Mathematatik

- Algebra -

Dragan Milenkovic

Inhaltsverzeichnis

Determinanten

$$a_{11}x_1 \times a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 \times a_{22}x_2 = b_2$$

$b_1 = b_2 = 0$	*homogen*
$b_1 \vee b_2 \neq 0$	*inhomogen*
$b_1 \wedge b_2 \neq 0$	*inhomogen*

$$\begin{array}{ll} I & a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 = b_1 \quad | * a_{22} \\ II & -a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 = b_2 \quad | *(-a_{12}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I' & a_{11} * a_{22} * x_1 + a_{12} * a_{22} * x_2 = b_1 a_{22} \\ II' & -a_{12} * a_{21} * x_1 - a_{12} * a_{22} * x_2 = -a_{12} * b_2 \end{array}$$

$$(a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}) * x_1 + \ 0 \ = b_1 * a_{22} - a_{12} * b_2$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \qquad \textit{wenn } N \neq 0$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Bsp 1:
Man löse

$$2x_1 - x_2 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 = -3$$

$$x_1 = \frac{(4*2)-(2*-3)}{(2*2)-(-1*1)} = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$
$$x_2 = \frac{(2*-3)-(1*4)}{(2*2)-(-1*1)} = \frac{-10}{5} = -2$$

Cramersche Regel:

$$\boxed{D := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$\textit{Seien} \quad D := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_1 := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\textit{dann gilt} \quad x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$\textit{wenn } D \neq 0\,! \qquad \rightarrow \textit{Cramersche Regel}$$

Bsp 2: Löse das Gleichungssystem (GLS) aus Bsp1 nach der Cramerschen Regel.

$$\textit{Es gilt } D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} b \\ 4 \\ -3 \end{array} \qquad \rightarrow 4-(-1)=5$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8-3=5 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6-4=-10$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{5} = 1 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-10}{5} = -2$$

Bsp 3a: Man löse $2x+3y=3$ *und* $-6x+6y=1$!

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 12-(-18)=30$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18-3=15 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-18)=20$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Veranschaulichung der Lösungsmenge (Achsenabschnittsform):

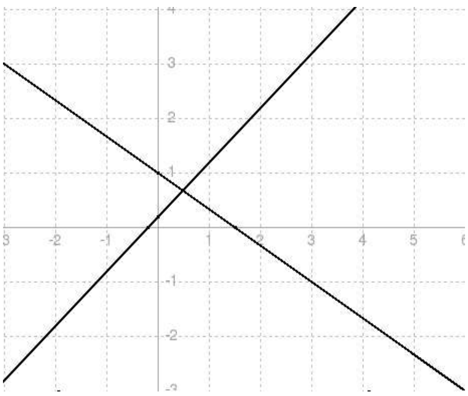
$$I \quad 2x+3y=3 \quad |:3$$

$$\frac{2x}{3}+y=1$$

auch schreibbar als Achsenabschnittsform $\quad \frac{x}{3/2}+\frac{y}{1}=1$

$$II \quad -6x+6y=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{-1/6}+\frac{x}{1/6}=1$$

Merke: Immer so rechnen, dass am ende die 1 steht. Die 1 an dieser Stelle ist sehr wichtig. Dann beim Zeichnen:



Auf der y-Achse die Zahl unter y abtragen, in diesen Fall auch eine 1.

Auf der x-Achse die Zahl unter x abtragen, hier, $\frac{3}{2}$ = 1,5.

Für die 2. gerade:

Auf der y-Achse die Zahl unter y abtragen, hier $\frac{-1}{6}$.

Auf der x-Achse die Zahl unter x abtragen, hier, $\frac{1}{6}$.

Beispiele wo die Cramersche Regel nicht anwendbar ist.

Bsp 3b:

Man löse $\begin{array}{ll} I & x+y=2 \\ II & 2x+2y=8 \end{array}$ in die Achsenabschnittsform und Determinanten:

$$I \qquad x+y=2 \qquad |:2 \qquad \rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$$

$$II \qquad 2x+2y= \qquad |:8 \qquad \rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=4-8=-4 \qquad\qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=8-4=4$$

$$x=\frac{D_1}{D} \qquad\qquad y=\frac{D_2}{D}$$

Merke: Hier ist die Cramersche Regel NICHT anwendbar, da D = 0 !!!
Hier ist auch ein Widerspruch:

$$aus\,(I)\; x+y=2 \qquad |\; *2 \qquad \rightarrow \; 2x+2y=4$$
$$\Rightarrow \text{in II } steht\ \underline{aber}\ 2x+2y=8$$
$$\Rightarrow Wiederspruch\,!$$

Bsp 3c:

Man löse $2x+3y=6 \quad und \quad x+\frac{3}{2}y=3$!

$$2x+3y=6 \qquad |:6 \qquad\qquad x+\frac{3}{2}y=3 \qquad |:3$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \qquad\qquad \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\;=1$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}=3-3=0 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}=9-9=0 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}=6-6=0$$

Merke: Cramersche Regel nicht anwendbar, da alles 0 !

Bsp 3d:

Man löse $2x-3y=0$ *und* $x-\frac{3}{2}y=0$ $\quad$ *Zur Errinerung* : $b_1=b_2=0$ *ist* <u>*homogen*</u> *!*

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & \frac{-3}{2} \end{vmatrix}=-3-(-3)=0 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & \frac{-3}{2} \end{vmatrix}=0 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ *Cramersche regel nicht anwendbar*
$e \Rightarrow$ *keine Achsenabschnittsform*

$$\textit{Geradengleichung} \qquad I \quad 3y=2x \quad \rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x$$

$$II \quad \frac{3}{2}y=x \quad \rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x$$

Bsp 3e:
Man löse $3x-3y=0$ *und* $3x-y=0$

$$\textit{daraus folgt}: I \quad y=\frac{2}{3}x$$

$$II \quad y=3x$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=2*(-1)-3*(-3)=-2+9=7 \qquad \Rightarrow \neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{0}{7}=0 \qquad y=\frac{Dy}{D}=\frac{0}{7}=0$$

Stürzen der Determinante

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{21} \\ a_{12} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}$$

Hinweis : Die **fetten** *Zahlen bleiben auf ihren Positionen*

Faktorregel

$$k*\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Satz 5

Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten) ändert sich das Vorzeichen.

Beispiel zu Satz 3

(Faktorregel)

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 8\end{vmatrix}=8-(-6)=14$$

$$\mathbf{5\,D_1} = \mathbf{5}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 8\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{5} & 2\\ \mathbf{-15} & 8\end{vmatrix}=40-(-30)=\underline{70}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \mathbf{10}\\ -3 & \mathbf{40}\end{vmatrix}=40-(-30)=\underline{70}$$

Sind die Elemente einer Zeile (Spalte) ein vielfaches der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile (Spalte), so ist der Wert der Determinante gleich Null.

Beweis:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ ka_{11} & ka_{12}\end{vmatrix} \quad \Rightarrow -k*z_1$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$-k*z_1*a_{11}=\begin{array}{r}-ka_{11}\\ \underline{ka_{11}}\\ 0\end{array}$$

.

Beispiel zu Satz 4

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 8\end{vmatrix} \quad \Rightarrow Z_2+3\,Z_1$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 14\end{vmatrix}=14-0=\underline{14}$$

Determinante n-ter Ordnung

Adjunkte ist $A_{ik}=(-1)^{i+k}*U_{ik}$ *wobei* U_{ik} *die Unterdeterminante*

$$D=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & -2 & 5 & -1\\ 2 & 1 & 3 & -2\end{vmatrix}$$

Bilde die Adjunkte zu A_{23} *zum Element* $a_{23}=\underline{\underline{2}}$

$$\Rightarrow A_{23}=(-1)^{2+3}*U_{23}=-1^5*U_{23}$$

$$=-1*\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

Vorzeichenschema:

$$\begin{vmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\end{vmatrix}$$

Satz 7:

Ich darf mir irgendeine Zeile aussuchen, bilde zu dieser Zeile alle Adjunkten, multiplizieen, addieren dann hab ich den Wert.

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3} + a_{\mathrm{in}} A_{\mathrm{in}}$$

Ist eine Zeile (Spalte) der Determinante 0, ist der Wert 0!

Regel von Sarrus (für 3-Reihige Determinanten)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$d.h. \quad a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{13} * a_{21} * a_{32} - (a_{31} * a_{22} * a_{13} + a_{32} * a_{23} * a_{11} + a_{33} * a_{21} * a_{12})$$

Regel von Laplace

Bsp 2: Berechnen Sie $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ nach a) Laplace und b) nach Sarrus.

$a)\ nach\,Laplace$

$Entwicklung\,nach\,(Willkürlich)\,1.\,Spalte.$

$$D = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & -2 & 1 \\ \mathbf{1} & -2 & -1 \\ \mathbf{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad damit\,ist\,k=1\,Seite\,5\,\mathrm{im}\,Umdruck.$$

$$Formel: D = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$$

$$= unter\,berücksichtigung\,der\,Vorzeichenregel$$

$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \; -1 \; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \; 2 \; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-(-1)) - (4-1) + 2(2-(-2))$$
$$= 10 - 3 + 8$$
$$= \underline{15}$$

$b)\,nach\,Sarrus$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= 8 + 4 + 1 - (-4 + (-2) + 4)$$
$$= 13 + 2 = \underline{15}$$

Bsp 3:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ \mathbf{2} & \underline{\mathbf{1}} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Spalte willkürliche ausgewählt, suche nach 0 oder 1

1. Schritt : $S_1 - 2 S_2$

$$=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ -9 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Schritt $S_3 - 5 S_2$

3. Schritt $S_4 + 3 S_2$

$$=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 14 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -9 & 5 & -27 & 17 \\ 1 & -2 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \textit{Hinweis:}\ 7 &= 3-(-2*2)=3+4 \\ 0 &= 2-(2*2) \\ -9 &= 1-(2*5)=1-10 \\ 1 &= -3-(2*-2)=-3-(-4) \end{aligned}$$

$D = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} + a_{24} A_{24}$

Entwicklung nach 2. Zeile

$\Rightarrow D = 0 * A_{21} + 1 * A_{\mathbf{22}} + 0 * A_{23} + 0 * A_{24}$

$$=1\begin{vmatrix} 7 & 14 & -4 \\ -9 & -27 & 17 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 7 & 14 \\ -9 & -27 \\ 1 & 6 \end{matrix}=945+238+216-108-714-630=\underline{53}$$

Bsp 4: zur Cramerschen Regel

Man löse mit Sarrus und Cramersche Regel

$$\begin{aligned} x_1 + 2 x_2 + - x_3 &= -3 \\ 3 x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2 x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \;=\; 2+2+3-[8-(-1)-(-1)-12] = \;-3$$

$$Dx_1=\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{matrix} \;=\; (-6)+12+4+6-3-16= \;-3$$

$$Dx_2 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right| = 8-3-18-(-4)-6-(-18) = 3$$

$$Dx_3 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & -1 \end{array}\right| = 6+8+9-(-3)-(-4)-(+36) = -6$$

daraus folgt:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad x_2 = \frac{Dx_2}{D} = \frac{3}{-3} = -1 \qquad x_3 = \frac{Dx_3}{D} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Vektoralgebra

- freie Vektoren:

  Parallelverschiebung (Translation)

  Geschwindigkeit $\vec{v}$

  Beschleunigung $\vec{a}$

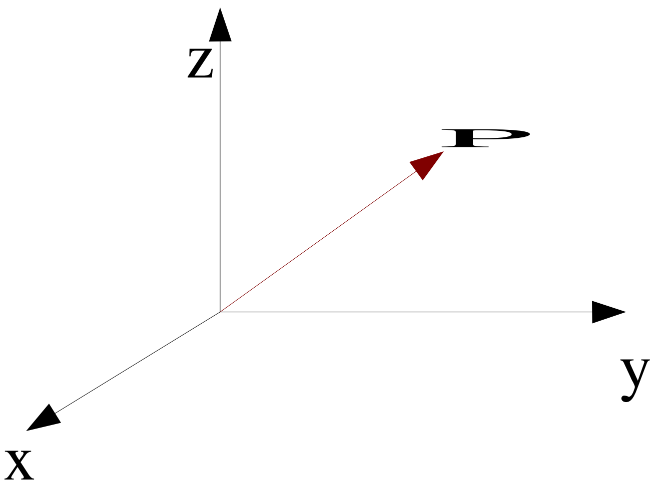
- linienflüchtige Vektoren

  Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

- gebundene Vektoren

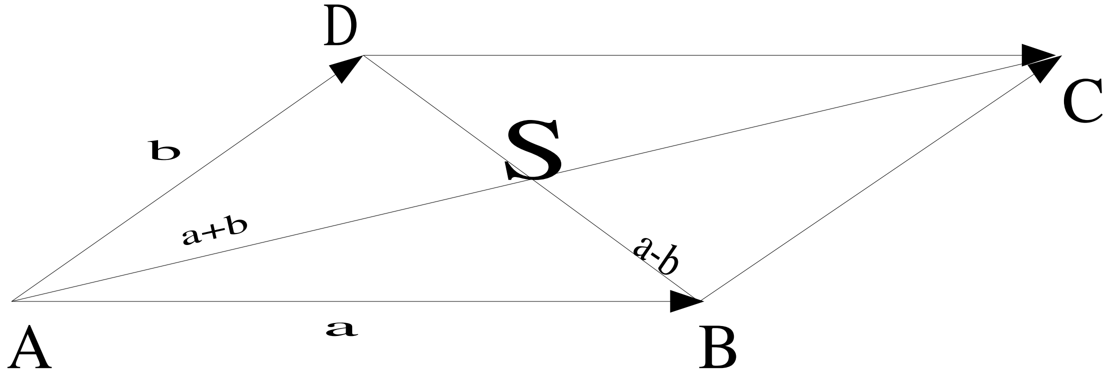
  Kraft $\vec{F}$

  Ortsvektor $\vec{OP}$ also vom Ursprung (0) zum Punkt P



Rest Umdruck Seite 13; Def 7 (Satz 5)

Bsp 1: Man zeige, dass sich die Diagonalen in einem Paralelogramm halbieren.



