $\tan 45° = m_t = +1$

$\Rightarrow$ Grenzwert der Differenzenquotienten existiert nicht ! $\rightarrow (\textit{für } x \rightarrow 0)$

Bsp 3) ( Berechnung einer Ableitung „zu Fuß“)

Gesucht ist die Ableitung :

$$y' = f'(x) \, zu \, y = f(x) = x \, ? \, x = fest, beliebig$$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x$$

Merke : Konstante Funktionen haben Ableitung 0 !

Beispiele :

1) $y = 7x^4 - 2x^3 + x - 5$

$$y' = 7 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \cdot 1x^0 - 0$$

$d.h.: y' = 28x^3 - 6x^2 + 1$

2) $y = \sqrt{3}x^2 - 0{,}75x + \pi$

$$y' = 2 \cdot \sqrt{3} - x^1 - 0{,}75x \cdot 1$$

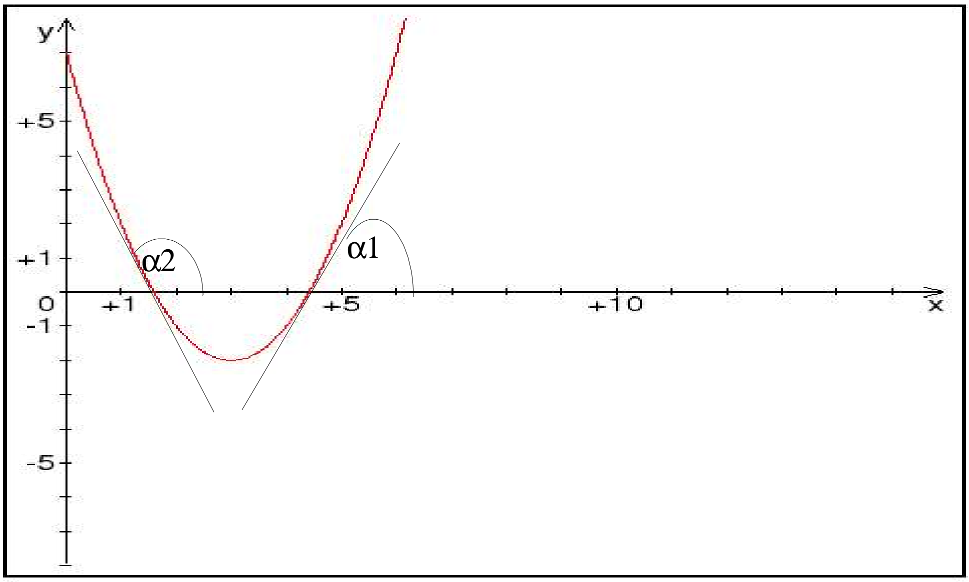
$$y' = 2 \, sqrt3x - 0{,}75$$

3) $y = \sum_{i=0}^{n} a, x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ..... + a_1 x + a_0$

$$y' = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1}(n-1) \cdot x^{n-2} + a_{n-2}(n-2) \cdot x^{n-3} + ... a_1$$

$d.f.: \quad y' = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i x^{(i-1)}$

4 ) Unter welchen Winkeln schneidet die Parabel $y=x^2-6x+7$ die x-Achse ?




a) Bestimmung der Nullstellen :

$$x^2-6x+7=0$$
$$pq-Formel\ x_{1,2}=\frac{+6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-7}$$
$$=3\pm\sqrt{9-7}$$
$$=3\pm\sqrt{2}$$
$$x_1=3+\sqrt{2}=4{,}4142$$
$$x_2=3-\sqrt{2}=1{,}5858$$

b) Ableitung $(\text{in}\ x_1 \wedge x_2)$

Ableitungsfunktion : y' = 2x - 6

c) Steigung zu $x_1$ :

$$f'(x_1)=f'(4{,}4142)=2x_1-6$$
$$=2{,}8284$$
$$f'(x_1)=\tan\alpha_1=2{,}8284$$
$$\alpha_1=\arctan 2{,}8284\approx 70{,}53°$$

Steigung zu $x_2$ :

$$f'(x_2)=f'(1{,}5858)=2x_2-6=-2{,}8284$$
$$\Rightarrow \alpha_2=\arctan(-2{,}8284)=109{,}47°$$

Produktregel :

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$$
$$f'(x)=u'v+v'u$$

Bsp.:

$$y=(x^2-7x+5)\ (x^3-1)$$
$$u'=2x-7 \qquad u=x^2-7x+5$$
$$v'=3x^2 \qquad v=x^3-1$$
$$(2x-7)\cdot(x^3-1)+(3x^2)\cdot(x^2-7x+5)$$
$$y'=(\cancel{2x^4}-2x-7x^3+7)+\cancel{3x^4}-21x^3+15x^2$$
$$y'=5x^4-28x^3+15x^2+2x+7$$

## Produktregel :

$$\boxed{\begin{array}{l} y=f(x)u(x)\cdot v|x|=u\cdot v \\ y'=u'\cdot v+u\cdot v' \end{array}}$$

Bsp.1 )

$$y=(x^2-7x+5)\cdot(x^3-1) \qquad u=x^2-7x+5 \qquad v=x^3-1$$
$$u'=2x-7 \qquad v'=3x^2$$
$$y'=(2x-7)\cdot(x^3-1)+(x^2-7x+5)*3x^2$$
$$y'=2x^4-2x-7x^3+7+3x^4-21x^3+15x^2$$
$$y'=5x^4-28x^3+15x^2-2x+7$$

Bsp 2)

$$y=\quad u \cdot \quad v \quad \cdot \quad w$$
$$y=(x-1)\cdot(2x-3)\cdot(7-x)$$
$$y'=1\cdot(2x-3)\cdot(7-x)+(x-1)\cdot 2\cdot(7-x)+(x-1)\cdot(2x-3)\cdot(-1)$$
$$u'\cdot \ v \ \cdot \ w \ + \ u \ \cdot v'\cdot \ w \ + \ u \ \cdot \ v \ \cdot w'$$
$$=-6x^2+38x-38$$

## Quotientenregel :

$$\boxed{\begin{array}{l} y=f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u}{v} \\ y'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2} \end{array}}$$

Herleitung: $\Rightarrow \dfrac{u}{v}=u\cdot v^{-1}=u'\cdot v^{-1}+u(-1)\cdot v^{-2}\cdot v'=\dfrac{u'\cdot v}{v\cdot v}-\dfrac{u\cdot v'}{v^2}=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

Bsp 1:

$$y=\frac{x^2-3x+1}{2x-7}= \qquad y'=\frac{(2x-3)\cdot(2x-7)-(x^2-3+1)\cdot 2}{(2x-7)^2}$$
$$y'=\frac{2x^2-14x+19}{(2x-7)^2}$$

Bsp 2:

$$y = x^3 - x + \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x} \qquad \Rightarrow y = x^3 - x + x^{-4} - 2x^{-1}$$

$$y^I = 3x^2 - 1 - 4x^{-5} + 2x^{-2} \qquad \Rightarrow y^I = 3x^2 - 1 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2}$$

## Die Kettenregel

$$Y^I = F^I(x) = f^I(z) \cdot g^I(x) \quad = \quad f^I(g(x)) \cdot g^I(x) \qquad\qquad z = g(x)$$

Bsp 1)

$$y = (1-3x)^4 \qquad \mathit{mit} \quad z = 1-3x \quad \mathit{folgt} \quad y = z^4$$

$$y^I = 4z^3 \cdot (-3) \qquad (-3) = \mathit{innere\ Ableitung\ von}\ 1-3x\ \mathit{also\ als\ Formel:}$$

$$y^I = f^I(z) \cdot g^I(z)$$

$$\Rightarrow y^I = 4(1-3x)^3 \cdot (-3)$$

Bsp 2:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathit{mit}\ z = 1+x^2 \qquad \mathit{folgt} \quad y = \frac{1}{z} = z^{-1}\ \mathit{und}\ y^I = -1 \cdot z^{-2}$$

$$y^I = f^I(z) \cdot g^I(x) = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x \qquad \mathit{daraus\ folgt} \quad y^I = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Bsp 3:

$$(\sqrt[n]{x})^I = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^I = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{-1*n}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{1-n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}$$

Bsp 4:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Bsp 5:

$$y = \sqrt{3x^2 - 7x + 5} = (3x^2 - 7x + 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 7x + 5}} \cdot (6x - 7) = \frac{6x-7}{\sqrt{3x^2 - 7x + 5}}$$

Bsp 6:

$$y=\sqrt[7]{x^3}=x^{\frac{3}{7}}$$

$$y'=\frac{3}{7}x^{\frac{3}{7}-1}=\frac{3}{7}x^{\frac{-4}{7}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{7}}}=\frac{3}{7\cdot\sqrt[7]{x^4}}$$

Bsp 7:

$$y=\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}=(\frac{x}{1-x^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$u=x \qquad u'=1 \qquad v=1-x^2 \qquad v'=2x$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}\cdot\frac{(1-x^2)\cdot 1-x(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}\cdot\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

## Ableitungsbeispiele

Mit sin und cos

$$y=4\cdot\sin^2(\frac{x}{2}-1)$$

$$y'= 2\cdot 4\cdot\sin(\frac{x}{2}-1)\cdot\cos(\frac{x}{2}-1)\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\sin(\frac{x}{2}-1)\cos(\frac{x}{2}-1) = 2\sin(x-2)$$

$$y=\sqrt{1+\cos^2(x)}$$

$$y'=\frac{1}{2}(1+\cos^2(x))^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = -\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

$$y=\frac{1}{\sin^2}(x)=\sin^{-2}(x)$$

$$y'=-2\cdot\sin^{-3}(x)\cdot\cos(x)=-2\cdot\frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

## Mit arcsin

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{(1-x^2)^2}}}\cdot\frac{1}{2}\frac{}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2}}\frac{\cdot 1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\cos(\arcsin(\frac{1}{x}))$$

$$y'=-\sin(arsin(\frac{1}{x}))\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\frac{\cdot x}{\cdot x}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

## Mit lg und e

$$y=\log_a(1+x^2)$$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}\log_a e\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}\log_a e$$

$$y=lg(\cos x)$$

$$y'=\frac{1}{\cos x}\cdot lg\,e\cdot(-\sin x)=-\tan(x)\cdot lg\,e$$

$$y=e^{-k^2x^2}$$

$$y'=e^{-k^2x^2}\cdot(-k^2\cdot 2x)=-2k^2x\cdot e^{-k^2x^2}$$

$$y=x^x \quad\Rightarrow\quad \ln y=x\cdot\ln x=e^{x\cdot\ln x}$$

$$y'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x+\frac{x}{x})=x^x\cdot(\ln x+1)$$

## Weitere Ableitungsbeispiele

$$y=\sinh^3 x \quad\Rightarrow\quad y'=3\cdot\sinh x\cdot\cosh$$

$$y=\ln\sqrt{\cosh x} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{\sqrt{\cosh x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\cosh}\,x\cdot-\sinh x=\frac{1}{2}\tanh x$$

$$y=e^{\tanh^2(x)^2} \quad\Rightarrow\quad y'=e^{\tanh^2(x)^2}\cdot 2\cdot\tanh(x^2)\cdot(1-\tanh^2(x)^2)\cdot 2x$$

$$y=\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x^2-1}^2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=\ln(\operatorname{arcosh}(\sqrt{x})) \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{\operatorname{arcosh}(\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}^2-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\operatorname{arcosh}\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x(x-1)}$$

$$y=\sin 3x+\cos 2x \quad\Rightarrow\quad y'=3\cos(3x)-2\sin 2x$$

$$y=\tan x^2 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{\cos^2(x^2)}\cdot 2(x)=\frac{2(x)}{\cos^2(x)^2}$$

$$y=\tan^2 x \qquad \Rightarrow \qquad y'=2\tan\frac{(x)\cdot 1}{\cos^2}(x)$$

$$y=\cot(1-2x^2) \qquad \to \cot'=-1-\cot^2 x$$
$$y'=(-1-\cot^2(1-2x^2))(-4x)=4x(1+\cot^2)(1-2x^2)$$

## Höhere Ableitung und Taylor Formel

$$f^{III}=f^{(3)} \quad ;\cancel{f^{III}}=f^{(4)}=f^{IV}$$

Beispiele :

Sei $f:\to\frac{1}{x}=x^{-1}\, gegeben\, D=\mathbb{R}\ \backslash\{0\}$

$$f^{I}(x)=y^{I}=-1x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$
$$y^{II}=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$$
$$y^{(3)}=y^{III}=-6x^{-4}=\frac{-6}{x^4}$$

Allgemein: $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$

Höhere Ableitung von Polynomen .

$$y=2x^4-5x^3+x^2+6x-4$$
$$y'=8x^3-15x^2+2x+6$$
$$y^{II}=24x^2-30x+2$$
$$y^{III}=48x-30$$
$$y^{(4)}=48$$
$$y^{(5)}=0 \qquad ab\, n=6 \quad y^{(n)}=0$$

## Die Ableitung eines allgemeinen Polynoms :

$$f(x)= \quad a_n x^n+ \quad a_{n-1} x^{n-1}+ \quad a_{n-2} x^{n-2}+....+a_1 x+a$$
$$f^I(x)=n\cdot a_n\cdot x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+...+a_1$$
$$f^{II}(x)=(n-1)n\,a_n x^{n-2}(n-1)a_{n-1}x^{n-3}+(n-3)(n-2)a_{n-2}x^{n-4}+2a_2$$
$$f^{III}(x)=(n-2)(n-1)n\,a_n^{n-3}+(n-3)(n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-4}+(n-4)(n-3)(n-2)a_{n-2}x^{n-5}+6a_3$$
$$\Rightarrow f^{(4)}=2\cdot 3\cdot 4....(n-2)(n-1)\cdot n\cdot a_1$$

Setze überall 0 ein:

$$f(0)=a_0$$
$$f^I(0)=a_1=1\,a_1=1!\,a_1$$
$$f^{II}(0)=2\,a_2=2!\,a_2$$

*d.h. Allgemein gilt für die* $i-te$ *Ableitung* $0\leq i\leq n$

$$f^{III}(0)=6\,a_3=3!\,a_3$$

$f^{(i)}(0)=i!\,a_i$ *oder* $\quad a_i=\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$

$$f^{(n)}(0)=n!\,a_n$$

$$\Rightarrow f(x)=f(0)+\frac{f^I(0)}{1!}x+\frac{f^{II}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

*Satz* 2 *; Seite* 69 im *Umdruck*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^I(x_0)}{1!}x\cdot(x-x_0)+\frac{f^{II}(x_0)}{2!}x\cdot(x-x_0)^2+...+\frac{f^n(x_0)}{n!}x\cdot(x-x_0)^n$$

Bsp 1:

$f(x)=x^4+2x^3-x^2+3x+1 \quad$ *und* $x_0=-2 \quad \Rightarrow f(x_0)=-9$

$f^I(x)=4x^3+6x^2-2x+3 \quad f^I(x_0)=-1$

$f^{II}(x)=12x^2+12x-2 \quad f^{II}(x_0)=22$

$f^{(4)}(x)=24x+12 \quad f^{(4)}(x_0)=-36$

$f^{(5)}(x)=24 \quad f^{(5)}(x_0)=24$

Insgesamt: f(x) = $-9-(x-(-2))+11(x+2)^2-6(x+2)^3+1(x+2)^4$

$$b_0=-9 \qquad b_1=-1 \qquad b_2=11 \qquad b_3=-6 \qquad b_4=1$$

schlechtes Bsp: $\quad f(v)=a_2 v^2+a_1 v+a_0 \qquad f(100)=40\,m\rightarrow \quad f^I(100)=$

Bsp: $f(x)=e^x$ $\quad x_0=0 \quad \Rightarrow f(x_0)=f(0)=1$

Es gilt: $f^I(x)=e^x \quad f^I(x_0)=1$

$f^{II}(x)=e^x \quad f^{II}(x_0)=1$

$f^{III}(x)=e^x \quad f^{III}(x_0)=1$

Ableitungen :

$$(x^{\frac{p}{q}})'=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\tan(x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=(\sin(x)\cos^{-1}(x))'=$$
$$=\cos(x)\cos^{-1}(x)+\sin(x)(-1)\cos^{-2}(x)(-\sin x)$$
$$=1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$
$$=1+\tan^2(x)$$

Bsp. :

1) $y=4\sin^2(\frac{x}{2}-1) \qquad =4[(\sin(\frac{x}{2}-1))]^2$

$$y'=4\cdot\cancel{2}[\sin(\frac{x}{2}-1)]\cdot\cos(\frac{x}{2}-1)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$$
$$=4\cdot\sin(\frac{x}{2}-1)\cos(\frac{x}{2}-1)$$
$$=2\sin(2(\frac{x}{2}-1))$$
$$=2\sin(x-2)$$

2) $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot 2\cdot\cos(x)(-\sin(x))$$
$$=\frac{-\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

3) $y=\frac{1}{\sin^2(x)}=\sin^{-2}(x)$

$$y'=-2\sin^{-3}(x)\cdot\cos(x)$$
$$=\frac{-2\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

# Ableitung trigonometrischer Funktion

$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x) \qquad (-\sin(x))' = -\cos(x) \qquad (-\cos(x))' = \sin(x)$

$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \qquad (\cot(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$

Gutes Beispiel.

$$
\begin{aligned}
Y(x) &= \sin(x) - \sin^2(x) && |\,\textit{aufdröseln des Quadrates} \\
y'(x) &= \cos(x) - \sin(x)\sin(x) && |\,\textit{Produktformel anwenden} \\
&= \cos(x) - \cos(x)\sin(x) - \sin(x)\cos(x) && |\,\textit{Zusammenfassen} \\
&= \cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) && |\,\textit{sortiert} \\
&= -2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= -2\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) + \cos(x) \\
&= -2\cos^2(x) - \sin^2(x) \qquad -\sin(x) \\
& \qquad \Rightarrow \quad -\sin^2(x) = \cos^2(x) - 1 \\
&= -2\cos^2(x) + \cos^2(x) - 1 \qquad -\sin(x) \\
&= -2\cot 2\cos^2(x) - 1 \qquad -\sin(x) \\
&= -4\cos^2(x) + 2 - \sin(x) \\
&= -4\cos^2(x) - \sin(x) + 2
\end{aligned}
$$

## Ableitung von Arcos – Funktionen

$$(\mathit{arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad , |x| < 1$$

$$(\mathit{arc}\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad , |x| < 1$$

$$(\mathit{arc}\tan x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\mathit{arc}\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Merke : $\mathit{arc}\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .... siehe oben

Beispiele :

1) $y=\arcsin(\sqrt{1-x^2})=\arcsin(\sqrt{(1-x\cdot x)})$

$$y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^2}}\cdot 1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)$$

$$=-1\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y=\cos(\arcsin(\frac{1}{x}))$

$$y'=-\sin(\arcsin(\frac{1}{x}))\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\cdot -1\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{1\cancel{x}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

## Ableitung von Logarithmus und Exponentialfunktionen

$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$

*Speziell fürl Logarithmus naturalis :*

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

*Exponentialfunktionen :*

$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

*Basis e :*

$(e^x)'=e^x!$

Beispiele :

1) $y=\log_a(1+x^2)$ $\quad (1+x^2)'$ $\downarrow$

$$y'=\frac{1}{(1+x^2)}\cdot\log_a e\cdot 2x$$

$$=2\frac{x}{(1+x^2)}\log_a e$$

2) $y=e^{k^2x^2}$

$$y'=e^{-k^2x^2}\cdot(-2k^2x)$$

$$=-2k^2x\cdot e^{-k^2x^2}$$

3) $y=\log(\cos(x))$

$$y'=\frac{1}{\cos(x)}\cdot\log e\cdot -\sin(x)$$

$$=-\tan(x)\cdot\log e$$

4) $y=x^x$ *d.h.:* $\ln(y)=\ln(x^x)$ $\quad x>0$

$$=\ln(y_{(x)})=x\ln x$$

$$=\frac{1}{y_{(x)}}\cdot y'(x)=lnx+\frac{x\cdot 1}{x}=\ln x+1$$

$$y'(x)=(\ln(x)+1)\cdot y(x)=x^x(\ln(x)+1)$$

## Ableitung von Hyperbel und Areafunktionen

Hyperbel:

$$(\sinh x)' = \cosh \ x$$
$$(\cosh x)' = \sinh \ x$$
$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$
$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$
$$x \neq 0$$

Area :

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad , |x| > 1$$
$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad , |x| < 1$$
$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad , |x| > 1$$

Beispiele:

1) $y = \sinh^3(x)$
$$y' = 3\sinh^2(x) \cdot \cosh(x)$$

2) $y = \ln(\sqrt{\cosh(x)})$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{\cosh x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cosh x}} \cdot \sinh x$$
$$= \frac{1}{2}\tanh(x)$$

3) $y = e^{\tanh^2(x^2)}$
$$y' = e^{\tan^2(x^2)} \cdot 2\tan(x^2) \cdot (1 - \tanh^2(x^2)) \cdot 2x$$

1) $y = \operatorname{arsinh}(\sqrt{x^2-1'})$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x^2-1}'^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\cancel{2}x = \frac{1 \cdot \cancel{x}}{\cancel{\sqrt{x^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

2) $y = \ln(\operatorname{arcosh}(\sqrt{x}))$
$$y' = \frac{1}{\operatorname{arcosh}(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{2 \cdot \cancel{\cos} \operatorname{arcosh}(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x(x-1)}}$$

# Kurvenuntersuchung

1. Definitions und Wertebereich
2. Symmetrieeigenschaften
3. Bestimmung des Verhaltens bei $\pm\infty$
4. Nullstellen, Schnittpunkte mit y- Achse } Kurvendiskussion
5. Pol, Lücken, Asymptoten
6. Die ersten 3 Ableitungen
7. minima, maxima
8. Wendepunkte
9. Wertetabelle und Skizze