Bew.: Es sei S der Mittelpunkt der Strecke $\vec{DB}$

Es gilt :

$$\vec{DB} = a - b$$

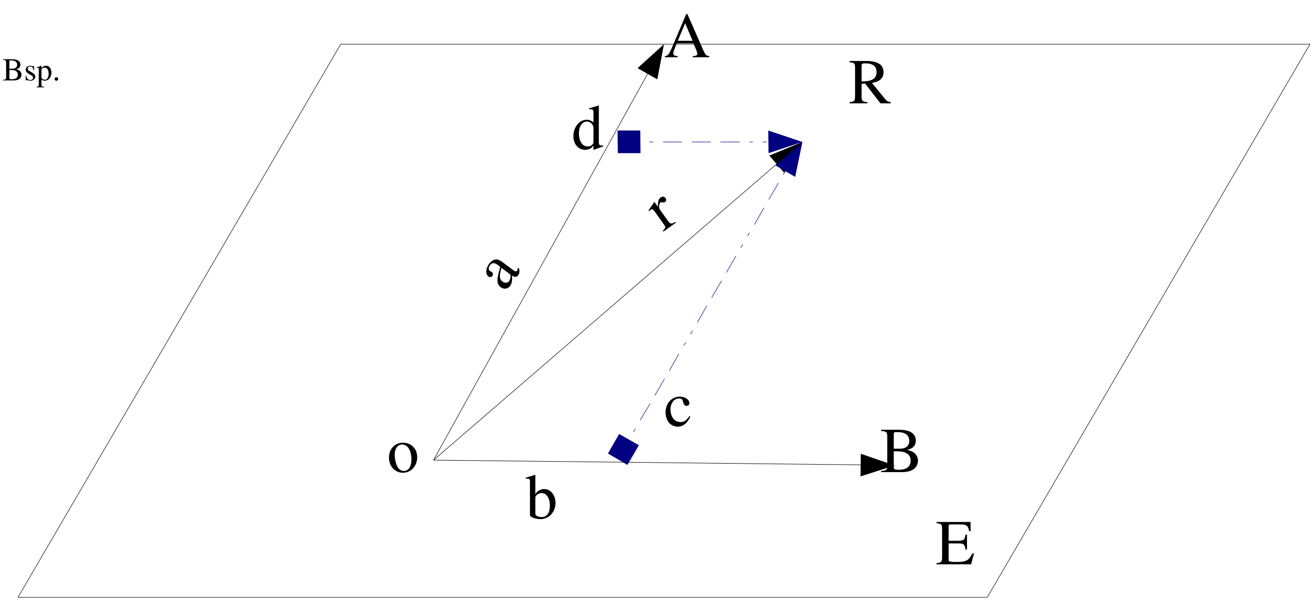
$$\vec{DS} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\begin{aligned}\vec{AS} &= \vec{b} + \vec{DS} \\ &= \vec{b} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} \\ &= \vec{b} + \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2} \\ &= \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}\end{aligned}$$

$$somit\ \vec{AS} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \Rightarrow S\ ist\ Mittelpunkt\ der\ Strecke\ \vec{AC} \wedge S\ halbiert\ \vec{AC}$$

Ebenen

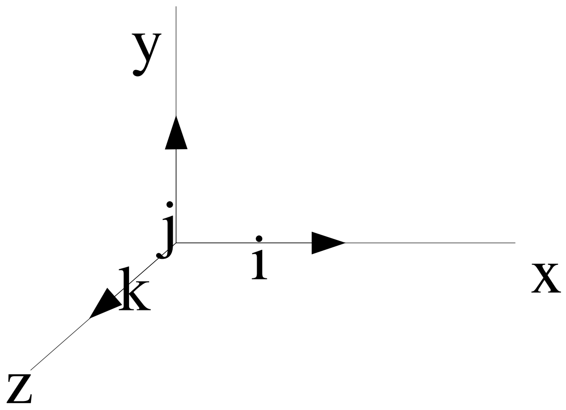
Bsp.



$\vec{r} \in E$
$\vec{OD} = x * \vec{OA} \;=\; x\vec{a}$
$\vec{OC} = y * \vec{OB} \;=\; y\vec{b}$¿
$\boldsymbol{\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}}$ **, *dabei sind (heißen) x und y Koordinaten***

x,y eindeutig bestimmt nach Konstruktion und heißen **Koordinaten** vor $\vec{r}$ bzgl. der Basis $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Somit heißen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **Basisvektoren**.

Die Vektoren $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ des Raumes bilden den so genannten **Kanonische Basis**:



Bsp 3:

Gegeben sei der R² (Ebene) sowie Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $und\, \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

==> Koordinatenumrechnung bzgl. der Basis.

1) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen die Ebene aufbau

2) Jeder Vektor aus R² lässt sich eindeutig durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen.

$\vec{x} \in R^2 \qquad \Rightarrow \vec{x}\,\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \qquad \lambda, \mu\, eindeutig.$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden eine Basis der R²

Frage: Wie lauten die Koordinaten eines beliebigen, aber festen Punktes bzgl. $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

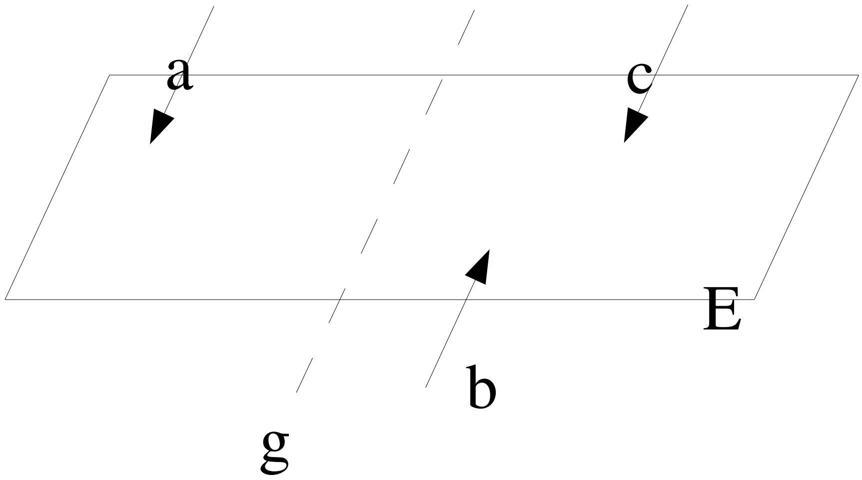
z.B. Die Koordinaten des Punktes P(3,5)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\begin{matrix}ist\\ist\end{matrix} \qquad \begin{matrix}3 = 1*\lambda - 1*\mu\\ 5 = 1*\lambda + 1*\mu\end{matrix} \qquad \begin{matrix}8 = 2*\lambda \Rightarrow \lambda = \underline{4}\\ 3 = 4 - \mu \Rightarrow \mu = \underline{1}\end{matrix}$$

$\Rightarrow \lambda = 4 \quad und\; \mu = 1\, sind\, die\, Koordinaten\, von \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} bzgl.\, der\, Basis \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} und \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren



Für alle Vektoren $\vec{b} \parallel g$ gibt es ein $p \in R \setminus \{0\}$

Die Eigenschaft nennt man „k ollinear“; wenn $\vec{b}=p*\vec{a}$ erfüllt ist. Somit heißen $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ kollinear.

Definiere: $V^1 := \{\vec{b} \mid \vec{b}=p*\vec{a} \wedge p \in R\}$

V^1 ist ein Vektorraum und $\vec{a}$ heißt Basis des Vektorraums. „Kollinear“ heißt: zur selben Linie.

Da dieser Vektorraum eindeutig, bereits durch einen einzigen Basisvektor, definiert ist, heißt V^1 eindimensional.

Wichtig: Umdruck Seite 15 Satz 6

$$k_1*\vec{a}+k_2*\vec{b}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{b}=\frac{-k_1}{k_2}\vec{a} \qquad \textit{für} \neq 0$$

E, E1 und E2 sind parallel. In $\textit{Vektorschreibweise}: \vec{c}=p\,\vec{a}+q\,\vec{b}$

$$\textit{Man erhält}:$$
$$V^2=\{\vec{c} \mid \vec{c}=p\,\vec{a}+q\,\vec{b} \wedge p,q \in R\}$$
$$\textit{daras folgt}: k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=0 \qquad k \neq 0$$

Bsp 4:(vgl. Bsp 3)

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$Sind\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\, komplanar\ ?$

$Es\, sei\, k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_2\vec{c}=\vec{0}$

$$\Rightarrow k_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow k_1-k_2+3k_3&=0\\ k_1+k_2+5k_3&=0\end{aligned}$$

$k_3\, wird\, willkürlich\, als\ \ -1\ \ ausgewählt\ , somit$

$$\begin{aligned}\Rightarrow k_1-k_2-3&=0\\ k_1+k_2-5&=0 \quad +\\ \hline 2k_1 \quad -8&=0 \qquad \Rightarrow \quad k_1=4\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4-k_2-3=0 \qquad \Rightarrow \quad k_2=1$$

$d.h.\quad 4\vec{a}+1\vec{b}-1\vec{c}=\vec{0}$

$$oder\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar, dann gilt $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$ und somit wird daraus: $k_1=k_2=k_3=0$¿

Hinweis: Komplanar = in einer Ebene

Kollinear = parallel

Def 8c: Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar, dann ist $V^3:=\{\vec{d}|\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\wedge p,q\in R\}$ ein dreidimensionaler Vektorraum ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) heißen Basis von V^3.

Def 9: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} p_j\vec{a}_j=\vec{0}$

$$V^n=\{\vec{v}|\vec{v}=\sum_{j=1}^{n+1} p_j\vec{a}_j\wedge p_i\in R\}$$

Bsp 1:

$Sei\ \ \vec{a}_2:=c\vec{a}\wedge c\neq 0 \qquad dann\, sind\, \vec{a}_1\, und\, \vec{a}_2\, linear\, abhängig\,!$

$Denn\, 1\vec{a}_2-c\vec{a}_1=\vec{0} \qquad (\vec{a}_2=k_2\, und -c=k_1)$

Bsp 2:

Seien $\vec{a}_1 := a$, $\vec{a}_2 := b$, $\vec{a}_3 := b - 2\vec{a}$
dann sind $\vec{a}_{1,}\ \vec{a}_2$ *und* $\vec{a}_3$ *linear abhängig !*

$$\vec{a}_3 = b - 2a$$
$$a_3 = \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1$$
$$2\vec{a}_1 - 1\vec{a}_2 + 1\vec{a}_3 = 0$$

Bsp 3:

Gegeben seien die endlich vielen Funktionen $y_0 = 1$ $y_1 = x^1$ $y_2 = x^2$ $y_n = x^n$

- die Menge aller Funktionen, die ich aus $y_0 = 1$ $y_1 = x^1$ $y_2 = x^2$ $y_n = x^n$ bilden kann stellen einen Vektorraum dar!
- $y_{0,}\ y_{1,}\ y_{2,} \ldots$ sind linear unabhängig, denn
  $a_0 y_0 + a_1 y_1 + \ldots + a - n y_n = a_0 * 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$
- $y_{0,}\ y_{1,}\ y_n$ bilden damit eine Basis des Vektorraums aller Polynomfunktionen mit maximalen Grad n

$$V = \left\{ \begin{aligned} P(x) | P(x) &= \sum_{j=0}^{n} a_j y_j ,\ a_j \in R \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j y_j ,\ a_j \in R \end{aligned} \right\}$$

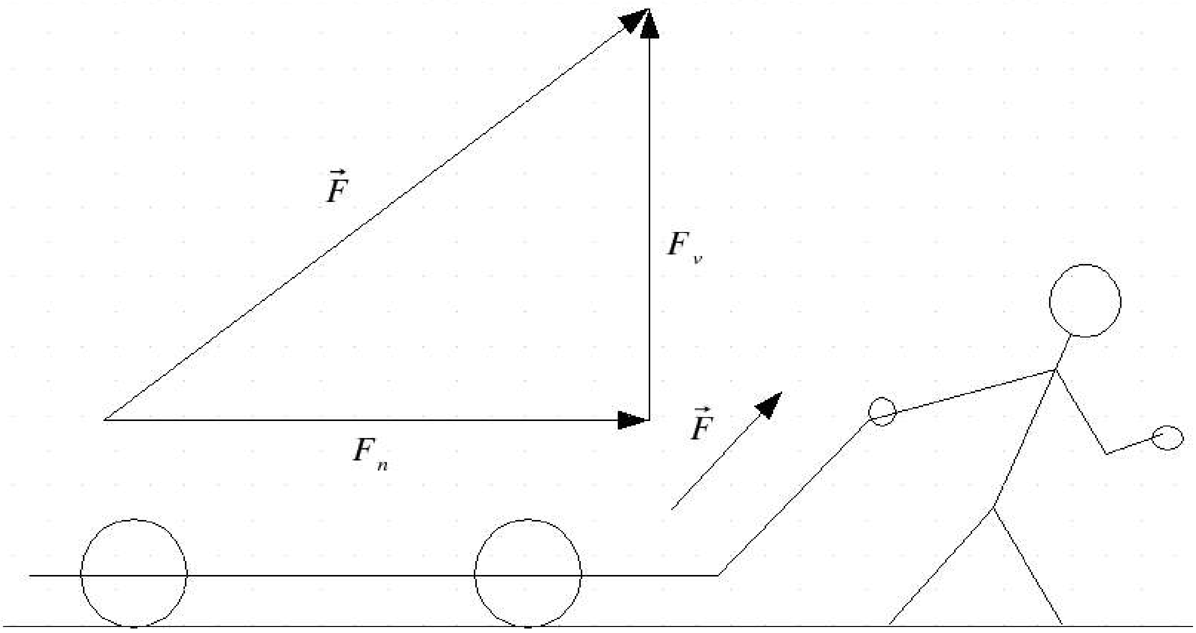
Koeffizientenvergleich

$$2x^3 - x^2 + x - 1 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2 + Dx$$

Koeffizienten von $x^3 \Rightarrow\ 2 = A + C$ $\quad x^2 \Rightarrow -1 = B + D$

$x \Rightarrow\ 1 = A + D$ $\quad x^0 \Rightarrow -1 = B$

Das Skalare Produkt



$F_h = horizontale\ Kraft \quad F_v = vertikale\ Kraft$

In der Mechanik wird der Begriff Arbeit als $W = |\vec{F}_H| * |\vec{s}|$

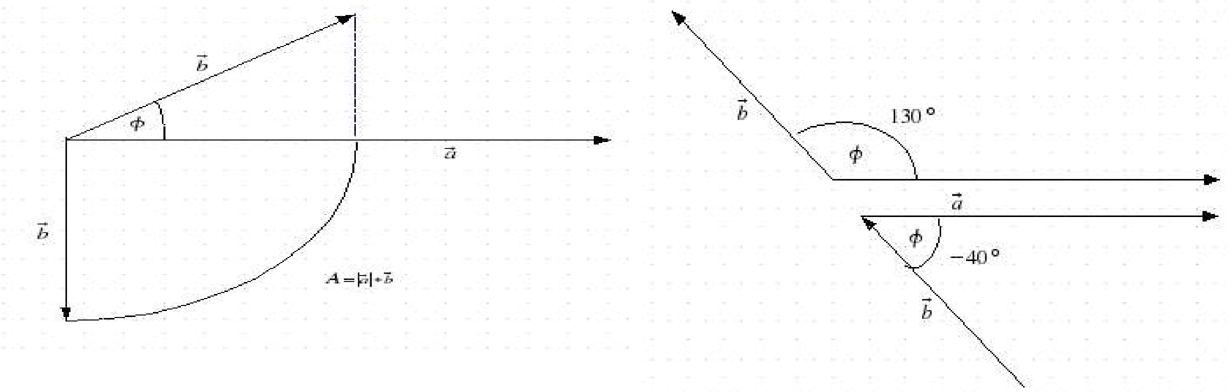
Es zählt immer nur die Komponente der Richtung. Wenn die Kraft nach ober wirkt dann $\vec{F}_v$.

$$Es\ gilt\ für\ \phi = \frac{|\vec{F}_H|}{|\vec{F}|} \quad \rightarrow |\vec{F}| * \cos\phi$$

$$daraus\ folgt: W = |\vec{F}| * |\vec{s}| * \cos\phi = |\vec{F}| * |\vec{s}| * \cos \sphericalangle(\vec{F}, \vec{s})$$

W ist eine Skalare Größe, die mit Hilfe von Vektoren definiert ist!

Der Betragswert des Skalaren Produktes $\vec{a} * \vec{b}$ ist gleich folgender Rechteckfläche.



Projektion. $A = |\vec{a} * \vec{b}| \quad \phi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \cos\phi = \frac{x}{|\vec{b}|} \quad x = \vec{b} * \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \quad dh.\ A = x * |\vec{a}|$

Seien $\vec{a},\vec{b}\in V$. Dann gilt

1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b} \;=\; \vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}| \;\; da\,\phi=0$
2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b} \;=\; \vec{a}*\vec{b}=-|\vec{a}|*\vec{b}\,,da\,\phi=180°\wedge\cos\phi$
3) $\vec{a}=\vec{b}=\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|^2$
4) $daraus\ folgt:|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}*\vec{a}}$

Achtung Satz 10 Seite 10

$K\in R \qquad (K\vec{a})\vec{b}=K(\vec{a}\vec{b})=\vec{a}(K\vec{b})$

1) $\vec{a}*\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}=0\vee\vec{b}=0 \;\vee\; \vec{a}\perp\vec{b}$
2) $Seien\,\vec{a}\neq0 \;\wedge\; \vec{b}\neq0 \;\; dann\,gilt \;\; \vec{a}*\vec{b}=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\perp\vec{b}$

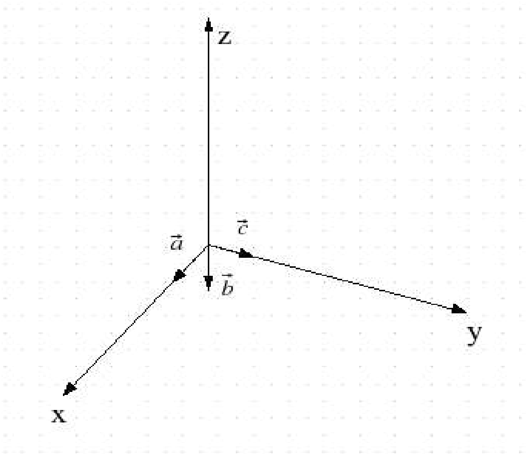
Beispiel

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\;\;\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\;\;\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}*\vec{b})*\vec{c}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\phi*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=1*\sqrt{2}*\cos 45°*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=1*\sqrt{2}*\frac{1}{2}\sqrt{2}*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}!,da\,(\vec{a}*\vec{b})*\vec{c}$$



Dagegen:

$$\vec{a}(\vec{b}*\vec{c})=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}*|\vec{b}|*|\vec{c}|*\cos\phi$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}*1*\sqrt{2}*\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{a}$$

$das\,bedeutet:(\vec{a}\vec{b})*\vec{c}\neq\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$

MAN KANN NIE DURCH EINEN VEKTOR DIVIDIEREN

Bsp.

$$Gegeben\ seien\ \vec{a}, \vec{b}\ und\ |\vec{a}|=3 \qquad |\vec{b}|=4$$

$a)\ \ 60° \ das\ ist\ 3 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 6$
$b)\ \ 90° \ das\ ist\ 3 \cdot 4 \cdot \cos 90° = 0 \qquad \rightarrow \cos 90° = 0\,!!!$
$c)\ 150° \ das\ ist\ 3 \cdot 4 \cdot \cos 150° = -6\sqrt{3}$

Bsp.

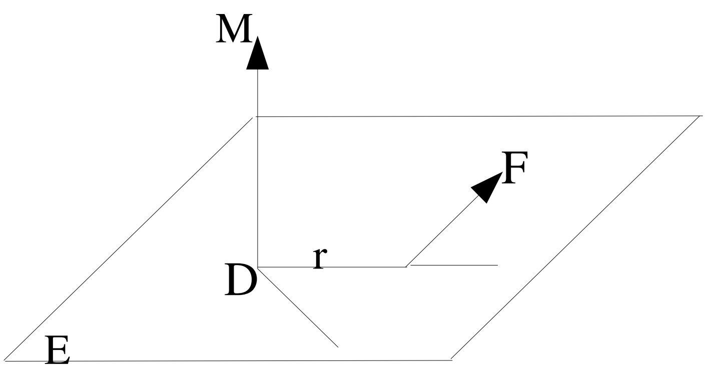
1) Man beweise den Cosinussatz

3) Berechnung des Winkel $\phi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\ aus\ \vec{a}\ und\ \vec{b}$

Aus $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} * \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

z.B. : $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3, \vec{a} * \vec{b} = 10 \quad = \cos \sphericalangle(\vec{a}, 5) = \dfrac{10}{5*3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \sphericalangle = arcos(\dfrac{2}{3}) = \pm 48{,}19°$

Das Vektorielle Produkt



$M = |\vec{M}| = |\vec{r}| * |\vec{F}| * \sin \sphericalangle(\vec{r}, \vec{F})$

Der Vector $\vec{M}$ wird so festgelegt, daß

1.) $\vec{M} \perp \vec{F} \wedge \vec{M} \perp \vec{r}$

2.) $|\vec{M}| = M$

3.) $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ bilden einen Rechtssystem daraus folgt :

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (NICHT\,!!!!!\ \vec{F} \cdot \vec{r})$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

4.)
$1.)\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
$2.)\ \vec{c} \perp \vec{a} \qquad c \perp \vec{b}$
$3.)\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ bilden\ Rechtssystem$

Als Ergebnis kommt ein Vektor raus !!!!

$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})\,nicht\ kommutativ$

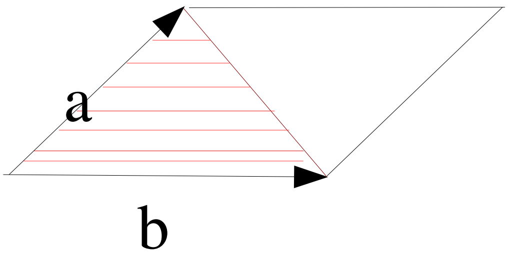
$k\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(k\,\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{b}k)$

$\vec{a}\times(b+c)=a\times b+a\times c$

Also :

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})^2=(\vec{a}\times\vec{b})*(\vec{a}\times\vec{b})&=|\vec{a}\times\vec{b}|^2\\
&=(|\vec{a}|*|\vec{b}|*\sin\sphericalangle)^2\\
&=|\vec{a}^2|*|\vec{b}^2|*\sin^2\sphericalangle\\
&=|\vec{a}^2|*|\vec{b}^2|*(1-\cos^2\sphericalangle)\\
&=a^2b^2-|\vec{a}^2|*|\vec{b}^2|\cos^2\sphericalangle\\
&=a^2b^2-[|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\sphericalangle]\\
&=a^2b^2-(\vec{a}*\vec{b})^2
\end{aligned}
$$

Bsp.1.: Gesucht ist der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks



$F_{Parallelogramm}=|\vec{a}\times\vec{b}|$

d.f. $F_{Dreieck}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

$=\frac{1}{2}\vec{a}*\vec{b}*\sin\sphericalangle$

Bsp 2 :Man beweise den Sinussatz der ebenen Trigonometrie

$a*b*c=\sin\alpha*\sin\beta*\sin\gamma$ bzw.: $\frac{\sin alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$

Es gilt :

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times 0=0$

2) $\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{a}\,\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times\vec{a}+b\times c+b\times b \qquad =0$

$d.h.vec\,b\times 0=0$

$\vec{b}\times\vec{a}\quad+\vec{b}\times\vec{c}=0$

3) $\vec{b}\times\vec{c}\,0-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$

$(2)\wedge(3)\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}\quad\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|\quad|\vec{a}||\vec{b}|\sin\gamma=|\vec{b}||\vec{c}|\sin\alpha=|\vec{a}||\vec{c}|\sin\beta$

Seien $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ die Vektoren

Mit der Definition :

$$r_x:=\pm|\vec{r}_x|\quad \vec{r}_y=\pm|\vec{r}_y|\quad \vec{r}_z=\pm|\vec{r}_z|$$
$$\Rightarrow\vec{r}=r_x*\vec{i}+r_y\vec{j}+r_z\vec{k}$$

Die Beträge sind die Koordinaten vom Ursprung her .