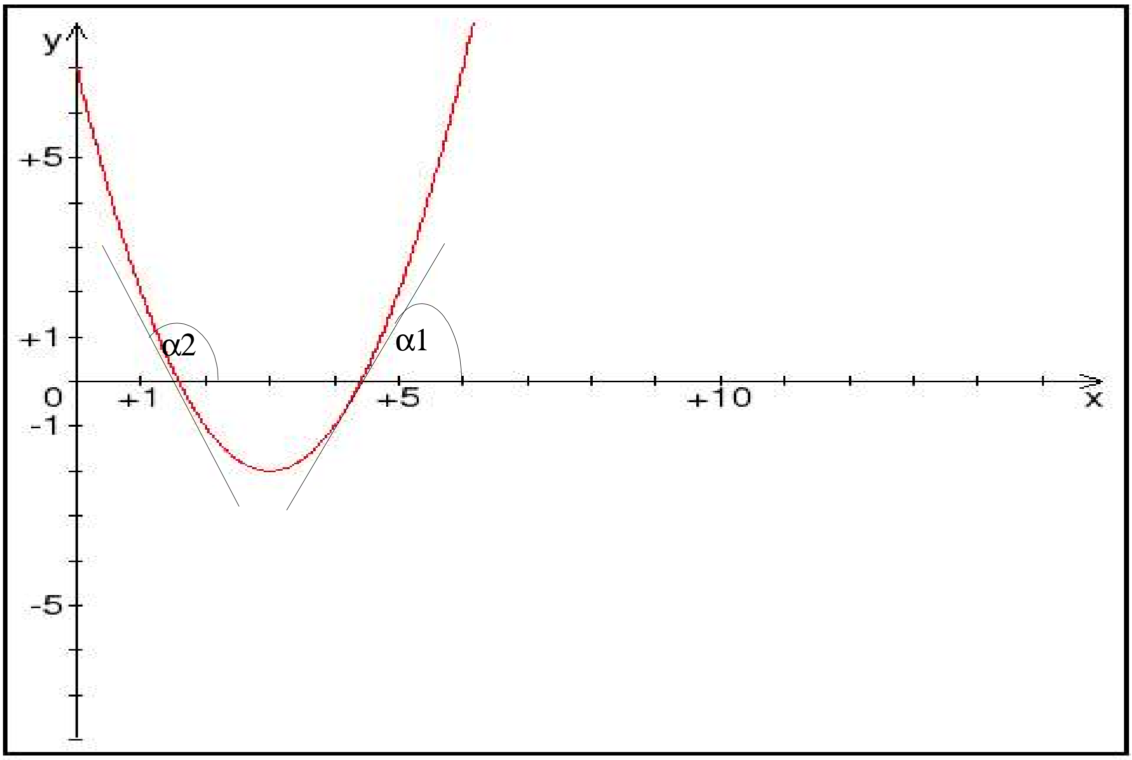
Skript S. 76

$g'(x)>0 = s.m.\ steigend$

$f'(x)<0 = s.m.\ fallend$

Bsp.1):

$y=f(x)=x^2-4 \quad d.h.: \quad f'(x)=2x$




$\alpha_1$ = spitzer Winkel ( 0 – 90°) $\tan(\alpha_1)>0$

$\alpha_2$ = stumpfer Winkel > 90° $\tan(\alpha_2)<0$

Bsp. 2): Gegeben sei : $f(x)=x^3-3x^2+1$
Gesucht Extrem – Werte !

1. D = R
$\cancel{f'(x)=3x^2-6x}$

Extremstellenkandidaten liegen vor bei :

$$f'(x)=0$$

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x-6)=0$$

$$x_{E1}=0$$

$$x_{E2}=2$$

Parabel – Scheitelpunktform :
Quadratische Ergänzung

$$3x^2-6x=3(x^2-2x+1)-3$$

$$=3(x-1)^2-3$$

Bei $x_{E2}=2$ liegt Minimum vor , bei $x_{E1}=0$ liegt Maximum vor

Aus Satz 2 folgt : Nur Anhand der Graphik abzulesen . Punktweise Konstruktion der Hyperbel

$$|r-r'|=2a$$

Ein Kreis um F mit Radius r und ein Kreis um F ' mit Radius r' $= \begin{matrix} \alpha a+r \\ -2a+r \end{matrix}$ schneiden sich in Punkten

des $\begin{Bmatrix} rechten \\ linken \end{Bmatrix}$ Hyperbelast.: Formel f für Tangente ähnlich der für den Kreis. Beweis:

Sei P(x,y) Punkt der unverschobenen Parabel .

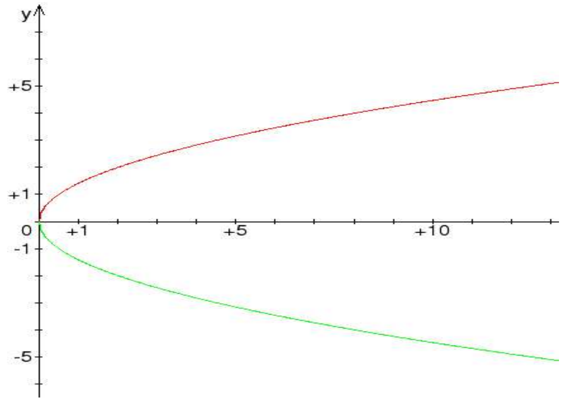
Gleichung für Verschiebungslage erhält man wieder durch :

Ansatz: $\vec{x}=x+x_s$ *bzw.* $\vec{y}=y+y_s$ $\Rightarrow x=\vec{x}-x_s$ $\Rightarrow$ $y=\vec{y}-y_s$

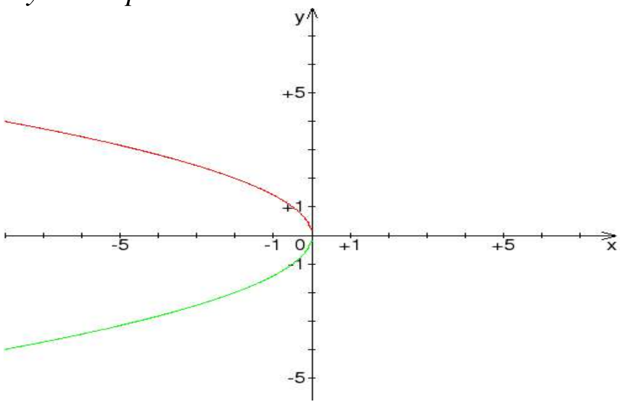
Einsetzen in $y^2=2px$ liefert $(\vec{y}-y_s)^2=2p(\vec{x}-x_s)$

Es gibt 4 mögliche Lagen für Parabeln:

**1)** $y^2=2\,px$ $\qquad x\geq 0$

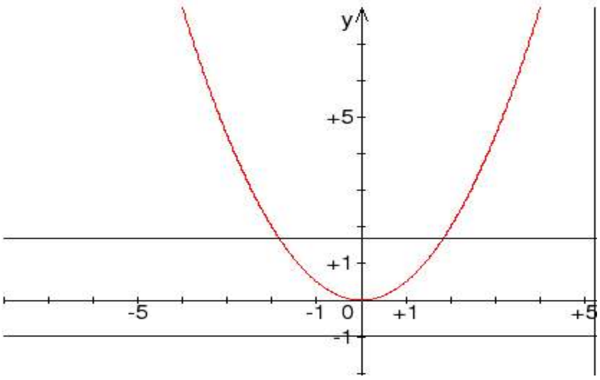


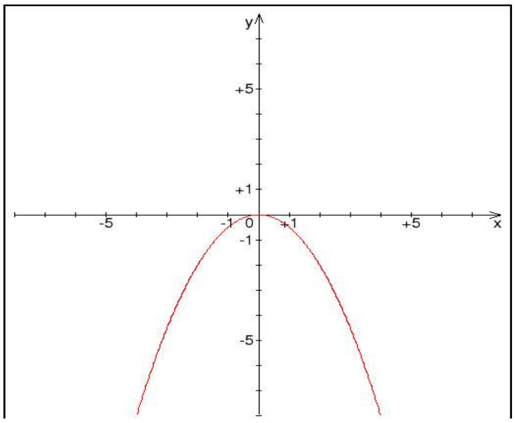

**2)** $y^2=-2\,px$ $\qquad x\leq 0$




3) $x^2=2\,py \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2\,p}x^2$

4) $x^2=-2\,py \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-\;1}{2\,p}x^2$




Bsp.7: Gegeben Parabel $\quad x=y^2 \quad$ welchen Abstand vom Brennpunkt ( und Leitgerade)?

Ansatz :

$$\boxed{y^2=2\,px}$$

*d.h.:*

$$2\,p=1 \quad \textit{daraus folgt:} \quad p=\frac{1}{2}\,\textit{und ergibt für den gesuchten Abstand} \Rightarrow \frac{p}{2} \quad \textit{d.h.:} \ \frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \textit{Abstand Scheitel}=\frac{p}{2}$$

$$\textit{Da}\ p=\frac{1}{2} \quad \textit{ist} \quad \frac{p}{2}=\frac{1}{4}\,!$$

Bsp. 8) Gesucht Gleichung der Parabel mit Scheitel S (3;2) und Brennpunkt F (5;2).

$\rightarrow$ *Scheitel und Brennpunkt sind* $\frac{p}{2}$ *auseinander*

$d.h.: \quad S(3,2) \Rightarrow x_s = 3 \quad y_s = 2$

$Abstand\ ist\ \frac{p}{2} \quad d.h.: (\frac{p}{2}, 0)$

$= (5,2) - (3,2) = (2,0)$

$\frac{p}{2} = 2 \quad d.h.: \ p = 4$

Verschiebungslage $\boxed{(y-2)^2 = 2p(x-3) = 8(x-3)}$

Scheitelpunkt(3/2) (y – 2)^2 = 8 ( x-3) d.h.: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

Bsp. 9:

Gesucht Gleichung der Parabel, die durch (-2,1),(1,2) und (-1,3) geht und in Richtung der x-Achse geöffnet ist.

Ansatz : Möglichkeit 1 oder 2 der Lage

allgemeine Gleichung : $(y - y_s)^2 = \pm 2p(x - x_s)$

Aus multiplizieren gibt : ( sortiert )

$$* \quad y^2 \underbrace{-2y_s}_{E} y \underbrace{\pm 2p}_{D} x \underbrace{\pm 2px_s, + y_s^2}_{F} = 0$$

$y^2 + Ey + Dx + F = 0$

Einsetzen der drei Punkte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( - 2 ,1) | 1 + E * 1 | - 2D | + F | = 0 |
| ( 1,2 ) | 4 + 2 E | + D | + F | = 0 |
| ( - 1,3) | 9 + 3 E | - D | + F | = 0 |

Umstellen :

E – 2 D + F = -1

2E + D + F = -4 -2*1.Z

3E – D + F = -9 -3*1.Z

Nullen erzeugen.

E – 2 D + F = 0
0 + 5 D – F = -2 : 5
0 + 5 D – 2 F = -6 -1 * 2.Zeile

E – 2D + F = -1 -1 *3.Zeile
$0 + D - \frac{F}{5} = -\frac{2}{5}$ $+ \frac{1}{5} \cdot$ 3. Zeile
*(-1) 0 + 0 + F = +4

E – 2D + 0 = - 5 + 2 * 2.Zeile
$0 + D + 0 = \frac{2}{5}$
0+0 +F = 4

$E + 0 + 0 = -\frac{21}{5}$
$0 + 0 + 0 = \frac{2}{5}$
0 + 0 + F = 4 d.h.: $E = -\frac{21}{5}$ $D = \frac{2}{5}$ F = 4

Einsetzen in * ergibt: $y^2 - \frac{21}{5}y + \frac{2}{5} + 4 = 0$

Quadratische Ergänzung ergibt :

$$(y-\frac{21}{10})^2 - \frac{441}{100} = \frac{-2}{5}x - \frac{400}{100} \rightarrow \frac{400}{100} = 4$$

$$(y-\frac{21}{10})^2 = \frac{-2}{5}x + \frac{41}{100}$$

$$= -\frac{2}{5}(x - \frac{5}{2} \cdot \frac{41}{100}) \leftarrow Kehrwert: \frac{2}{5} \; / \; \frac{5}{2}$$

$$(y-\frac{21}{10})^2 = \frac{-2}{5}(x - \frac{41}{40})$$

$$d.h.: \quad p = \frac{1}{5}$$

# Polynome

Das Polynom $P(x)=3x^3-2x^2+x-1$ ist nach Potenzen von ( x + 2) um zu ordnen

a) mit Koeffizientenvergleich

b) Zerlegungssatz

zu a :

$$3x^3-2x^2+x-1=a_3(x+2)^3-a_2(x+2)^2+a_1(x+2)-a_0$$
$$=a_3(x^3+6x^2+12x+8)-a_2(x^2+4x+4)+a_1(x+2)-a_0$$
$$=a_3x^3+6a_3x^2+12a_3x+8a_3-a_2x^2-4a_2x+4a_2+a_1x+2a_1-a_0$$
$$a_3x^3+(6a_3+a_2)*x^2+(12a_3-4a_2+a_1)\cdot x+(8a_3-4a_2+2a_1-a_0)$$
$$d.h.: \quad -3x^3\Rightarrow 3=a_3$$
$$-2x^2\Rightarrow -2=(6a_3+a_2) \quad d.h.: \; a_2=20$$
$$+x\Rightarrow 1=12a_3-4a_2+a_1 \quad d.h.: \; 1=36-80+a_1 \quad d.h.: \; a_1=45$$
$$-1\Rightarrow -1=8a_3-4a_2+2a_1+a_0 \quad d.h.: \; -1=24-80+90+a_0 \quad d.h..: \; a_0=-35$$
$$d.h.: \quad p(x)=3(x+2)^3-20(x+2)^2+45(x+2)-35$$

zu b :

$$3x^3-2x^2+x-1 \qquad \to(x+2)$$
$$mit\,(x-x_1)=0 \quad folgt\ für\ x=-2$$
$$x+2= \; immer\ das\ Gegenteil \; =-2$$

Zerlegungssatz: $3x^3-2x^2+x-1$

d.h.:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ***3*** | ***-2*** | ***1*** | ***-1*** |
| | - | -6 | 16 | -34 |
| x = -2 | 3 | -8 | 17 | -35 |

$= P(2)$ d.h.: P(x) = ( x + 2 ) ( 3x^2 – 8x + 17 ) -35

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ***3*** | ***-8*** | ***17*** |
| | - | -6 | 28 |
| x = -2 | 3 | -14 | 45 |

$= P_1(2)$ d.h.: P (x) = ( x+2)(3x – 14) + 45

| | | |
|---|---|---|
| | ***3*** | ***-14*** |
| | - | -6 |
| x = -2 | 3 | -20 |

$= P_2(2)$ d.h.: P(x) = ( x +2) (3) – 20

Insgesamt :

$$P(x)=3(x+2)^3-20(x+2)^2+45(x+2)-35$$

Polynome:

$5x^4-3x^3+x^2-7$ nach ( x + 1) ordnen mit : a ) Koeffizientenvergleich b ) Zerlegungssatz zu a: $5x^4-3x^3+x^2-7 \;=\; a_4(x+1)^4+a_3(x+1)^3+a_2(x+1)^2+a_1(x+1)+a_0$

Aufpassen !! : kein x, daher $a_1$ ( x+1) = 0

$$=a_4(x+1)^4+a_3(x+1)^3+a_2(x+1)^2+a_1(x+1)+a_0$$
$$=a_4(x^4+4x^3\cdot 1+6x^2\cdot 1^2+4x\cdot 1^3+1^4)+a_3(x^3+3x^2\cdot 1+3x1^2+1^3)+a_2(x^2+2x^2)+a_1(x+1)+a_0$$
$$=a_4(x^4+4x^3+6x^2+4x)^1+a_3(x^3+3x^2+3x+1)+a_2(x^2+2x+1)+a_1(x+1)+a_0$$
$$=a_4x^4+4a_4x^3+6a_4x+a_3x^3+3a_3x^2+3a_3x+a_3+a_2x^2+2a_2x+a_2+a_1x+a_1+a_0$$
$$=a_4x^4+(4a_4+a_3)x^3+(6a_4+3a_3+a_2)x^2+(4a_4+3a_3+2a_2+a_1)x+(a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$$

*für* $5x^4-3x^3+x^2-7$ *werden nun die gefundenen Terme eingesetzt und die unbekannten berechnet :*

$5x^4=a_4x^4$ *d.h.:* $a_4=5$

$-3=4a_4+a_3$ *d.h.:* $-3=4\cdot 5+a_3$ *d.h.:* $a_3=-23$

$1=6a_4+3a_3+a_2$ *d.h.:* $1=6\cdot 5+3\cdot -23+a_2$ *d.h.:* $a_2=40$

$0=4a_4+3a_3+2a_2+a_1$ *d.h.:* $0=4\cdot 5+3\cdot -23+2\cdot 40+a_1$ *d.h.:* $a_1=-31$

$-7=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ *d.h.:* $-7=5-23+40-31+a_0$ *d.h.:* $a_0=-2$

*d.h.:* $P(x)=5(x+1)^4-23(x+1)^3+40(x+1)^2-31(x+1)-2$

zu b )

$5x^4-3x^3+x^2-7$ $\quad nach\,(x+1)$ $\quad d.h.:\; x=-1$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***5*** | ***-3*** | ***1*** | ***0*** | ***-7*** | |
| | - | -5 | 8 | -9 | 9 | |
| -1 | 5 | -8 | 9 | -9 | -2 | $\rightarrow P(-1)$ |
| | - | -5 | 13 | -22 | | |
| -1 | 5 | -13 | 22 | -31 | $\rightarrow P_1(-1)$ | |
| | - | -5 | 18 | | | |
| -1 | 5 | -18 | 40 | $\rightarrow P_2(-1)$ | | |
| | - | -5 | | | | |
| -1 | 5 | -23 | $\rightarrow P_3(-1)$ | | | |
| | - | | | | | |
| -1 | 5 | $\rightarrow P_4(-1)$ | | | | |

d.h.:

$$P(x)=P_4+P_3+P_2+P_1+P$$
$$=5(x+1)^4-23(x+1)^3+40(x+1)^2-31(x+1)-2$$

## Nullstellen von Polynomen .

$$P(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x-3$$

Teiler von – 3 sind : 1,-1,-3,3
nach ausprobieren eine Nullstelle bei -1 d.h.: zur bestätigung:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0,5 | -3,5 | -3 |
| | - | -1 | 0,5 | 3 |
| -1 | 1 | -0,5 | -3 | 0 |

$$P(x)=(x+1)(x^2-0{,}5x-3)$$

$$dann\ pq-Formel\ x_{1,2}=\frac{-P}{2}\pm\sqrt{(\frac{P}{2})^2-9}$$
$$d.h.:\quad x_{2,3}=0{,}25\pm\sqrt{(-0{,}5)^2+3}$$
$$x_2=2\qquad x_3=-1{,}5$$
$$d.h.:\quad Nullstellen\ bei-1{,}2\,,-1{,}5$$

# Kurvendiskussion

Schema:

1.) Definitionslücken / Definitionsbereich
2.) Symmetrie
3.) Nullstellen
4.) Pole, senkrechte Asymptoten ( Polgeraden)
5.) Ableitungen (1, 2 u 3 )
6.) Relative Extrempunkte ( Minima und Maxima)
7.) Wendepunkte, Sattelpunkte
8.) verhalten im Unendlichen für $x \rightarrow \pm\infty$
9.) Wertebereich der
10.) Zeichnung

Erklärungen am Beispiel $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

1.) Der Definitionsbereich sind Zahlen wo nicht 0 das Ergebnis ist.

Definitionsbrüche :

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0} \quad oder \quad \frac{3}{3} \quad oder \,.....$$

2.) Symetrie :

gerade Funktion $y=x^n \quad n\in(2,4,6,8,....)$

ungerade Funktion $y=x^{n+1} \quad n+1-3,5,7,...$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{gerade}{ungerade} \quad d.h.: Funktion\, ungerade$

gerade = Punktsymetrie

ungerade = Achsensymetrie

3.) Nullstellen

ermittelt durch Zerlegung in

Linearfaktoren → koeffizientenvergleich

4.) Pole,Polgeraden

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{3}{0}$ d.h.: wenn für x ein wert eingesetzt wird und unten 0 und oben $\neq 0$ heraus kommt. Zu Untersuchen ist mit oder ohne Vorzeichenwechsel.

Asymptoten : ?

5.) Ableitungsregeln beachten !

6.) Relatives Minimum / Maximum

$y^{I}=0\ und\ y^{II}\neq 0$

y'> 0 = Minimum

y'< 0 = Maximum

7.) Wendepunkte

$y^{II}=0\ und\ y^{III}\neq 0$

$Sattelpunkt\ wenn\ y^{I}(x)=0 \quad d.h.: \quad x_0=0\,? \quad und\ y^{II}=0$

8.)

Überprüfen ob echte oder unecht gebrochene Funktion

$$bsp.\ f(x)=\frac{9^{(x)}}{h(x)}=\frac{ax^{m},....}{bx^{h}}$$

$n>m \quad Echt\ gebrochen!$

$x\to\pm\infty$

Asymptoten im Unendlichen (Am besten mittels Polynomdivision)

Bsp.:

$$\frac{3x^4-12x^3-9x^2+42x-24}{x^3+x^2-x-1}$$

$=unecht!$

*Polynomdivision zeigt:*

$$
\begin{array}{l}
3x^4-12x^3-9x^2+42x-24 \;:\; x^3+x^2-x-1 \;=\; 3x-15 \\
\underline{-3x^4+3x^3-3x^2-3x} \\
\qquad -15x^3-6x^2+45x-24 \\
\qquad \underline{-15x^3-15x^2+15x+15} \qquad geht\ nicht\ weiter \\
\qquad\qquad 9x^2+30x-39
\end{array}
$$

d.h.: Asymptote im Unendlichen y = 3x – 15

Bsp.:

$$y=\frac{-5x^2+5}{x^3} \qquad (x^3>x^2 \quad d.h.: \quad echt\ gebrochen)$$

Definitionsbereich : $f\ddot{u}r\ alle\ x\neq 0$ bei x = 0 ist Lücke

Symmetrie : Zähler gerade , Nenner ungerade daher komplett ungerade d.h.: Punktsymetrie

Nullstellen :

$$y=\frac{-5x^2+5}{x^3}=\frac{-5(x^2-1)}{x^3}=\frac{-5(x-1)(x+1)}{x^3}$$

$$d.h.: x_1=-1 \quad x_2=1$$

$$Pol\ bei\ x_3=0 \quad da \quad \frac{-5(0-1)(0+1)}{0^3}=\frac{-5(-1\cdot 1)}{0}=\frac{5}{0}$$

$$Polgerade\ x=0$$

Ableitungen :

Formel :

$$Quotientenregel \qquad \frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$y=\frac{-5x^2+5}{x^3}$$

$$y^I=\frac{-10x^4-3x^2(-5x^2+5)}{x^6}=\frac{-10x^4+15x^4-15x^2}{x^6}=\frac{5x^4-15x^2}{x^6}=\frac{5x^2-15}{x^4}=\frac{5(x^2-3)}{x^4}$$

$$y^{II}=(y')=\frac{10x^5-4x^3(5x^2-15)}{x^8}=\frac{10x^5-20x^5+60x^3}{x^8}=\frac{-10x^5+60x^3}{x^8}=\frac{-10x^2+60}{x^5}=\frac{-10(x^2-6)}{x^5}$$

$$y^{III}=(y^{II})'=\frac{-20x^6-5x^4(-10x^2+6)}{x^{10}}=\frac{-20x^6+50x^6-300x^4}{x^{10}}=\frac{30x^2-300}{x^6}=\frac{30(x^2-10)}{x^6}$$

Relative Extremwerte :

$$y^I=0\ und\ y^{II}\neq 0$$

$$y^I=0=x^2-3=0 \qquad d.h.: x=\sqrt{3}=1{,}73$$

$$y^{II}\neq 0=x^2-6\neq 0=-3! \quad ok.$$

$$\sqrt{3}\ \text{in}\ y\ einsetzen: \frac{-5(sqrt3^2-1)}{\sqrt{3}^3}=-1{,}92$$

$$\sqrt{3}\ \text{in}\ y^{II}\ einsetzen= \ >0\rightarrow Minimum$$

$$Min.(1{,}73;-1{,}92)$$

$$f\ddot{u}r\ Max.: -\sqrt{3} \quad einsetzen \qquad d.h.: \quad Max.(-1{,}73;1{,}92)$$