Heftet man $\vec{r}$ am Nullpunkt an, so gilt (r_x,r_y,r_z) sind die Koordinaten des Endpunktes von $\vec{r}$.

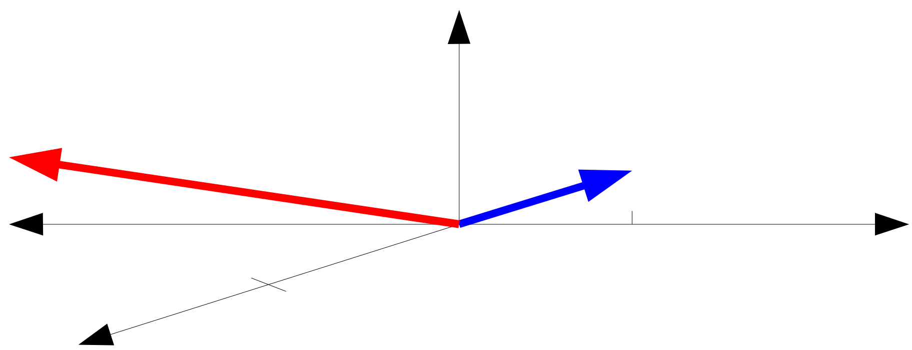
Sind bei allgemeiner Lage (also fängt $\vec{r}$ irgendwo an) von $\vec{r}$ $(x_{1,}y_1,z_1)$ die Koordinaten des Anfangpunktes von $\vec{r}$ und $(x_{2,}y_{2,}z_2)$ die Endkoordinaten von $\vec{r}$, so gilt :

$$r_x=(x_2-x_1)$$
$$r_y=(y_2-y_1)$$
$$r_z=(z_2-z_1)$$
$$d.h.\,\vec{r}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}i\\j\\k\end{pmatrix}$$

Bsp.1) Man Skizziere den Ortsvektor zu den Punkten :

P_1 (2,4,3) und P_2 (1,-5,2)

Wie lauten die Vektoren $\vec{OP}_1\,und\,\vec{OP}_2$



Bsp. 2) Gegeben seien :

$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2=\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Gesucht $\vec{r}-1+\vec{r}_2+\vec{r}_3 \quad =\begin{pmatrix}3+2-1\\-2+(-4)+2\\1+(-3)+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix}$

Bsp.3) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \ +1 \ \begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$$

Gesucht : Vektor $\vec{c} \ = \begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$,so dass $\vec{a}=\vec{b}$ gilt!

$$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix}=\vec{c}$$

Bsp.4) Gegeben : $\vec{r}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{r}-2=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_4=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$

Gesucht : Skalare a, b, c, so dass gilt:

$$\vec{r}_4=a*\vec{r}_1+b*\vec{r}_2+c*\vec{r}_3$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a+b-2c=3\\a+3b+c=2\\1a-2b-3c=5\end{pmatrix}$$

Lösung z.B mit Cramersche Regel

a = -2 b = 1 c = -3

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x i\\a_y j\\a_z k\end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_x i\\b_y j\\b_z k\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}*\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

Bsp 5) Eine Kraft $\vec{F}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ bewege einen Körper längs des Vektors $\vec{S}=\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Arbeit W !

$$W=\vec{F}*\vec{S}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}=2*3+(-1*2)+(-1*(-5))=6-2+5=9$$

Bem 13) $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}*\vec{b}=0\Rightarrow a - x\,b_x+a_y b_y+a_z b_z\,wenn\,\vec{a}\wedge\vec{b}\neq 0$

Bem 14) $a=|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}*\vec{a}}\quad d.h.\quad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

Bem 15)

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|*|\vec{b}|}$$

$$=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}*\sqrt{b_x^2+b-y^2+b_z^2}}$$

Projektion

Bsp 6) Gegeben : $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}$

Gesucht ist die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$.

Vorüberlegung :

$$\cos\phi=\frac{\vec{s}}{\vec{a}}\quad d.h.\quad|\vec{a}|*\cos\phi=|\vec{s}|\quad s=|\vec{a}|*\cos\phi\quad\phi=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\quad s=|\vec{a}|*\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|*|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{b}|}\quad(*)$$

Es Gilt : $\vec{s}\,\|\,\vec{b}\qquad\vec{s}=\frac{s*\vec{b}}{|\vec{b}|}$

Einsetzen von $(*)$ liefert : $\vec{s}=\frac{(\vec{a}*\vec{b})}{|\vec{b}|*|\vec{b}|}*\vec{b}=\frac{(\vec{a}*\vec{B})*\vec{b}}{|\vec{b}^2|}$

In Zahlen : $|\vec{b}|=\sqrt{4^2+4^2+7^2}=\sqrt{81}=9$

$$\vec{a}*\vec{b}=1*4+(-2)*(-4)+1*7=19$$

$$\vec{s}=\frac{19}{9^2}*\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}938\\0{,}938\\1{,}642\end{pmatrix}$$

Merke : Länge von $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|=\sqrt{\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}$

Bsp. 7) Gegeben $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}$

Gesucht: Winkel zwischen $\vec{a}\, und\, \vec{b}$

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|*\vec{b}}=\frac{2*6+2*(-3)+(-1)*2}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}*\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=\frac{4}{3*4}=\frac{4}{21}$$

d.h.

$$\cos\phi=\frac{4}{21}$$

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

$$\phi=79{,}0194\,°$$

Bsp.8) Gegeben zwei Punkte : P (-1, 5, 3) und Q (2, 1,4)

Abstand zwischen den Punkten P und Q

d.h. $\overline{PQ}$

$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ $\vec{r}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ Dann gilt: $\overline{PQ}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$

$$\overline{PQ}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$

$$|\overline{PQ}|=\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$=\sqrt{(2-(-1))^2+(1-5)^2+(4-3)^2}$$

$$=\sqrt{26}$$

$$=5{,}099\,\text{LE}$$

Bem.15) Für $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ gilt :

$$\begin{pmatrix} \vec{i}\ x\ \vec{i} & \vec{i}\ x\ \vec{j} & \vec{i}\ x\ \vec{k} \\ \vec{j}\ x\ \vec{i} & \vec{j}\ x\ \vec{j} & \vec{j}\ x\ \vec{k} \\ \vec{k}\ x\ \vec{i} & \vec{k}\ x\ \vec{j} & \vec{k}\ x\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{k} & -\vec{j} \\ -\vec{k} & 0 & \vec{i} \\ \vec{j} & -\vec{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Bem.16) Gegeben : $\vec{a}=a_x*\vec{i}+a_y*\vec{j}+a_z*\vec{k}$
$\vec{b}=b_x*\vec{i}+b_y*\vec{j}+b_z*\vec{k}$

$$\vec{a}\ x\ \vec{b}=(a-x+\vec{j}+a_y*\vec{j}+a_z*\vec{k})\,x\,(b_x*\vec{i}+b_y*\vec{j}+b_z*\vec{k})$$

$$\begin{aligned} &=a_x b_x(\vec{i}\,x\,\vec{i})+a_x b_y(\vec{i}\,x\,\vec{j})+a_x b_z(\vec{i}\,x\,\vec{k}) \\ &+a_y b_x(\vec{j}\,x\,\vec{i})+a_y b_y(\vec{j}\,x\,\vec{j})+a_y b_z(\vec{j}\,x\,\vec{k}) \\ &+a_z b_x(\vec{k}\,x\,\vec{i})+a_z b_y(\vec{k}\,x\,\vec{j})+a_z b_z(\vec{k}\,x\,\vec{k}) \end{aligned}$$

Aus Bem.15) können wir die Ellipsen streichen !!!!

$$= \quad (a_y*b_z-a_z b_y)*\vec{i}$$

d.h. $- \quad (a_x b_z-a_z b_x)*\vec{j}$

$$+ \quad (a_x b_y-a_y b_x)*\vec{k}$$

d.h. $\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{pmatrix} a_y b_z-a_z b_y \\ -a_x b_z-a_z b_x \\ a_x b_y-a_y b_x \end{pmatrix}$

Zum Merken der Formel :

Eselsbrücke :

nach SARRUS : $\left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}\right| \begin{matrix} \boldsymbol{\vec{i}} & \boldsymbol{\vec{j}} \\ \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} \end{matrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_y b_z-a_z b_y \\ -a_x b_z+a_z b_y \\ a_x b_y-a_y b_x \end{pmatrix}$

Berechne n von Kreuzprodukt

Gegeben seien :

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix} und\, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$$

a) $\vec{a}\,x\,\vec{b}$

b) $\vec{b}\,x\,\vec{a}$

c) $(\vec{a}+\vec{b})\,x\,(\vec{a}-\vec{b})$

a) $$\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3*(-2)-4*(-1)\\-(2*(-2))-1*(-1)\\2*4-1*(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\11\end{pmatrix}$$

Hinweis : zweite Zeile immer minus vorsetzen !!!

Vorgehensweise:

1. **Reihe zuhalten** $\ddots$ **minus** $\iddots$
2. **Reihe zuhalten** $\ddots$ **minus** $\iddots$
3. **Reihe zuhalten** $\ddots$ **minus** $\iddots$

b)
$$\vec{b}\,x\,\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4*6\\-(-1+4)\\-3-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\11\end{pmatrix}$$

c) $$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\,x\,(\vec{a}-\vec{b})&=\vec{a}\,x\,\vec{a}+\vec{b}\,x\,\vec{a}-\vec{a}\,x\,\vec{b}-\vec{b}\,x\,\vec{b}\\&=-2\,\vec{a}\,x\,\vec{b}\\&=-2\begin{pmatrix}10\\3\\11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bsp.10) Gegeben Dreieck mit Eckpunkten A (1, 3, 2) B (2,-1, 1) C (-1, 2, 3)

Gesucht : Flächeninhalt F_1 nach § 2.5 Bsp.1) gilt:

$$F_{dreieck} = \frac{1}{2}|\vec{a}\, x\, \vec{b}|$$

$$mit\, \vec{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d.h. \frac{1}{2}|\vec{a}|\, x\, \vec{b} = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -5 \\ +1 \\ -9 \end{pmatrix}\right| \qquad = \frac{1}{2}\sqrt{25+1+81} = \frac{1}{2}\sqrt{107} = 5{,}172\, FE$$

Bsp.11) Sei E die Ebene,die von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} und\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Vektor der senkrecht auf E steht und Länge 1 hat !