Wendepunkte :

$$y^{II}=0\, und\, y^{III}\neq 0$$
$$y^{II}=0=x^2-6=0=\sqrt{6}=2{,}45$$
$$y^{III}\neq 0=x^2-10=-4 \quad OK\,!$$
$$\sqrt{6}\,\text{in}\; y\, einsetzen : \frac{-5(\sqrt{6^2}-1)}{\sqrt{6^3}=-1{,}70}$$
$$W_1=(2{,}45\,;-1{,}7)$$
$$W_2=(-2{,}45\,;1{,}7)$$

Verhalten im Unendlichen : da echt gebrochen strebt $x\rightarrow\pm\infty$

Asymptote im Unendlichen : $-5x^2+5:x^3=0 \quad d.h.: \quad y=0$

Wertebereich : $-\infty<y>\infty$

# Integralrechnung

## Das Unbestimmte Integral

Einfache Beispiele:

| $f(x)$ | $e^x$ | $2x$ | $\sin x$ | $\frac{1}{x}$ | $3x+2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $e^x$ | $x^2$ | $-\cos x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{3}{2}x^2+2x$ |

$$\frac{d}{dx}(F(x)+C)=\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$
$$f'(x)=df\frac{(x)}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)$$
$$F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$
$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

$$Bem: F'(x)=dF\frac{(x)}{dx}=f(x)\Rightarrow dF(x)=f(x)dx$$
$$\Rightarrow\int dF(x)=\int f(x)dx$$
$$=F(x)$$
$$\Rightarrow\int dF(x)=F(x)$$

$$\int a\cdot f(x)dx=a\int f(x)dx$$
$$\int[f(x)+g(x)]=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$Sei\, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1 \qquad \Rightarrow \qquad \int x^n\, dx = \left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} + C$$

$$Der\ Fall\ n = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2} x\, dx = \tan x + C \qquad (x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi)$$

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \qquad (a \neq 1, a > 0)$$

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \Rightarrow \left(\frac{1}{\ln a} a^x\right)^I = \frac{1}{\ln a}(e^{x \ln a})^I = \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} \ln a = a^x$$

Beispiele

$$\int (x^3 + 4x + \frac{1}{x^2} - 3)\, dx = \int x^3\, dx + 4\int x\, dx + \int x^{-2}\, dx - 3\int 1\, dx = \frac{1}{4} x^4 + 4\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{-1} x^{-1} - 2\frac{1}{1} x^1 + C$$

$$= \frac{1}{4} x^4 + 2x^2 - \frac{1}{x} - 3x + C$$

$$\int \frac{\cos(\alpha)}{1+t^2}\, dt = \cos\alpha \int \frac{1}{1+t}\, dt = \cos\alpha + \arctan(t) + C$$

$$\int \frac{1 - x e^{\alpha + x}}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int e^{\alpha + x}\, dx = \ln|x| - e^{\alpha} \int e^x\, dx = \ln|x| - e^{\alpha + x} + C$$

$$\int \tan^2(x)\, dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx - 1\int dx = \tan(x) - x + C$$

$$\int \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1}{x^2}} = \quad \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{3}{5}})\, dx = \quad \frac{1}{3/2} x^{3/2} - \frac{1}{4/3} x^{4/3} - \frac{1}{3/4} x^{3/4} + \frac{1}{3/5} x^{3/5}$$

$$= \quad \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{3}{4} x^3 \sqrt{x} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{2} \sqrt[5]{x^2} + C$$

## Formele Integration

$$\frac{d(u\cdot v)}{dx} = vu' + uv'$$

$$d(u\cdot v) = v\frac{du}{dx}dx + u\frac{dv}{dx}dx = v\cdot du + u\cdot dv$$

$$\int d(u\cdot v) = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$u\cdot v = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$u(x)v'(x)dx = u\cdot v - \int v u'(x)dx$$

Beispiele

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos x + \int \cos(x)dx = -x\cos + \sin x + C$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

$$\int 1\cdot\ln(x)dx = x\ln x - \frac{\int x\cdot 1}{x}dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int e^x \sin x = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx = -e^x\cos x + (e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx) = 2\int e^x\sin x\,dx$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) = \int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\int \cos x\cos x dx \quad\Rightarrow\quad \int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx$$

$$= \sin x\cos x + \int 1 - \cos^2 x\,dx$$

$$2\int \cos^2 x = \sin x\cos x + x$$

$$\int \cos^2 x = (\sin x\cos x + x)\cdot\ \frac{1}{2}$$

# Substitutionsmethoden

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))..........dt$$

$$x = g(t)$$

$$\frac{Dx}{dt} = \frac{dg(t)}{dt}$$

$$dx = \frac{dg(t)dt}{dt}$$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot \frac{dg(t)}{dt}dt$$

$$\int f(g(x))\frac{g(x)}{dx}dx \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{g(x)}{dx} \quad \Rightarrow dt = \frac{g(x)}{dx}dx$$

$$\int f(g(x))dt$$

(1)Man muss t = g(x) geschickt wählen

(2)Nach Integration über t muss nach x rücksubstitutiert werden

## Substitutionsmethode 1

$$\boxed{\begin{array}{l} \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt \\ \textbf{Subtitution:}\; t = ax+b \qquad \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt \\ \int f(ax+b)dx = \int f\frac{(t)\cdot 1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt \end{array}}$$

Beispiele

$$\int (5x-7)^4 dx \qquad Subtitution: t = 5x-7 \qquad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{5}dt$$

$$= \int t^4 dx = \int t^4 \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int t^4 dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{25}t^5 + C = \frac{1}{25}(5x-7)^5 + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}} \qquad Substitution: t = 1-2x \qquad \Rightarrow \quad dx = \frac{-dt}{2}$$

$$= \int \frac{-dt}{2\cdot\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{4}t^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{4}(1-2x)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$\int \cos(\omega t + t_0)\,dt \qquad \textit{Substitution}: x = \omega \cdot t + t_0 \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{\omega}$$

$$= \int \cos(x)\frac{dx}{\omega} = \frac{1}{\omega}\int \cos(x) = dx\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + t_0) + C$$

$$\int \frac{3\alpha \cdot \pi}{2 - \frac{1}{3}x}dx \qquad \textit{Substitution}: t = 2 - \frac{1}{3}x \quad \Rightarrow \quad dx = -3\,dt$$

$$= \int \frac{3\alpha\pi(-3\,dt)}{t} = -9\alpha\pi\int \frac{1}{t}dt = -9\alpha\pi \cdot \ln\left|2 - \frac{1}{3}x\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)^4} \qquad \textit{Substitution}: t = 1 - x \quad \Rightarrow dt = -1\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = -1\,dt$$

$$= \int \frac{-dt}{t^4} = -\int t^{-4} = \frac{-t^{-3}}{3} = \frac{-(1-x)^{-3}}{3} = \frac{-1}{3(1-x)^3}$$

$$\int 3e^{2x-6}dx \qquad \textit{Substitution}: t = e^{2x-6} \quad \Rightarrow \quad dt = 2e^{2x-6}dx \quad \Rightarrow dx = \frac{dt}{2e^{2x-6}}$$

$$= 3\int e^{2x-6} = 3\int \frac{e^{2x-6}}{2e^{2x-6}} = \frac{3e^{2x-6}}{2}$$

$$\int \sqrt[4]{(5x+3)^3}\,dx \qquad \textit{Substitution}: t = 5x + 3 \quad \Rightarrow \quad dt = 5\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{5}$$

$$= \int (5x+3)^{\frac{3}{4}}dx = \frac{1\,t^{\frac{3}{4}}}{5} = \frac{t^{\frac{7}{4}}}{\frac{5 \cdot 7}{4}} = \frac{alignc4 \cdot t^{\frac{3}{4}}}{5 \cdot 7} = \frac{4\,t^{\frac{3}{4}}}{35} = \frac{4(5x+3)^{\frac{3}{4}}}{35} = \frac{4\sqrt[4]{(5x+3)^7}}{35} = \frac{4}{35}(5x+7)\sqrt[4]{(5x+7)^7}$$

$$\int \cos(3t - \frac{\pi}{6})\,dt \qquad \textit{Substitution}: x = 3t - \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad dx = 3\,dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{4}$$

$$= \int \cos(x)\frac{dx}{4} = \frac{1}{3}\int \cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3t - \frac{\pi}{6}) + C$$

$$\int \frac{3\,dx}{4x-5} \qquad \textit{Substitution}: t = 4x - 5 \quad \Rightarrow \quad dt = 4\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{4}$$

$$= \int \frac{3\,dt}{4t} = \frac{3}{4}\int \frac{1}{t}dt = \frac{3}{4}\ln|4x-5| + C$$

# Substitutionsmethode 2

$$\int f[g(x)]\cdot \frac{g'(x)}{dx}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x)}{dx}\,dx=dt \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x)}{dx}=\frac{dt}{dx} \qquad g(x)=t$$
$$= \int f(t)\,dt$$

Beispiele

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \qquad \textit{Substitution:} \cos(x)\,dx=dt \quad \Rightarrow \quad \cos(x)=\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad \sin(x)=t$$
$$=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\sin^2(x)}{2}$$

$$\int \cos^5(x)\sin(x)\,dx \qquad \textit{Substitution:} \sin(x)\,dx=dt \quad \Rightarrow \quad \sin(x)=\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad \cos(x)=t$$
$$=\int t^5\,dt \;=\; \frac{t^6}{6}+C \;=\; \frac{\cos^6(x)}{6}+C$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx\,,\, x>0 \qquad \textit{Substitution:} \frac{dx}{x}=dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}=\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad \ln(x)=t\,,\, x>0$$
$$=\int \sqrt{t}\,dt \;=\; \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C \;=\; \frac{2}{3}(\ln(x))^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\ln x\sqrt{lnx}+C$$

$$\frac{\int (\arctan(x))^2\,dx}{1+x^2} \qquad \textit{Substitution:} \frac{dx}{1+x^2}=dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2}=\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad \arctan(x)=t$$
$$=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\arctan(x))^3}{3}+C$$

$$\int \sqrt{3x^2-6x}(3x-3)\,dx \qquad \textit{Substitution:} t=3x^2-6x \quad \Rightarrow \quad dt=(6x-6)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{2}=(3x-3)\,dx$$
$$=\int \sqrt{t}\frac{dt}{2}=\int t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(3x^2-6x)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(3x^2-6x)\sqrt{3x^2-6x}+C$$

$$\int \sqrt[5]{(7-3x)^3}\,dx \qquad \textit{Substitution:} t=7-3x \quad \Rightarrow \quad dt=-3\,dx \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{dt}{-3}$$
$$=\int \sqrt[5]{t^3}\frac{dt}{-3} \;=\; \frac{t^{\frac{3}{5}}\,dt}{-3} \;=\; \frac{t^{\frac{8}{5}}\,dt}{\frac{8}{5}\cdot -3} \;=\; \frac{5(7-3x)}{-24}=\frac{-5(3x-7)}{24}+C$$

$$\int (5x^3-9x+3)^4\cdot(5x^2-3)\,dx$$
$$\Rightarrow \quad \textit{Substitution:} t=5x^3-9x+3 \quad \Rightarrow \quad dt=15x^2-9\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{3}=(5x^2-3)\,dx$$
$$=\int t^4\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^4\,dt \;=\; \frac{1}{3}\cdot\frac{t^5}{5} \;=\; \frac{1}{15}t^5 \;=\; \frac{1}{15}(5x^3-9x+3)^5+C$$

$$\int x\cdot\sqrt{5+x^2}\,dx \qquad \textit{Substitution}: t=x^2+5 \quad \Rightarrow \quad dt=2\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{2}=x\,dx$$

$$=\int t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\,t^{\frac{3}{2}}}{3} \;=\; \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{1}{3}(5+x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{(5+x^2)^3}$$

$$\int \frac{2\ln x}{x}dx \qquad \textit{Substitution}: \frac{dx}{x}=dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}=\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad \ln x=t$$

$$=\int 2\,t\,dt=2\int t\,dt=\frac{\cancel{2}\,t^2}{\cancel{2}}=(\ln x)^2+C$$

$$\int 6\,x\cdot e^{-x^2} \qquad \textit{Substitution}: t=e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad dt=-2\,x\cdot e^{-x^2}dx \quad \Rightarrow \quad -3\,dt=6\,x\cdot e^{-x^2}dx$$

$$=\int -3\,dt \;=\; -3\int dt \;=\; -3\cdot t \;=\; -3\cdot e^{-x^2}+C$$

$$\int \sin(2\,x)\cdot e^{\sin^2(x)} \qquad \textit{Substitution}: t=e^{\sin^2(x)} \qquad dt=\underbrace{2\sin(x)\cos(x)}_{\sin(2\,x)}\cdot e^{\sin^2(x)} \quad \Rightarrow \quad dt=\sin(2\,x)\cdot e^{\sin^2(x)}$$

$$=\int dt=t=e^{\sin^2(x)}+C$$

## Substitutionsmethode 3

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad \Rightarrow \quad f'(x)\,dx = dt \quad \Rightarrow \quad f(x) = t$$
$$= \int \frac{dt}{t} \;=\; \ln|t| + C \;=\; \ln|f|(x) + C$$

Beispiele

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{2x}{x}\,dx \;=\; \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx \;=\; \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx \;=\; \ln(\ln x) + C$$

$$\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\,dx \;=\; \int \frac{1}{2\sinh(\frac{x}{2})\cosh(\frac{x}{2})}\,dx \;=\frac{1}{2}\int \left( \frac{\frac{1}{\cos^2 h(\frac{x}{2})}}{\frac{\sinh(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}} \right) dx \;=\; \frac{1}{2}\ln\left|\tanh(\frac{x}{2})\right| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-4} \qquad \textit{Zwischenrechnung}: (e^{2x}-4)' = 2e^{2x}$$
$$= \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-4} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-4} \;=\; \ln|e^{2x}-4| + C$$

# Substitutionsmethode 4

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin(2x)}\right) + C = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \sinh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sinh(x)\cosh(x) - x) + C$$

$$\int \cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sinh(x)\cos(x) + x) + C$$

Beispiele

$$\int \cos^2(4x)\,dx \qquad \mathit{Substitution}: t = 4x \quad \Rightarrow \quad dt = 4\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{4} = dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{8}(t - \sin t \cos t) + C = \frac{1}{8}(4x - \sin(4x)\cos(4x)) + C$$

$$\int \sinh^3(x)\,dx \qquad \mathit{Hinweis}: \sinh^2(x) = \cosh^2(x) - 1$$

$$\int (\cosh^2(x) - 1)\sinh(x)\,dx \qquad \mathit{Substitution}: t = \cosh(x) \quad \Rightarrow \quad dt = \sinh(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{\sinh(x)}$$

$$\int \cosh^2(x)\,dx - \int \sinh(x)\,dx = \int t^2\,dt - \int \sinh(x)\,dx = \frac{1}{3}t^3 - \cosh(x) + C = \frac{1}{3}\cosh^3(x) - \cosh(x) + C$$

# Rechenbeispiele zu allen Themen (Algebra und Analysis)

## Determinanten n-ter Ordnung.

1) Bestimme den Wert der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{array} = 9+12-4-[9+8-6] = -2\cdot 6 = -12$$

$$\textit{Beachtung der Vorzeichenregel ergibt}\quad -(-12)\quad \textit{damit Ergebnis} = 12$$

2) Bestimme den Wert der Determinante

$$\begin{array}{cl} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ -2\cdot Z_1 \\ -3\cdot Z_1 \\ -2\cdot Z_1 \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot\left|\begin{array}{ccc} 5 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -4 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 5 & -1 \\ 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{array} = 40+18+0-[+12+0+20] = 1\cdot 26 = 26$$

$$\textit{Beachtung der Vorzeichenregel ergibt}\quad +(+12)\quad \textit{damit Ergebnis} = 26$$

### Fläche Dreieck mit Punkten A(x,y,z) , B(x,y,z) und C(x,y,z)

Gegeben seien die 3 Punkte A(7,6,-2), B(4,5,-3) und C(3,-1,6) . Welche Fläche hat das Dreieck ABC?

$$A=\frac{1}{2}(\textit{Fläche eines Paralleogramms}) \qquad \Rightarrow \qquad A_{Parallelogramm}=a\times b$$

$$=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & -1 \\ -4 & -7 & 8 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -7 \end{matrix}=\frac{1}{2}(-8+4+21-[4+7-24])=\frac{1}{2}(30)=15\,FE$$

### Zwei Vektoren auf Rechtwinkligkeit prüfen

Zeige das das Dreieck rechtwinklig ist

rechtwinklig = $\vec{a}\perp\vec{b}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|$$

$$=\left|\sqrt{7^2+6^2+2^2}\right|\cdot\left|\sqrt{4^2+5^2+3^2}\right|$$

$$=|\sqrt{89}|\cdot|\sqrt{50}|$$

$$=9{,}4\cdot7{,}1$$

$$\textit{das heißt}:\ \vec{A}\neq0\wedge\vec{B}\neq0 \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\perp\vec{B}$$

Tangentengleichung (Punkt-Normalenform der Tangente)

Beispiel 1

Tangentengleichung t in Bereichspunkt $P_1(x_{1,}y_1)$

$$\vec{r}:=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_1 \perp t(x_1,y_1)$$

$$PNF \qquad Punkt-Normalenform\,der\,Tangente$$

$$\vec{r}_1(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right] = x_1x+y_1y-x_1^{\ 2}-y_1^{\ 2} = x_1x+y_1y-(x_1^{\ 2}-y_1^{\ 2}) = x_1x+y_1y-R^2=0$$

$$x_1x+y_1y=R^2 \qquad \Rightarrow \qquad y=-\frac{x_1}{y_1}\cdot x+\frac{R^2}{y_1}$$

$$allgemeine\,Tangentengleichung\,(x_1-x_M)(x-x_M)+(y_1-y_M)(y-y_M)=R^2$$

Beispiel 2

$$Gegeben\,(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

$$Gesucht:Tangente\,t\,an\,dem\,Punkt\,P_0\,des\,Kreises\,mit\,Abszisse-1\,und\,positiver\,Ordinate$$

$$x_0=1$$

$$\Rightarrow \quad (-1-2)^2+(y-3)^2=25$$

$$(y-3)^2=16$$

$$y-3=\ \pm 4$$

$$y_1 \quad =7 \qquad positive\,Ordinate \qquad l\,y_2 \quad =-1 \qquad negative\,Ordinate$$

$$\Rightarrow \quad P_0(-1,7)$$

$$\Rightarrow \quad Tangentengleichung\,(x_1-x_M)(x-x_M)+(y_1-y_M)(y-y_M)=R^2$$

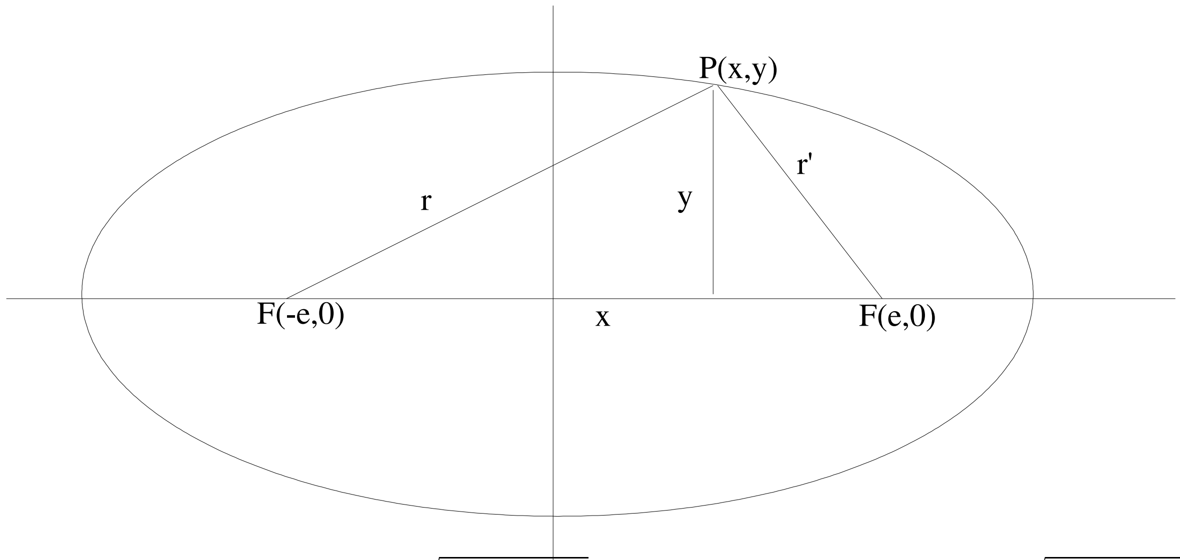
$$\Rightarrow \qquad (-1-2)(x-2)+(7-3)(y-3)=25$$

$$-3x+6+4y-12=25$$

$$4y=31+3x$$

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{31}{4}$$

Beispiel 3




*Es gilt für das große Dreieck :* $r=\sqrt{(x+e)^2+y^2}$ *, sowie für das kleine Dreieck :* $r=\sqrt{(e-x)^2+y^2}$

$$r+r'=2a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+e^2+y^2}+\sqrt{(e-x)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=2a-\sqrt{(e-x)^2+y^2}$$

$$e^2+x^2+2ex+y^2=4a^2-4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}+e^2-2ex+x^2+y^2$$

$$4ex-4a^2=-4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}$$

$$e^2x^2-2exa^2+a^2=a^2e^2-2a^2ex+a^2x^2+a^2y^2$$

$$a^4-a^2e^2=a^2x^2-e^2x^2+a^2y^2$$

$$b^2=a^2-e^2$$

$$a^2b^2=x^2b^2+e^2y^2$$

$$e^2=a^2-b^2$$

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad \textit{Satz}\ 13$$

### Abstand Ebene vom Ursprung mit senkrechten Vektor und verläuft durch Punkt P

Welchen Abstand hat die Ebene E, die senkrecht zum Vektor (3,-2,1) verläuft und durch den Punkt P(-2,4,1) geht, vom Ursprung?

$$P(-2,4,1) \qquad \vec{n}(3,-2,1) \qquad Ursprung(0,0,0)$$

$$d=\frac{\vec{n}\cdot(r_p-r_1)}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0-(-2)\\0-\ 4\\0-\ 1\end{pmatrix} = \underbrace{3(x+2)}_{3\cdot2=6}\underbrace{-2(y-4)}_{(-2)\cdot(-4)=+8}\underbrace{+1(z-1)}_{1\cdot(-1)=(-1)}=0 = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}=6+8-1=13$$

$$|\vec{n}|=|\sqrt{3^2+2^2+1^2}|=|\sqrt{9+4+1}|=|\sqrt{14}| \qquad \Rightarrow \qquad d=\frac{13}{|\sqrt{14}|}$$

### Schnittpunkt zwischen Kreis und einer Parabel

Um den Brennpunkt der Parabel $y^2=12x$ wird ein Kreis mit R = 4 gezeichnet. Berechne die Schnittpunkte auf der x-Achse des Kreises und der Parabel.