Tipp: Das Kreuzprodukt erhält eine Senkrechte als Ergebnis !

$$\vec{a}\, x\, \vec{b} \perp E \qquad \vec{a}\, x\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6-(-9) \\ -12-(-2) \\ 6-(-24) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 30 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für Länge 1 muß man ihn normieren.

d.h. Ich brauche seine Länge:

$$|\vec{a}\, x\, \vec{b}| = \left|5 * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 5\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 5 * \sqrt{9+4+36}$$

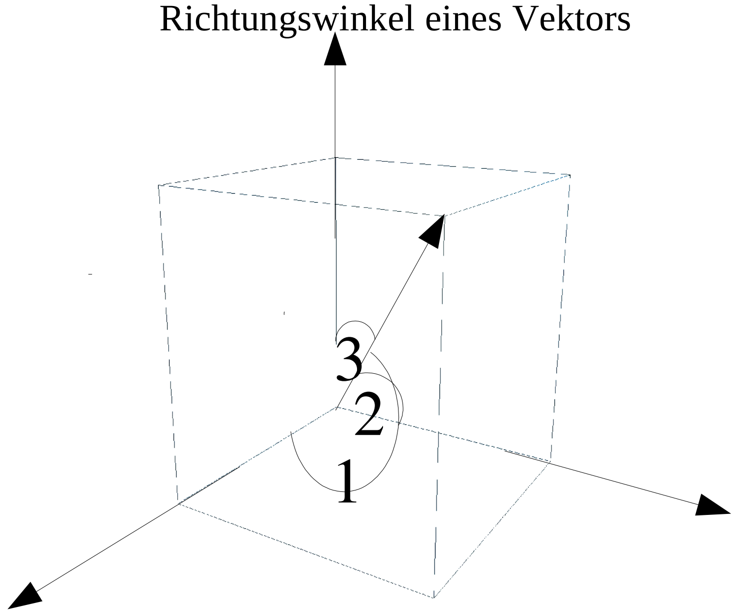
$$\Rightarrow 5*7 = 35$$

$$d.h. \quad \frac{\vec{a}\, x\, \vec{b}}{|\vec{a}\, x\, \vec{b}|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{5}{35}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und 1 Teil davon ist $\frac{1}{7}$

$$\uparrow \frac{1}{7} \uparrow = \frac{35}{5} = 7$$

Richtungswinkel eines Vektors



$$\cos\alpha=\cos\sphericalangle(\vec{r},i)=\frac{\vec{r}*\vec{i}}{|\vec{r}|*|i|}=\frac{rx}{\sqrt{r_x^2+r_j^2+r_z^2}}$$

d.h. $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}$ $\quad\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}$ $\quad\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$

Bem. 19) Es gilt : 1.) $\vec{r}=\begin{pmatrix} r*\cos\alpha \\ r*\cos\beta \\ r*\cos\gamma \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$

Sei $\vec{E}$ ein Einheitsvektor mit Achsenwinkel α,β,γ

$$\vec{E}=\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Bew. von 1)

$$r_x=|\vec{r}|*\cos\alpha \qquad r_y=|\vec{r}|*\cos\beta \qquad r_z=|\vec{r}|*\cos\gamma$$

$$\Rightarrow\vec{r}=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}=|\vec{r}|*\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Bsp.13) Gegeben sei $\vec{r}$ mit :

α = 135°, β = 60°, r_z = -2 und γ sei ein stumpfer Winkel (> 90°)

Gesucht : $\vec{r}$ in Basisdarstellung 1 $|\vec{r}|$ nach Bem.17 gilt: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

d.h. :

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

$$=\pm\sqrt{1-\cos(135^2)-\cos(60^2)}$$

$$=\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$=\pm\frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma=\frac{+1}{2}\rightarrow\gamma=60\,° \quad \mathit{bzw.}-60\,°\rightarrow \mathit{kein\ stumpfer\ Winkel\,!}$$

$$\cos\gamma=-\frac{1}{2}\rightarrow\gamma=120\,° \quad \mathit{bzw.}-120\,°\rightarrow \mathit{Stumpfer\ Winkel\,!\,!\,!}$$

$$\mathit{d.h.}\cos\gamma=-\frac{1}{2}$$

Es gilt :

$$r_z=r*\cos\gamma=|\vec{r}|*\cos\gamma$$

$$\mathit{d.h.}\quad r=\frac{r_z}{\cos\gamma} \;=\; -\frac{2}{\frac{-1}{2}} \;=|\vec{r}|=4$$

$$r_x=4*\cos\alpha=4*\cos(135\,°)=-2\sqrt{2}$$

$$r_y=4*\cos\beta=4*\cos(60\,°)=2$$

$$\mathit{d.h.}\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Das Spatprodukt (Ergebnis = Zahl)

$\vec{a}*(\vec{b}\,x\,\vec{c})$

Achtung bei Papula : Die haben eine eigene Klammer !!!

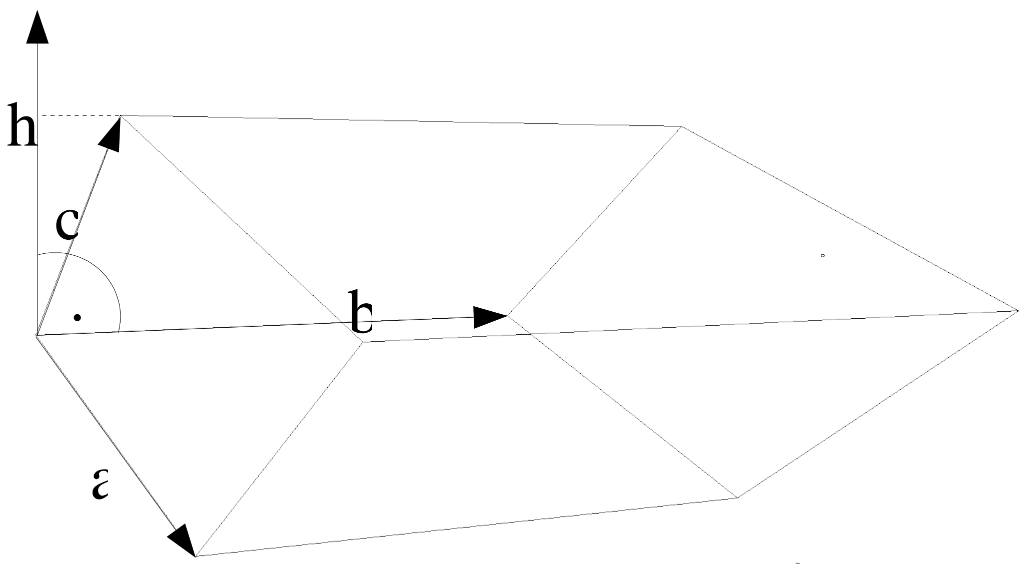
Bem. 20)

$$\vec{a}(\vec{b}\,x\,\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x * b_x * c_x \\ a_y * b_y * c_y \\ a_z * b_z * c_z \end{vmatrix}$$

Vertausche ohne Wertänderung :

$\vec{a}(\vec{b}\,x\,\vec{c})=\vec{c}(\vec{a}\,x\,\vec{b})=\vec{b}(\vec{c}\,x\,\vec{a})$ mit Zykischer Vertauschung wird : $a(\vec{b}\times\vec{c})=(a\times b)\vec{c}$

Volumenformel : V = $|\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})|$



Bew. V = G* h G = $|\vec{a}\times\vec{b}|$ cos $\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=\frac{h}{|\vec{c}|}$

$$h=|\vec{c}|*\cos\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$$
$$dh: V=\left||\vec{a}\times\vec{b}|*|\vec{c}|*\cos\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})\right|$$
$$dh: V=|(\vec{a}\times\vec{b})*\vec{c}|=|\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})|$$

Bsp.15)

Lineare Unabhängigkeit

Man untersuche auf lineare Unabhängigkeit (d.h = 0) :

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

zu a) $$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ -3 & 0 \end{matrix} = 8-9+0-48-0-(-1) = -48 \Rightarrow \textit{linear unabhängig}$$

zu b) $$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ 2 & -1 \end{matrix} = -12+4-3-8-(-1)-(-18) = 0\ \textit{d.h : linear abhänig}$$

Bsp.16

Volumen des von Vektoren aufgespannten Spats.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nach Satz 15

$$\begin{aligned} V &= |\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})| \\ &= \left|\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{matrix}\right| = 8-4+9-24-2-(-6) \\ &= -7 \\ &= 7\,\text{VE} \end{aligned}$$

$$V_T = \frac{1}{3} \text{ G * h} \qquad G_{Dreieck} = \frac{1}{2}\left|\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_4}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{6}|\vec{a}\times\vec{b}| * |\vec{c}| * \cos\sphericalangle(\vec{a}\times vecb, \vec{c})\right| = \left|\frac{1}{6}(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}\right| = \left|\frac{1}{6}\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})\right|$$

Bsp.17) Man Berechne

Volumen des Tetraeders mit Eckpunkten.

P_1 = (1, -1, 0) P_2 = (2, 0, 1) P_3 = (0, 1, 1) P_4 = (4, 2, 1)

$$\overline{P_1P_2}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \overline{P_1P_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \overline{P_1P_4}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$V_T=\left|\frac{1}{6}*\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{6}*(-6)\right|$$

$$=1$$

Bsp.1) Gegeben : Gerade durch P (-2,3, 5) mit richtung des Vektors $\vec{b}$ = (3, -1, 2)

Gesucht:

Vektorgliederung der Geraden sowie die Punkte zu t=0

$$\vec{a}=\overline{OP}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t)=\vec{a}+t*\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+t*\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$r(0)=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\overline{OP}$$

$$r(1)=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$$

$$r(-1)=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}$$

Def. 2)

Sei eine Gerade durch Punkte $P_1 und P_2$ gegeben. Die Punkte $P_1 und P_2$ in einer Grundebene (x-y –Ebenen ,xz – Ebene ,yz –Ebene) welche man durch Projektion von $P_{1,} P-2$ erhält , heißen Spurpunkte von $P_1 und P_2$. Die Gerade g durch $P_1' \wedge P_2'$ Heißt Spurgerade.

g. $\vec{r}(\vec{t})=\begin{pmatrix} P_1 x \\ P_1 y \\ P-1 z \end{pmatrix}+t*\left[\begin{pmatrix} P_2 x \\ P_2 y \\ P_2 z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} P_1 x \\ P_1 y \\ P_1 z \end{pmatrix}\right]$

Spurgerade in xy _ Ebene d.h. Z = 0

g' $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} P_1 x \\ P_1 y \\ 0 \end{pmatrix}+t*\left[\begin{pmatrix} P_2 x \\ P_{..} y \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} P_1 x \\ P_2 y \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

Bsp.2)

Gegeben eine Gerade g :

$\left.\vec{r}(f)=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\quad\right\}$ Punktrichtungsform

In welchen Punkten durchstößt g die Koordinatenebenen (xy -E, xz -E, yz - E)

xy – Ebene:

Gesucht : (P_x, y) es gilt :

$$P_{xy} \in xy-Ebene \Rightarrow \overline{OP}_x, y=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{xy} \in g \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

für geeignetes t $\in$ R

x_1 = 3 + 1t x_2 = -4 + 2t d.h. 3t = 1 t = $\frac{1}{3}$ x_1 = $\frac{10}{3}$ x_z = $\frac{-10}{3}$

0 = 1 – 3t

Bsp.3)

Untersuche ob Punkt (x,y,z) auf Gerade g liegen

Sei g Gerade durch P_1 (-1, 8, 6) und P_2 (11, -1, -9). Liegen P_3 (5, 5, 1) und P_4 (-5,11,8) auf der Geraden ?