$$Parabel:\ y^2=12x \qquad Kreis:\ x^2+y^2=16$$
$$d.h. \qquad y^2=16-x^2$$

1. *Schritt Gleichsetzen*

$$x^2+12x-16=0 \qquad \Rightarrow \qquad pq-Formel: x_{1,2}=-6\pm\sqrt{6^2-(-16)}=-6\pm\sqrt{36+16}=-6\pm\sqrt{52}$$

$$x_1=1{,}2 \qquad x_2=-13{,}2$$

$y=\sqrt{12}\,x$ *damit kann kein negativer Wert entstehen. Somit ist es eine nach rechts offene Parabel.*

*D.h* 1,2 *ist der Schnittpunkt!*

### Schnittpunkt Kreis und gerade im zwei-und dreidimensionalen Raum

Im Zweidimensionalen Raum:

Welchen Radius R hat der Kreis mit dem Mittelpunkt M(3,6), der die Gerade x-y-5=0 berührt.

$$Gerade \quad Ax+By+C=0 \qquad somit \quad A=1 \quad B=-1 \quad C=-5$$

*Der Mittelpunkt vom Kreis ist der Radius zur Geraden ist gleich einen Punkt* im *Abstand von einer Gerade. Somit berechnen wir den Abstand von einem Punkt zu einer Geraden.*

$$d=r=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{1\cdot3+(-1)\cdot6+(-5)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{-11}{\sqrt{2}}=5{,}67$$

Im Dreidimensionalen Raum verfahren wir genauso:

Welchen Radius hat eine Kugel mit Mittelpunkt (5,3,-2), der die Gerade $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$ berührt?

$$\textit{Gerade}\quad \vec{r}(\lambda)=\vec{r}_1+\lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}\qquad d=r=\frac{|\vec{a}\times(\vec{r}_Q-r_1)|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}\times(\vec{r}_Q-r_1)|=\left|\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & -1\\3 & -0\\(-2)-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}(5\cdot(-3))-(2\cdot 3)\\-[(2\cdot(-3))-(2\cdot 4)]\\(2\cdot 3)-(5\cdot 4)\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-15-6\\-(-6-8)\\6-20\end{pmatrix}\right|$$

$$=\sqrt{(-21)^2+14^2+(-14)^2}=\sqrt{833}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+5^2+2^2}=\sqrt{33}$$

$$d=\frac{\sqrt{833}}{\sqrt{33}}=5{,}02\,\mathrm{LE}$$

## Abstand zweier parallelen Geraden

$$\textit{Geradenform}: g=\vec{r}(\lambda)=\vec{r}+\lambda\vec{a}$$

$$g_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad g_2=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\quad \textit{sind}\ \text{parallel}, \textit{da}\ \ \vec{a}_2=3\vec{a}_1\qquad d=\frac{|\vec{a}_1\times(\vec{r}_2-r_1)|}{|\vec{a}_1|}=\frac{I}{II}$$

$$I)\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4-1\\0-1\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-1\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1\\-(-1-3)\\-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}=\left|\sqrt{0^2+4^2+(-4)^2}\right|=\sqrt{32}$$

$$II)\quad |\vec{a}_1|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$d=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}=3{,}27$$

## Abstand zweier Windschiefer Geraden

*Die Geraden* $g_1$ *und* $g_2$ *sind genau dann* $\|$, *wenn* $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0}$ *ist.*

*Ist* $d=0$, *so fallen die beiden Geraden zusammen.*

*Die Geradengleichung* $g_i: \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$

$$g_1: \quad \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad g_2: \quad \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$g_1$ *und* $g_2$ *sind* $\|$, *da ihre Richtungsvektoren* $\vec{a}_1$ *und* $\vec{a}_2$ *kollinear sind, also:* $\vec{a}_2 = 3\vec{a}_1$

$$\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4-1\\0-1\\3-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+1\\3+1\\-1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2} \qquad |\vec{a}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3{,}27$$

## Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

$$g_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad \textit{Schnittpunkt:}\ \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}(\lambda_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

*Komponentenschreibweise:*

$$\begin{array}{lcrl} 1+2\lambda_1 = 2+\lambda_2 & & 2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 & I \\ 1+\lambda_1 = 0-\lambda_2 & \textit{oder} & \lambda_1 + \lambda_2 = -1 & II \\ 0+\lambda_1 = 2+2\lambda_2 & & \lambda_1 - 2\lambda_2 = 2 & III \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I & 2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ II & \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ + & \overline{\phantom{xxxxxxxxxxxx}} \\ & 3\lambda_1 \quad = 0 \qquad \textit{d.h.}\ \lambda_1 = 0 \end{array}$$

$$III \quad 0 - 2\lambda_2 = 2 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = -1$$

$$\vec{r}_s = \textit{von}\ g_1 = g_2: \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\0+1\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right] = S(-1,1,0)$$

*Schnittwinkel:*

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 2-1+2 = 3 \qquad \begin{array}{l} |\vec{a}_1| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{a}_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6} \end{array} \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)}{(|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|)}\right) = 60°$$

## Parameterform einer Ebene

Ebene läuft durch den Punkt P in Richtung a und b:

$$\text{Ebene E durch } P_1=(2,5,1)\text{: Die Richtungsvektoren sind } \vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{Parameterform: } r(\lambda,\mu)=\vec{r}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{Der Normalenvektor } \quad \vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$$

## Drei - Punkte - Form einer Ebene

Gegeben sind drei Punkte $P_1=(1,5,0),\ P_2=(-2,-1,8)\ und\ P_3=(2,0,1)$ .

Wie lautet die Gleichung der Ebene durch diese Punkte?

$$\text{Die Ortsvektoren sind die Punkte } 1-3\text{: } \vec{r}_1=\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\8\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

*Damit sind die Richtungsvektoren:*

$$P_1\vec{P}_2=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\8\end{pmatrix}$$

$$P_1\vec{P}_3=\vec{r}_3-\vec{r}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$$

*Somit lautet die Gleichung:*

$$\vec{r}(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\-6\\8\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3\lambda+\mu\\5-6\lambda-5\mu\\8\lambda+\mu\end{pmatrix}$$

## Koordinatendarstellung einer Ebene

Die Gleichung der Ebene E durch den Punkt P(2,-5,3) senkrecht zum Vektor n = (4,2,5) lautet wie folgt:

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1)=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-2\\y+5\\z-3\end{pmatrix}}_{Koordinatendarstellung}=\underbrace{4(x-2)+2(y+5)+5(z-3)}_{(4\cdot-2)+(2\cdot5)+(5\cdot-3)=-13}=0$$

$$\textit{allg. Koordinatendarstellung} \quad ax+by+cz+d=0$$
$$\textit{oder am Beispiel:} \quad 4x+2y+5z-13=0$$

## Abstand eines Punktes von einer Ebene

Die Ebene E enthät den Punkt P(1,0,9), ihr Normalenvektor lautet (1,3,5). Abstand zum Punkt Q (-2,1,3)?

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}_Q-\vec{r}_1)=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2-1\\1-0\\3-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}=-3+3-30=-30$$
$$|\vec{n}|=\sqrt{1^2+3^2+5^2}=\sqrt{35}$$
$$d=\frac{\vec{n}\cdot(\vec{r}_Q-\vec{r}_1)}{|\vec{n}|}=\frac{|-30|}{\sqrt{35}}=\frac{30}{\sqrt{35}}=5{,}07$$

Abstand einer Geraden von einer Ebene

Gerade und Ebene sind genau dann parallel, wenn $\vec{n}\cdot\vec{a}=0$.

Ist d = 0, liegt die Gerade in der Ebene.

$$\textit{Abstand d zwischen der Geraden g:} \quad P_1=(0,1,-1), \quad \textit{Richtungsvektor } \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$$

$$\textit{und der Ebenen E:} \quad P_0=(1,5,2), \quad \textit{Normalenvekror } \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

*Überprüfen auch Parallelität:*

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}=-2-4+6=O= \textit{ sind } \text{parallel}\,\textit{!!!}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0-1\\1-5\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\-3\end{pmatrix}=-2-4-9=-15$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14} \qquad d=\frac{\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)}{|\vec{n}|}=\frac{|-15|}{\sqrt{14}}=\frac{15}{\sqrt{14}}=4{,}01$$

## Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebenen

Die Gerade g und die Ebene E sind wie folgt gegeben:

$$g:\quad P_1=(2{,}1{,}5),\quad Richtungsvektor\,\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}\qquad E:\quad P_0=(2{,}4{,}5);\ Normalenvektor\,\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

*Schnittpunkt:*

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3-2\\4-1\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}=-2-3-4=-5$$

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=6+4+0=10\quad \textit{Wegen } \vec{n}\cdot\vec{a}\neq 0 \textit{ schneiden sich Gerade und Ebene} \text{ in } \textit{genau einen Punkt.}$$

$$\vec{r}_S=\vec{r}_1+\left(\frac{\vec{n}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)}{\vec{n}\cdot\vec{a}}\right)\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}+\frac{-5}{10}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}-0{,}5\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1{,}5\\1+2\\5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\3\\5\end{pmatrix}=\qquad S=(0{,}5\,;3\,;5)$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6},\qquad |\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}=5$$

$$\phi=\arcsin\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}=\arcsin\frac{10}{\sqrt{6}}\cdot 5=\arcsin 0.8165=54{,}7\,°$$

## Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen

Wir bestimmen die Schnittgerade g und den Schnittwinkel $\phi$ der folgenden Ebenen:

$$E_1:\quad P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{n}_1=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}\qquad E_2:\quad P_2=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{n}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\textit{Bestimmen der Schnittgeraden } g:\qquad \vec{r}(\lambda)=\vec{r}_0+\lambda\vec{a}\qquad (\textit{Ansatz})$$

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+3\\-6-2\\1-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-8\\-9\end{pmatrix},\ \textit{da} \neq 0 \textit{ schneiden sie sich wirklich.}$$

$$\vec{n}_1\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0-1\\y_0-0\\z_0-1\end{pmatrix}=x_0-1+5\,y_0-3(z_0-1)=0$$

$$\vec{n}_2\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_2)=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0-0\\y_0-3\\z_0-0\end{pmatrix}=2\,x_0+y_0-3+2\,z_0=0$$

*Wir setzen* $x_0=0$

$5y_0-3z_0=-2$

$y_0+2z_o=\ 3 \qquad y_0=3-2z_0 \qquad \textit{einsetzen:}$

$5(3-2z_0)-3z_0=-2 \qquad \rightarrow \quad 15-13z_0=-2 \quad \rightarrow \quad -13z_0=-17 \qquad z_0=\frac{17}{13}$

*Wieder einsetzen:* $y_0+2(\frac{17}{13})=3 \qquad \rightarrow \qquad y_0+\frac{34}{13}=3 \qquad \rightarrow \qquad y_0=3-\frac{34}{13}=\frac{5}{13}$

*Somit ist* $\vec{r}(\lambda)=\vec{r_0}+\lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\5/13\\17/13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13\\-8\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\lambda\\5/13-8\lambda\\17/13-9\lambda\end{pmatrix}$

***Berechnung des Schnittwinkels:***

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=2+5-6=1$$

$|\vec{n_1}|=\sqrt{1^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{35} \qquad |\vec{n_2}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

$$\phi=\arccos\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\arccos\frac{1}{\sqrt{35}\cdot 3}=\arccos 0{,}0563=86{,}8\,°$$

## Identifizierung von Kegelschnitten

Gegeben Seien die Kegelschnitte

a) y^2 – 2y – 8x +9 = 0

b) y^2 – 2y + 8x -39 = 0

Identifiziere Sie und gebe Ihre Geographischen Bestimmungsgrößen an.