Geradengl : $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}-1\\8\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}11-(-1)\\-1-8\\-9-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}12\\-9\\-15\end{pmatrix}$

P_3 $\in$, so muss es ein t_3 $\in$ geben mit $\overline{OP_3}=\vec{r}(t_3)$

$$\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\\6\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}12\\-9\\-15\end{pmatrix}$$

3 Gleichungen 1 Unbekannte: 3 = -1 + 12 t_3 4 = 12 t_3 d.h. $t_3-\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Überprüfung in Gl. 2: 5 = 8 + $\frac{1}{3}$ (-9)

Überprüfung in Gl. 3: 1 = 6 + $\frac{1}{3}$ (-15)

Untersuchung von P_4 : $\overline{OP_4}=\vec{r}(t_4)$

$$\begin{pmatrix}-5\\11\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\\6\end{pmatrix}+t_4\begin{pmatrix}12\\-9\\-15\end{pmatrix}$$

$$-5=-1+12t_4 \quad df.\,mit \quad +1\rightarrow \quad -4=12t_4 \quad \rightarrow :12 \quad ergibt\, t_4=\frac{1}{3}$$

$$aus\,11=8-9t_4 \quad mit \quad t_4=\frac{1}{3}\,eingesetzt \quad 11=8(\frac{-1}{3}*-9)\,bestätigung\,von\,t_4$$

$$8=6-15t_4\,eingesetzt\,ergibt\,8=6-\frac{1}{3}(-15)=11\,und\,11\neq 8$$

$$dh.\,es\,gibt\,kein\,t_4 \quad Schlussfolgerung: P_4\notin g$$

Bsp 4: *Hinweis dazu : Geradengleichung :* $g:\vec{r}=(x,y,z)+const.\,B$

Gegeben :

$$g_1=\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\7\\-8\end{pmatrix}$$

$$g_2=\vec{r}=\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-6\\-14\\16\end{pmatrix}$$

Untersuche b_1 *und* b_2 *auf kollienearität gemäß Satz* 6 in § 2.3 *gilt :*

b_1, b_2 *kollinear* $\Leftrightarrow$ *wenn* $\boldsymbol{I}\ k_{1,}k_2\in R$ *nicht beide* 0 *mit* $k_1 b_1+k_2 b_2=\vec{0}$

$$k_1\begin{pmatrix}3\\7\\-8\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-6\\-14\\16\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$3k_1-6k_2=0$

$7k_1-14k_2=0$ *df.* $k_1=2,\ k_2=1$ *ist eine Lösung*

$-8k_1+16k_2=0$

3. *Gleichung auch erfüllt , damit* $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ *sind kollienear und* $g_1 \| g_2$ *oder gleich !*

Betrachte :

$$\vec{a}_2-\vec{a}_1=k_1\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}-k_1\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}=\begin{matrix}3\\7\\-8\end{matrix}$$

Untersuche $a_2-a_1 \ \wedge\ b_1$ *auf Kollienearität*

Hier : $\vec{a}_2-\vec{a}_1=b_1$ *also Kollienear !* *d.h.* $g_1=g_2$

Bsp.6)

Gegeben : $g=r=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ Gesucht:

Gesucht parallele Gerade zur 1. Geraden durch den Punkt (x,y,z)

Zu g *parallele Gerade* g_1 *durch* P_2 $(8,-1,5)$

$g_1:\vec{r}=\begin{pmatrix}8\\-1\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ Allgemein : $\vec{a}_1+t\,\vec{b}_1=\vec{a}_2+u\,\vec{b}_2$ (*)

(*) besitzt keine Lösung d.h. $g_1 \wedge g_2$ besitzen keinen Schnittpunkt d.f. $g_1 \| g_2$ $\vee$ Windschief

(*) besitzt genau eine Lösung d.f. $g_1 \wedge g_2$ besitzen genau einen Schnittpunkt, sind also nicht gleich

(*) besitzt ∞ Lösungen <---> $g_1=g_2$

Bsp. 7)

$$Gegeben:$$

$$g_1 \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad g_2 \to \vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Untersuche auf Kollienearität:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Löse \quad k_1 b_1 + k_2 b_2 = \vec{0}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$d.h.: -3k_1 + 7k_2 = 0$$
$$4k_1 + 4k_2 = 0$$
$$5k_1 - 2k_2 = 0$$

$$aus\, Gl.\, 2 = k_1 = -k_2 \in Gl.\, 3\, eingesetzt - 5k_2 - 2k_2 = 0 \quad d.h.: \quad k_2 = 0\, k_1 = 0$$

$$d.h.: b_1\, b_2\, sind\ linear\ unabhänig\ also\ nicht\ kollinear$$

$$d.h.: g_{1,}\, g_2\, sind\ windschief\ oder\ haben\ genau\ einen\ Schnittpunkt$$

$$Löse: \quad r_1(t_s) = \vec{r}(u_s)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t_s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + u_s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -u_s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t_s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix} \begin{pmatrix} (-7) \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$d.h.: -7u_s - 3t_s = -1 \qquad I$$

$$-4u_s + 4t_s = -12 \qquad II$$

$$2u_s + 5t_s = -8 \qquad III$$

Suche zwei der drei Gleichungen aus (beliebig hier : II,III)

$$II*(\frac{-1}{4}) \quad = u_s - t_s = 3 \qquad II'$$

$$III*(\frac{1}{2}) \quad = u_s + \frac{5}{2} t_s = -4 \qquad III' - 1 - II'$$

$$u_s - t_s = 3$$

$$0 + \frac{7}{2} t_s = -7 \qquad + \frac{2}{7} III''$$

$$0 + \frac{7}{2} t_s = -7 \qquad / : \frac{7}{2}$$

$$d.h.: \quad u_s = 1 \qquad t_s = -2$$

$$d.h.: \quad \iota\ Schnittpunkt\ S\ mit\ \vec{s} : \vec{r}_1(t_s) = \vec{r}_1(2) \qquad d.f. \quad = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Probe: \quad \vec{s} = \vec{r}_2(u_s) \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp.8)

$$Gegeben: \quad g \in R^2\ durch\ P_1(x_{1,} y_1)\ und\ P_2(x_{2,} y_2)$$

$$\overline{OP_1} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \overline{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

$$d.h.: \quad x - x_1 = t(x_2 - x_1) \qquad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow$$

$$y - y_1 = t(y_2 - y_1)$$

Zweipunkteform in *der Ebene. Sei* $P_1(1,-2)$ *und* $P_2(-3,0)$ *gegeben.*

$$\frac{y-(-2)}{x-1} = \frac{0-(-2)}{-3-1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y-(-2)}{x-1} \Rightarrow \frac{y+2}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$(y+2) = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} - 2 = \frac{-1}{2} x - \frac{3}{2}$$

Ebene im Dreidimensionalen Raum R^3

3 Punkte – Gleichung :

$\vec{r} = \overline{OP_1} + t(\overline{OP_2} - \overline{OP_1}) + z(\overline{OP_3} - \overline{OP_1})$

2 Ebenen sind dann Parallel, wenn ihre Normalen Vektoren parallel sind.

Bsp.1)

Gegeben : P (3, 2, 5) sowie zwei Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \\ -7{,}5 \end{pmatrix}$$

Gesucht :

Punktrichtungsform der Ebenen E die durch P geht und von $\vec{u}_1 \, und \, u_2$ aufgespannt wird.

PRF : (gem. Def. 3)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \\ -7{,}5 \end{pmatrix}$$

Übergang zur Kartesischen" - Form .

I x = 3 + 4,5t + 4,5s

II y = 2 – 3t + 3s

III z = 5 – 7,5s

Eliminiere t und s :

III folgt : 7,5s = 5 – z d.h. : $\boxed{s = \frac{2}{3} - \frac{2}{15} z}$

einsetzen in II :

y = 2 – 3t + 3 ($\frac{2}{3} - \frac{2}{15} z$) /nach t

3t = 2 – y + 2 – $\frac{6}{15}$ z

$$\boxed{t = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} y - \frac{2}{15} z}$$

einsetzen in I :

$$x=3+4{,}5\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}y-\frac{2}{15}z\right)+4{,}5\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{15}z\right)$$

$$x=12-\frac{3}{2}y-\frac{6}{5}z \qquad /\,HN\ suchen\ etc.$$

$$d.h.:\ \underbrace{10_x+15y+12z-120=0}_{Kartesische\ Form}$$

3)Schnittgeraden mit Grundebenen (Spurgerade)

$x,y-Ebene:$

$$10x+15y+12z-120=0 \qquad z=0$$

$$d.h.: \qquad 10x+15y=120 \qquad /:5$$

$$2x+3y=24 \qquad /-2x$$

$$3y=24-2x \qquad /:3$$

$$g\,x\,y \rightarrow y=8-\frac{2}{3}x$$

$x,z-Ebene:$

$$10x+15y+12z-120=0 \qquad y=o$$

$$d.h.: \qquad 10x+12z=120 \qquad /:12$$

$$\frac{5}{6}+z=10$$

$$g\,x\,z \rightarrow z=10-\frac{5}{6}x$$

$y,z-Ebene:$

$$10x+15y+12z-120=0 \qquad x=0$$

$$d.h.: \qquad 15y+12z=120 \qquad /:15$$

$$y+\frac{12}{15}z=8 \qquad /-z$$

$$g_{yz} \rightarrow y=8-\frac{4}{5}z$$

Bsp.2)

Gesucht : Schnittpunkt S der Geraden g und Ebene E :

$$g=\vec{r}\begin{pmatrix}2\\11\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

E sei durch die Punkte , P_1 (2, - 1, 1)

P_2 (3,2 -1)

P_3 (-1,3, 2) gegeben.

$$\overline{OP}_2-\overline{OP}_1=\overline{P_1P_2}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overline{OP}_3-\overline{OP}_1=\overline{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}\rightarrow E:$$

$$E:\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$$

S muss beide Gleichungen erfüllen!

$$gleichsetzen: \vec{s}:=\overline{OS}=\begin{pmatrix}2\\11\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix} \qquad |-t()$$

Umschreiben:

$$\begin{pmatrix}0\\12\\-4\end{pmatrix}=-t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} I & -t+u-3v=0 & *-1 \\ II & -2t+3u+4v=12 & -2*(I) \\ III & t-2u+1v=-v & +1(I) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} t-u+3v=0 & +1*z_2 \\ 0+u+10v\,0\,12 & \\ 0-u-2v=-4 & +1*z_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} t+0+13v=12 & \\ 0+u+10v=12 & \\ 0+0+8v=8 & *\frac{1}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} t \quad +13v=12 & -13*z_3 \\ u+10v=12 & -10*z_3 \\ 8v=1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t \quad =-1 \\ u \quad =2 \\ v=1 \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\overline{OS}=\begin{pmatrix}2\\11\\-3\end{pmatrix}+-1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\11-2\\-3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\-2\end{pmatrix}$$

$n^\circ = \frac{\vec{v}}{|\vec{n}|}$ Jeder Vektor, der auf der Ebene E senkrecht steht, heißt Normalenvektor und hat die Länge 1.

Ein fester Punkt P + 1 Normalenvektor = Neue Darstellungsform

$$\underbrace{\vec{n}}_{Normalvektor} \cdot \underbrace{(\vec{r} - \vec{a})}_{bek. Vektor} = 0$$

Punkt – Normalenform

Bsp .:

$$\underline{3x-4y+7z=4}$$

$\downarrow$

Normalenvektor $\perp$ E

$$\begin{pmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$n*(\vec{r}-\vec{a})=0$$

$$d.h.: n_x - x + ny*y + n_z*z - c = 0$$
$$c = n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z$$

Bsp 4:

Die Ebene E sei gegeben durch den Punkt A (1,5,3) mit Normalenvektor vec n = (2,3,6).

Gesucht kartesische Form der Ebenengleichung.

PNF (Punktnormalenform):

$$n(\vec{r}-\vec{a})=0$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$$
$$2x+3y+6z-(2+15+18)=0$$
$$2x+3y+6z-35=0$$
$$c=na$$
$$\vec{n}(\vec{r}-\vec{a})=0$$
$$n_x x + n_y y = c$$

Bsp 5:

Gerade die senkrecht auf anderer Gerade steht und durch einen def. Punkt geht

Gesucht ist die Gerade g_2 , die senkrecht auf g_1 steht und durch den Punkt (-2,3) geht.

$$G_1 = y = \frac{1}{3}x + 4$$

Kartesische Form von g_1*:*

$3y = x + 12 \quad dh.\, 3Y - x - 12 = 0 \quad oder \quad -x + 3y - 12 = 0$

$n = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{n}$ *ist Richtungsvektor von* $g_{2,}$ *da* $g_2 \perp g_1$

PRF von g_2

$$g_2 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= -2 - t \\ y &= 3 + 3t \\ d.h.: t &= -x - 2 \\ y &= 3 + 3(-x - 2) \\ &= 3 - 3x - 6 \\ &= 3x - 3 \end{aligned}$$

Hesse`sche Normalenform (HNF)

Übergang von PNF zu HNF :

1.)

Ersetze in $\vec{n}(\vec{r} - \vec{a}) = 0$

$\vec{n}$ *durch* $\vec{n}° = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

$E: \vec{n}° r - \vec{n}° \cdot a = 0$

2.)

Orientiere $\vec{n}°$ *so, dass gilt:*

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{n} &= |\vec{n}|° \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{n}, \vec{a}) \\ &= |\vec{a}| \cdot \cos \alpha > 0 \end{aligned}$$

$d.h.: \quad \alpha < 90°$

$$\cos \alpha = \frac{d}{|\vec{a}|}$$

$$d = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha) > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{n}°$$

Also aus Bsp 5: $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ---> 2x + 3y + 6z – 35 = 0

$$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}$$
$$=\sqrt{4+9+36}$$
$$=\sqrt{49}$$
$$=7$$

PNF war = 2x + 3y + 6z – 35 = 0

HNF = $\frac{2x}{7}+\frac{3y}{7}+\frac{6z}{7}-5=0$ ---> $\frac{35}{7}=5$

Bsp1.

Gesucht ist die HNF zu E.

2x + 3y + 6z – 35 = 0 (vgl. §3.2 , Bsp 4)

$$A=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\in E. \qquad =2\cdot1+3\cdot5+6\cdot3-35=0 \quad \rightarrow \quad (2\cdot1+3\cdot5+6\cdot3=35)\, d.f\ A=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \vec{n}^{\circ}=\frac{n}{|\vec{n}|}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{n}^{\circ}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2/7\\3/7\\6/7\end{pmatrix}$$

$$\frac{35}{7}=\underline{5} \ >0$$

$$\Rightarrow \vec{n}^{\circ}\ ist\ richtig\ orientiert. \qquad HNF=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\vec{n}^{\circ}(\vec{r}-\vec{a})=0$$

Abstand d_p vom Punkt P zu E ist $d_p=\left|n^{\circ}\left[\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\right]\right|$

Bsp2.

Die Gerade g sei Schnittgerade der Ebenen

E_1 : x-4 = 0 und E_2 : y+3z-1 = 0

a) Gesucht Ebene E, die g enthält und durch P(2,1,-1) geht.

b) Welchen Abstand hat Q(0, -1, 2) von E ?

c) Wie lautet die PRF der Ebene E_R die Parallel zu E ist und durch R (-1,0,0) geht? Welchen Abstand besitzen E und E_R ?

$a)$

$x=4 \qquad y+3z=1$

$Setze\ z=t \qquad \text{---->}\ x=4 \ \wedge \ y=1-3t$

$$g:\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1-3t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$PRF\ von\ E$

$r=\vec{a}+t\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{c}$

$$wobei\ gilt:\quad g:\vec{r}=\vec{a}+t\cdot\vec{b},\ wegen\ \vec{a}+\vec{c}=\vec{P}\ gilt\ \vec{c}=-a+\vec{0}P=-\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$Insgesamt\ E:\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-0\\-1\end{pmatrix}$$

$b)$

$HNF\ zu\ E$

$$\vec{n}=\vec{b}\,x\,\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7$$

$$d.h.:\vec{n}^\circ=\frac{1}{7}n \vee \vec{n}^\circ=\frac{-1}{7}n$$

$Orientierung\,(\vec{n}^\circ\cdot\vec{a}>0)$

$$\frac{1}{7}n^\circ\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{10}{7}>0!$$

$$\vec{N}^\circ=\frac{+1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$HNF=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{10}{7}=0$$

$$\frac{10}{7}=Abstand\ zum\ Ursprung!$$

Abstand zu Q zu E:

$$c=\left|\vec{n}^\circ\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{7}\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{10}{7}\right|$$

$$=\frac{1}{7}|(-20)|$$

$$=\frac{20}{7}$$

$c)$

$Parallele\ Ebenen\ E_R\ durch\ R(-1{,}0{,}0)$

$$E_R:r=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad + \qquad\quad +$$

$$\qquad\qquad\qquad \vec{b} \qquad\quad \vec{c}$$

Abstand zu E :

$HNF\ von\ E_R:\quad selber\ Normalvektor\ wie$ in $b!$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix} \quad \vee \quad -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

$Orientierung:$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{-3}{7} \quad < \ 0 \qquad d.h.: umdrehen!!!$$

$$\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{-3}{7} \quad > \ 0 \qquad also:\ \vec{n}^{\circ}=\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$HNF: -\frac{3}{7}\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{3}{7} \ = \ 0$$

$zu\ E\wedge E_R\ gehören\ unterschiedlich\ orientiert\ \vec{n}^{\circ}\ s.\ Nullpunkt\ liegt\ zwischen\ E\ und\ E_R,$

$$Abstand\ E\ zu\ E_R=d+d_R=\frac{10}{7}+\frac{3}{7}=\frac{13}{7}$$

Bsp.4)Abstand Punkt – Gerade in R^3

$g:\ \vec{r}=\vec{a}+t\cdot\vec{b}$

Es gilt :

$\vec{f}=\vec{p}_1+\vec{d}$

$F\in g\Rightarrow\overline{OF}=\vec{f}=\vec{a}+t_f\cdot\vec{b}$

$Zusammen*\ \vec{p}_1+\vec{d}=\vec{a}+t_f\cdot\vec{b}$

$d.h.:\ 3\,Gleichungen\quad 3\,Unbekannte$

$mit\ \vec{b}\perp\vec{d}\rightarrow die\ ganze\ Gleichung\ wird\ mit\ b\ skalar\ multipliziert$

$\vec{b}(p_1+d)=\vec{b}(\vec{a}+t_f\cdot\vec{b})$

$d.h.: \vec{b}\cdot\vec{d}=\ 0 \quad \Rightarrow b\cdot p_1=\vec{b}\cdot\vec{a}+t_f\cdot\vec{b}^2$

$t_f=\vec{b}\cdot\vec{p}_1-\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{b}(\vec{p}_1-\vec{a})$

$t_f=\vec{b}\cdot\vec{p}_1-\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{b}(\vec{p}_1-\vec{a})$

$Einsetzen\ von\ \ t_f$ in $*$

$$\boldsymbol{\vec{d}=\vec{a}-\vec{p}_1+\frac{\vec{b}(\vec{p}_1-\vec{a})}{\vec{b}^2}\cdot\vec{b}}$$

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{p}_1+\frac{\vec{b}^2(\vec{p}_1-\vec{a})}{\vec{b}^2}=SO\ NICHT!!$$

Zahlenbeispiel :

$$g: \quad \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad p_1(-2,3,4)$$

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-14\\-13\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{d}|=\frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}2\\-14\\-13\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{2^2+8(-14)^2+(-13)^2}=6{,}4 \quad \text{LE}$$

Bsp.6)

Gesucht ist der Winkel zwischen zwei Ebenen $E_1 \wedge E_2$

$$E_1: A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1= 0$$
$$E_2: A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2= 0$$

$$\phi=\sphericalangle(\vec{n}_{1,}\vec{n}_2) \qquad \cos\phi=\frac{n_1\cdot n_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

$$\cos\phi=\frac{A_1 A_2+B_1 B_2+C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B-2^2+C_2^2}}$$

Kreis und Kugel

$$r^2=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^2 \qquad \left.\begin{matrix}x=r\cdot cost\\ y=R\cdot sint\end{matrix}\right\} Parameterform$$

$$t=winkel$$
$$|\vec{r}|=R$$
$$x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow \quad |\vec{r}| \;=\; \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\downarrow$$
$$Mittlepunktsform \quad der \quad Kreisgleichung$$

Von Parameterform zu Mittelpunktsform

$$\left.\begin{matrix}x=R\cdot\cos t\\ y=R\cdot\sin t\end{matrix}\;\right|\; quadrieren$$

d.h.: $\left.\begin{matrix}x^2=R^2\cdot\cos^2 t\\ \underline{y^2=R^2\cdot\sin^2 t}\end{matrix}\;\right|\; addieren$

$$x^2+y^2=R^2\frac{(\sin^2 t+\cos^2 t)}{ergibt\,1!!!} \qquad *$$

Es gilt :

$$\vec{r}\,'=\vec{r}_M+\vec{r} \qquad bei\,Kreisverschiebung$$

Die Abbildungsgleichung lautet jetzt:

$$\begin{pmatrix}\vec{x}\\\vec{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{x}\\\vec{y}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}$$

$$x=\vec{x}-x_M$$
$$y=\vec{y}-y_M\,Einsetzen\ \text{in}*=\ Kreisgleichung$$
$$(\vec{x}-x_M)^2+(\vec{y}-y_M)^2=R^2$$

Durch Weglassen der Querstriche erhalten wir die Kreisgleichung für den Verschobenen Kreis.

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=R^2$$

Parameterform des Verschobenen Kreises :

$$x = R \cdot \cos t \;\Rightarrow\; \vec{x} = x : M + x \quad = x_M + R \;\; \cos t$$
$$y = R \cdot \sin t \qquad \vec{y} = y_M + y \qquad y_M + R \;\; \sin \;\; t$$
$$\downarrow \;\; \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \;\; \downarrow$$

$\underline{Normaler\ Kreis}$ $\qquad$ $\underline{Verschobener\ Kreis}$

Kugeloberfläche : (MPG = Mittelpunktsgleichung)

$$\left(\vec{r} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \right)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad MPF\ der\ Kugel$$

Bsp.1)

Gesucht sind die Darstellungen eines Kreises mit r = 2,5 um M (-1, 5; 2)

$$Satz\,9: \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$
$$d.h.: \; (x + 1{,}5)^2 + (y - 2)^2 = 2{,}5^2$$
$$bzw. \quad \begin{pmatrix} x + 1{,}5 \\ y - 2 \end{pmatrix}^2 = 2{,}5^2$$

$$bzw. (Parameterform)$$
$$x \;=\; -1{,}5 + 2{,}5 \cos \;\; t$$
$$y \;=\; 2 + 2{,}5 \sin \;\; t$$

Bsp.2)

Man bestimme den Mittlepunkt M und den Radius r des Kreises K:

$$K \;:\; \vec{r}^{\,2} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{r} - 12 \;=\; 0$$

$$\vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d.h.: \; x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 \;=\; 0 \qquad | sotieren\ und\ quadr.\ Ergänzung$$

$$x^2 + 4x + 2^2 + y^2 + 6y + 3^3 \;=\; 12 + 4 + 9 \qquad 4x \;=\; \frac{4}{2}\, \text{in}\, quadr.$$

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 \;= +5^2$$
$$d.h.: \quad M \;=\; (-2\,; -3) \qquad R \;=\; 5$$

Bsp.3)

Gegeben : Kreis durch P (4,1) und Q (0,3) sowie Nullpunkt O (0,0)

Gesucht : Mittelpunkt und Radius :

Es gilt :

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=R^2 \qquad |ausrechnen$$
$$x^2-2x_{Mx}+x_M^2+y^2-2y_M y+y_M^2=R^2 \qquad |zusammen$$
$$x^2+y^2\underbrace{-2x_M}_{A}x+\underbrace{-2y_M}_{B}y+\underbrace{x_M^2+y_M^2-R^2}_{C}=0$$
$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad |x,y\ Punkte\ einsetzen$$

$$I \quad P(4,1): 4^2+1^2+4A+1B+c=0 \qquad \rightarrow 16+1+4A+1B+C=0$$
$$II \quad Q(0,3): 0^2+3^2+\cancel{0A}+3B+C=0 \qquad \rightarrow 9+3B+C=0$$
$$III\ O(0,0): \qquad +C=0$$
$$mit\ C=0 \quad \rightarrow \quad \text{in}\ II \rightarrow 3B=-9 \quad d.h.: \quad B=-3$$
$$mit\ B=-3\ \text{in}\ I\ folgt\ 17+4A+(-3)+0=0$$
$$ausgerechnet: 14+4A=0 \quad d.f \quad 4A=-14\ |:4 \quad \rightarrow A=-3{,}5$$

Insgesamt :

$$x^2+y^2-\frac{7}{2}x-3y=0 \qquad |sortieren\ und\ Quadr.\ Ergänzung \quad =\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{49}{16}+\frac{36}{16}=\frac{85}{16} \qquad |Quadr.\ Ergänzung\ der\ rechten\ Seite\ hinzuaddieren$$
$$d.h.: \left(x-\frac{49}{16}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{85}}{4}\right)^2 \qquad |kürzen$$
$$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{85}}{4}\right)^2$$
$$M=(7/4,3/2) \qquad R=\frac{1}{4}\sqrt{85}=2{,}3049$$

Bsp.4) Gesucht sind die Schnittpunkte der Geraden :

$y+3x=15$ in *explizieter Form :* $y=-3x+15$ *und* $x^2+y^2=25$

Für die Schnittpunkte $S(x_s, y_s)$ gilt:

$$x_S^2+y_S^2=25 \qquad I$$
$$\textit{und } y_S=-3x_S+15 \qquad II$$
$$II \text{ in } I \textit{ einsetzen:}$$
$$x_S^2+(15-3x_S)^2=25$$
$$x_S^2+225-90x_S+9x_s^2-25=0 \qquad |\textit{zusammenfassen}$$
$$10x_S^2-90x_S+200=0 \qquad |:10$$
$$x_S^2-9x_S+20=0 \qquad |pq-Formel$$
$$x_{1,2}=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-20} \qquad =\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{80}{4}}$$
$$x_2= \ 4 \qquad x_1=5$$

Kegelschnitte

Art des Kegelschnitts :

Aus der Gleichung : $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

(!!!! Kann auch so stehen : $Ax^2+Cx+By^2+Dy+E=0$ aufpassen !!!)