*Bestimmung des Kegeschnittart:*

$Ax^2+By^2+Cy+E=0 \qquad A^2+B^2\neq 0$

*Kreis:* $A=B$ $\qquad$ *Ellipse:* $A\cdot B>0,\ \ A\neq B$

*Hyperbel:* $A\cdot B<0$ $\qquad$ *Parabel:* $A=0\,,B\neq 0$ *oder* $A\neq 0\,,B=0$

*Daraus zu ersehen: a) ist eine Parabel*

*zu a)* *Sortieren:* $y^2-8x-2y+9=0$

$y^2-2y=8x-9$

$(y-1)^2=8x-9+1^2 \qquad \Rightarrow \qquad (y-1)^2=8x-8$

$(y-1)^2=8(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad \textit{Scheitel}(1,1)$

*Hauptform* $(y-y_0)^2=2p(x-x_0) \qquad \rightarrow \quad 2p=8 \ \rightarrow p=4>0$ *Damit ist die parabel rechts geöffnet!*

$zu\, b)\quad Sortieren: \quad y^2+8x-2y-39=0$

$y^2-2y=-8x+39$

$(y-1)^2=-8x+39+1^2 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2=-8x+40$

$(y-1)^2=-1(x-5) \quad \Rightarrow \quad Scheitel(5,1)$

$2p=-1 \quad \rightarrow \quad p=\frac{-1}{2}<0$ *Damit ist die parabel links geöffnet !*

### Schnittpunkt zweier Kegelschnitte

Bestimme den Schnittpunkt von $K_1=y^2-2y-8x+9=0$ *und* $K_2=y^2-2y+8x-39=0$

$$\begin{aligned}
y^2-2y-8x+9&=y^2-2y+8x-39 && |-9\\
y^2-2y-8x &=y^2-2y+8x-49 && |-y^2+2y\\
-8x&=8x-48 && |:8\\
-x&=x-6 && |-x\\
-2x&=-6 && |:-2\\
x&=3
\end{aligned}$$

$$y^2-2y-8\cdot 3+9=y^2-2y+8\cdot 3-39$$
$$y^2-2y-24x+9=y^2-2y+24x-39$$
$$y^2-2y-15=y^2-2y-15 \quad | \quad pq-Formel$$

$1\pm\sqrt{(-1)^2-(-15)^2} \quad \Rightarrow 1\pm\sqrt{1^2+15^2} \quad \Rightarrow 1\pm\sqrt{16} \quad 1\pm 4 \quad y_1=5 \quad y_2=-3$

*Da sich beide Scheitelpunkte auf der positiven Seite befinden ist* $r_S=(3,5)$

### Parameterdarstellung einer Funktion

Welche Funktion ist durch die Parameterdarstellung $x(t)=2t^2$ und $y(t)=-4t^4+8t^2-1$ gegeben?

$\Rightarrow \quad x=2t^2 \quad \rightarrow t=\frac{\sqrt{x}}{2}$ in $y(t)\, einsetzen: y(x)=-4(\frac{\sqrt{x}}{2})^4+8(\frac{\sqrt{x}}{2})^2-1$

$\Rightarrow -4\frac{x^2}{2}+8\frac{x}{2}-1 \quad \Rightarrow y=-2x^2+4x-1 \quad \Rightarrow$ *Parabel nach unten geöffnet.*

### Zerlegung einer Funktion in Linearfaktoren

Gebe die Zerlegung der Funktion $2x^3-8x^2+10x-4$ in Linearfaktoren an.

$2x^3-8x^2+10x-4 \quad \Rightarrow \quad Nullstellnkandidaten: \ \pm 1, \pm 2, \pm 4$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -8 | 10 | -4 |
| | - | 2 | -6 | 4 |
| X = 1 | 2 | -6 | 4 | 0 |

Daraus folgt: $2x^2-6x+4 \quad |:2 \qquad \Rightarrow \quad x^2-3x+2$

$$1{,}5\pm\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2-2} \quad = \quad 1{,}5\pm\sqrt{0{,}25} \quad = \quad 1{,}5\pm 0{,}5 \quad x_2=2 \quad x_2=1$$

$$(x-1)^2(x-2)$$

## Zerlegung einer gebrochen-rationalen Funktion in ein Polynom und ein echten Polynombruch

Zerlegen der gebrochen-rationalen Funktion $\dfrac{3x^4-3x^3-10x^2+16x+5}{x^2-x-2}$ in ein Polynom und ein echten Polynombruch.

$$3x^4-3x^3-10x^2+16x+5 \; : \; x^2-x-2 \; = \; 3x^2-4\left(\frac{12x-3}{x^2-x-2}\right)$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\;\; 3x^4-3x^3-6x^2} \\ \qquad\quad -4x^2+16x+5 \\ \underline{\quad - \quad\;\; -4x^2+\;4x+8} \\ \qquad\qquad\qquad 12x-3 \qquad \textit{weiter geht nicht} \end{array}$$

## Partialbruchzerlegung

Zerlege den Polynombruch $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$ in seine Partialbrüche.

$1.$ *Nennernullstellen suchen:*

$x^3-5x^2+8x-4=0 \quad \Rightarrow$ *Nullstellenkandidaten:* $\pm 1, \pm 2, \pm 3$

*Durch ausprobieren finden wir die* $1.$ *Nullstelle bei* $1:$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -5 | 8 | -4 |
| | - | 1 | -4 | 4 |
| x = 1 | 1 | -4 | 4 | 0 |

*Die weiteren Nullstellen:* $\Rightarrow$ *pq:* $x^2-4x+4 \quad 2\pm\sqrt{(-2)^2-4}=2\pm\sqrt{0} \quad x_2/x_3=2$

*Partialbrüche zuordnen:*

$x_1=1$ *(einfache Nullstelle)* $\rightarrow \dfrac{A}{(x-1)}$

$x_{2/3}=2$ *(doppelte Nullstelle)* $\rightarrow \dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

*gleichnamig machen mit HN* $(x-1)(x-2)^2$: $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}=\dfrac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$

*folgt* $x+1=A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)$

*Einsetzen für x:* 1 2 *und* 0 *ergibt:*

$x=1 \quad \Rightarrow \quad 2=A \quad \Rightarrow \quad A=2$

$x=2 \quad \Rightarrow \quad 3=C \quad \Rightarrow \quad C=3$

$x=0 \quad \Rightarrow \quad 1=4A+2B-C \quad \rightarrow \quad 1=4\cdot 2+2B-3 \quad \Rightarrow \quad 4=8+2B \quad \Rightarrow -4=2B \quad \Rightarrow B=-2$

*Damit lautet die gesuchte Partialbruchzerlegung:* $\dfrac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}+ \quad 3$

## Logarithmus

Bestimme x aus der Gleichung $0{,}8^{2x-3}=1{,}6^x$

$2x-3\cdot\ln 0{,}8=x\cdot\ln 1{,}6 \quad |: \ln 1{,}6$

$2x-3\cdot\ln(\dfrac{0{,}8}{1{,}6})=x$

$2x-3\cdot(\ln 0{,}8-\ln 1{,}6)=x \quad |-2x$

$-3\cdot(\ln 0{,}8-\ln 1{,}6)=-x \quad |\cdot(-1)$

$3\cdot(\ln 0{,}8+\ln 1{,}6)=x$

$0{,}74=x$

## Beispiel zur Berechnung einer Umkehrfunktion

Wie lautet die Umkehrfunktion der streng monoton Steigenden Funktion $y(x)=3e^{2x-1}$

*Auflösen nach x:* $\ln y=3\cdot(2x-1) \rightarrow \ln y=6x-3 \rightarrow \ln y+3=6x \rightarrow \dfrac{\ln y}{6}+\dfrac{1}{2}=x$

*vertauschen x und y ergibt:* $\dfrac{\ln x}{6}+\dfrac{1}{2}=y$

## Bestimmung von Wendepunkten

Bestimme die x-Werte, an denen für die Funktion y(x) = e^{-2x^2} die notwendigen Bedingung für Wendepunkte erfüllt ist.

$$\textit{Wendepunkt:} \quad f''(x)=0 \quad \textit{und} \quad f'''(x)\neq 0$$

$$y(x)=e^{-2x^2}$$

$$y'(x)=-4x\cdot e^{-2x^2}$$

$$y''(x)=-4\cdot e^{-2x^2}-4x\cdot -4x\cdot e^{-2x^2} \;=\; -4\cdot e^{-2x^2}+16x^2\cdot e^{-2x^2} \qquad |\;=0$$

$$0=16x^2\cdot e^{-2x^2}-4\cdot e^{-2x^2}$$

$$4\cdot e^{-2x^2}=16x^2\cdot e^{-2x^2} \qquad |:e^{-2x^2}$$

$$4=16x^2 \quad \rightarrow \quad 2=4x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}=x \quad y''(1/2)=0$$

$$y'''(x)=\underbrace{32x\cdot e^{-2x^2}}_{32x\cdot e^{-2x^2}+}\;\underbrace{+16x^2\cdot -4x\cdot e^{-2x^2}}_{-64x^3\cdot e^{-2x^2}}\;\underbrace{-4\cdot -4x\cdot e^{-2x^2}}_{+16x\cdot e^{-2x^2}}$$

$$=48x\cdot e^{-2x^2}-64x^3\cdot e^{-2x^2} \qquad |\textit{sort.}$$

$$=-64x^3\cdot e^{-2x^2}+48x\cdot e^{-2x^2}$$

$$y'''(1/2)\neq 0 \qquad \textit{Damit ist } 1/2 \textit{ eine } x-\textit{Koordinate für Wendepunkt. Durch ausprobieren auch} -1/2.$$

## Relatives Minimum und Maximum

Die Funktion $y(x)=\sin(x)-\sin^2(x)$ hat an der Stelle $x_E=\pi/6$ einen Extremwert. Handelt es sich um ein relatives Minimum oder um ein relatives Maximum?

Minimum y''(x) > 0 Maximum y' (x) < 0

$$y(x)=\sin(x)-\sin^2(x) \qquad |\textit{aufdröseln des Quadrates}$$

$$y'(x)=\cos(x)-\sin(x)\sin(x) \qquad |\textit{Produktformel anwenden}$$

$$=\cos(x)-\cos(x)\sin(x)-\sin(x)\cos(x) \qquad |\textit{Zusammenfassen}$$

$$=\cos(x)-2\sin(x)\cos(x) \qquad |\textit{sortiert}$$

$$=-2\sin(x)\cos(x)+\cos(x)$$

$$y''(x)=-2\cos(x)\cos(x)-\sin(x)\sin(x)+\cos(x)$$

$$=-2\cos^2(x)-\sin^2(x) \qquad -\sin(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\sin^2(x)=\cos^2(x)-1$$

$$=-2\cos^2(x)+\cos^2(x)-1 \qquad -\sin(x)$$

$$=-2\cot 2\cos^2(x)-1 \qquad -\sin(x)$$

$$=-4\cos^2(x)+2-\sin(x)$$

$$=-4\cos^2(x)-\sin(x)+2$$

$$x_E=\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad -4\cos^2(\pi/6)-\sin(\pi/6)+2 \qquad \rightarrow \sin(\pi/6)=1/2 \qquad \cos(\pi/6)=1/2\sqrt{3}$$

$$=-4\cdot(1/2\sqrt{3})^2-1/2+2 \quad \rightarrow \quad -4\cdot(\frac{1}{2}^2\cdot 3)+1{,}5 \quad \rightarrow \quad -4\cdot(0{,}25\cdot 3)+1{,}5 \quad \rightarrow \quad -4\cdot 0{,}75+1{,}5$$

$$= \; -3+1{,}5 \quad \Rightarrow \quad -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad <0 \quad \textit{ergibt maxima}$$