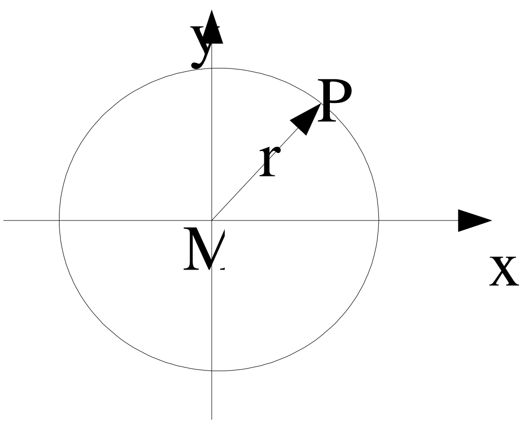
folgt: Kreis : A = B Ellipse : $A\cdot B>0, A\neq B$ Hyperbel: $A\cdot B<0$ Parabel : $A=0, B\neq 0$

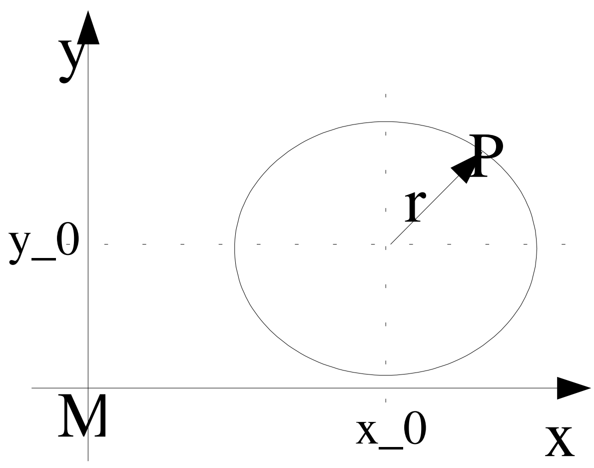
Kreis.

$$x^2+y^2=r^2 \qquad M(0;0)$$
$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2} \qquad (\textit{oberer und unterer Halbkreis})$$

Hauptform der Kreisgleichung .

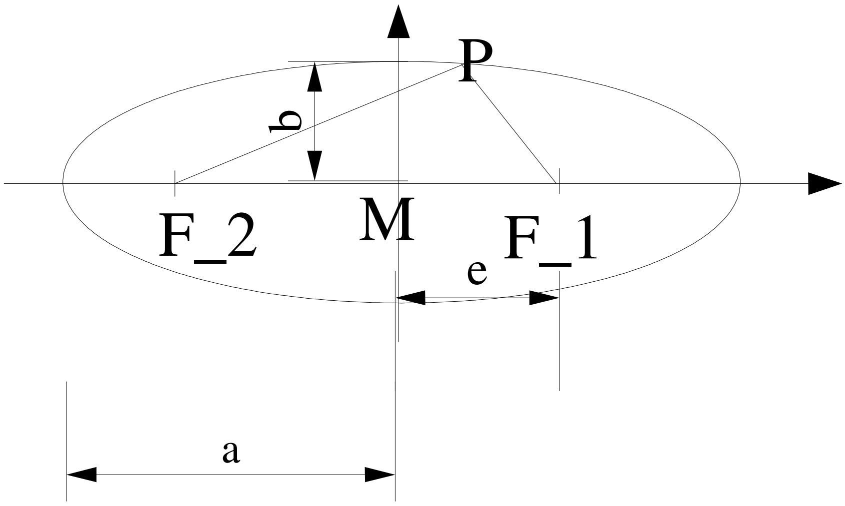
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$y=y_0\pm\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$$





Ellipse .

$\vec{F_1P} + \vec{F_2P} = const = 2a$
$M = Mittelpunkt$
$F_1, F_2 = Brennpunkt$
$a = große\ Halbachse$
$b = kleine\ Halbachse$
$e = Brennweite$
$Zusammenhang = a^2 = e^2 + b^2$



Mittelpunktsgleichung :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad oder \qquad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$y = \frac{\pm b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad oberer\ und\ unterer\ Teil$$

Hauptform der Ellipsengleichung.

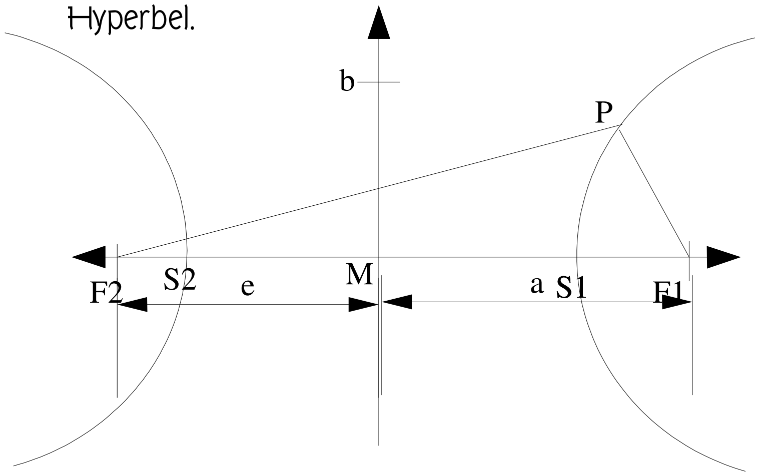
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad M = (x_0 i\, y_0)$$

$$y = y_0 \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} \qquad oberer\ und\ unterer\ Teil$$

$Sonderfall\ a = b : d.h. : Kreis\ mit\ r = a$

Hyperbel.

$M = Mittelpunkt$
$F_1, F_2 = Brennpunkte$
$S_1, S_2 = Scheitelpunkte$
$a = Große \vee reele\ Halbachse$
$b = kleine \vee imagiäre\ Halbachse$
$e = Brennweite$
$Zusammenhang\ e^2 = a^2 + b^2$



Mittelpunktsgleichung Hyperbel :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad oder \quad b^2 x^2-a^2 y^2=a^2 b^2$$

$$y=\frac{\pm b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (|x|>,a)$$

Asymptoten im Unendlichen : $y=\frac{\pm b}{a}x$

Hauptform

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad M(x_0,y_0)$$

$$y=y_0\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-x_0)^2-a^2}$$

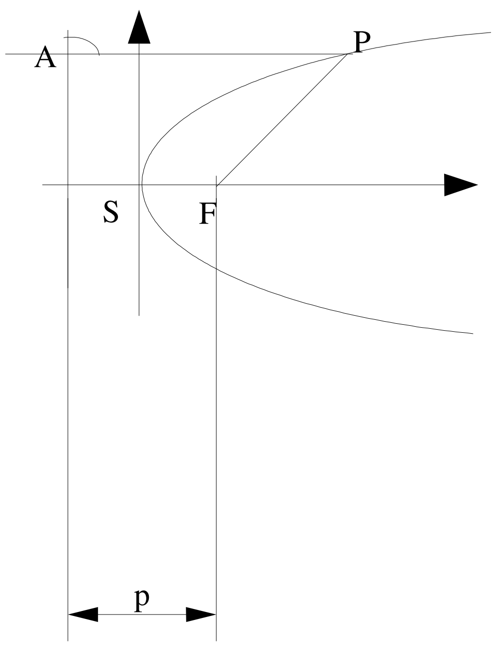
Asymptoten im Unendlichen : $y=y_0\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$

Im Sonderfall a = b :

Mittelpunktshyperbel : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad oder \quad x^2-y^2=a^2$

Parabel

$p=Abstand\ zwischen\ Brennpunkt\ und\ Leitlinie$
$S=Scheitelpunkt$
$F=Brennpunkt \quad (Brennweite\ e=\vec{FS}=\frac{P}{2})$



Scheitelgleichung :

$y^2=2px$
$p>0: Parabel\ nach\ rechts\ geöffnet$
$y=\pm\sqrt{2px} \qquad (x\geqslant 0)$
$p<0: Parabel\ nach\ links\ geöffnet$
$y=\pm\sqrt{2}px \qquad (x\leqslant 0)$

Hauptform.

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0) \qquad S=(x_{0,}y_0)$$
$$p>0: \text{Parabel rechts offen}$$
$$y=y_0\pm\sqrt{2p(x-x_0)} \qquad (x\geqslant x_0)$$
$$p<0: \text{Parabel links offen}$$
$$y=y_0\pm\sqrt{2p(x-x_0)} \qquad (x\leqslant x_0)$$

Bsp.1)

$$2x^2-6x+2y^2+4y=11{,}5$$
$$\text{wegen } A=B \qquad \text{d.h.. Kreis!}$$
$$\text{Quadratische Ergänzung:}$$
$$2x^2-6x+2y^2+4y=11{,}5$$
$$2(x^2-3x)+2(y^2+2y)=11{,}5$$
$$2(x^2-3x+1{,}5^2)+2(y^2+2y+1)=11{,}5+2\cdot 2{,}25+2\cdot 1$$
$$\downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow$$
$$(x-1{,}5)^2 \qquad\qquad (y+1)^2$$

$$2(x-1{,}5)^2+2(y+1)^2=18 \qquad |:2$$
$$(x-1{,}5)^2+(y+1)^2=9$$
$$\text{dh.: verschobener Kreis mit}$$
$$M(1{,}5,-1) \text{ und } r=3$$

Bsp. 2) Kegelschnittgleichung :

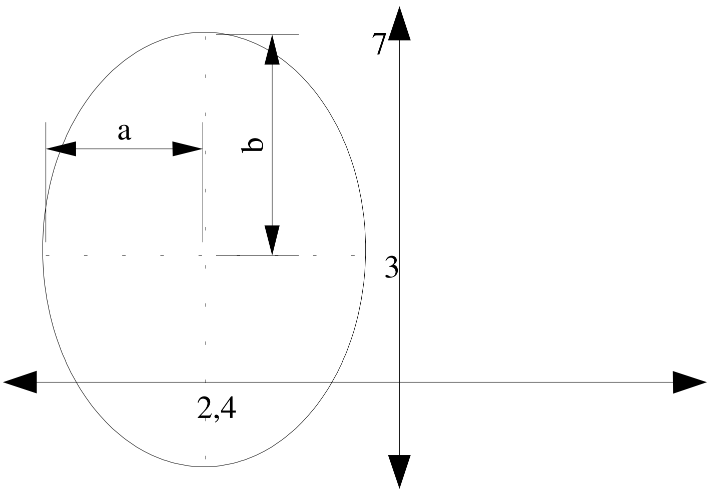
$$16x^2+4y^2+76{,}8x-24y+64{,}16=0$$
Man bestimme Form und Lage :

Ordnen : $16x^2+76{,}8x+4y^2-24y=-64{,}16$

2.) Quadratische Ergänzung :

$$16(x^2+\frac{76{,}8}{16}x)+4(y^2-\frac{24}{4}y)=-64{,}16$$
$$\text{d.h.}: 16(x^2+4{,}8x)+4(y^2-6y)=-64{,}16$$
$$16(x^2+4{,}8x+(\frac{4{,}8}{2})^2)+4(y^2-6y+(\frac{6}{2})^2)=-64{,}16+\frac{16\cdot 4{,}8}{2}{}^2+\frac{4\cdot 6}{2^2}$$
$$16(x+2{,}4)^2+4(y-3)^2=-64{,}16+(16\cdot 2{,}4^2)+(4\cdot 3^2)$$
$$16(x+2{,}4)^2+4(y-3)^2=64 \qquad |:64$$
$$16(x+2{,}4)^2+4(y-3)^2=1$$
$$\text{d.h.}:(x+\frac{2{,}4}{4})^2+(y-\frac{3}{16})^2=1$$
$$\Rightarrow (x+\frac{2{,}4}{4})^2+(y-\frac{3}{16})^2=1 \qquad \text{Elipse}$$
$$\text{Erinnerung:}$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$d.h.: Achsenparallel\ verschobene\ Elipse\ mit\ den\ Eigenschaften:$$
$$M=(2{,}4;3) \quad a=2 \quad ; \quad b=4$$



Bsp. 3)

Kegelschnittgleichung

$$4x^2-9y^2+16x+72y=164$$

Zu bestimmen ist die Art des Kegelschnitts, Lage und die hauptform :

$$1. Genau\ hinsehen: (Ordnen)$$
$$4x^2+16x-9y^2+72y=164$$
$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow$$
$$4 \cdot 4 \quad -9 \cdot -8 \quad = linear$$
$$da\ linear = verschobene\ Hyperbel$$

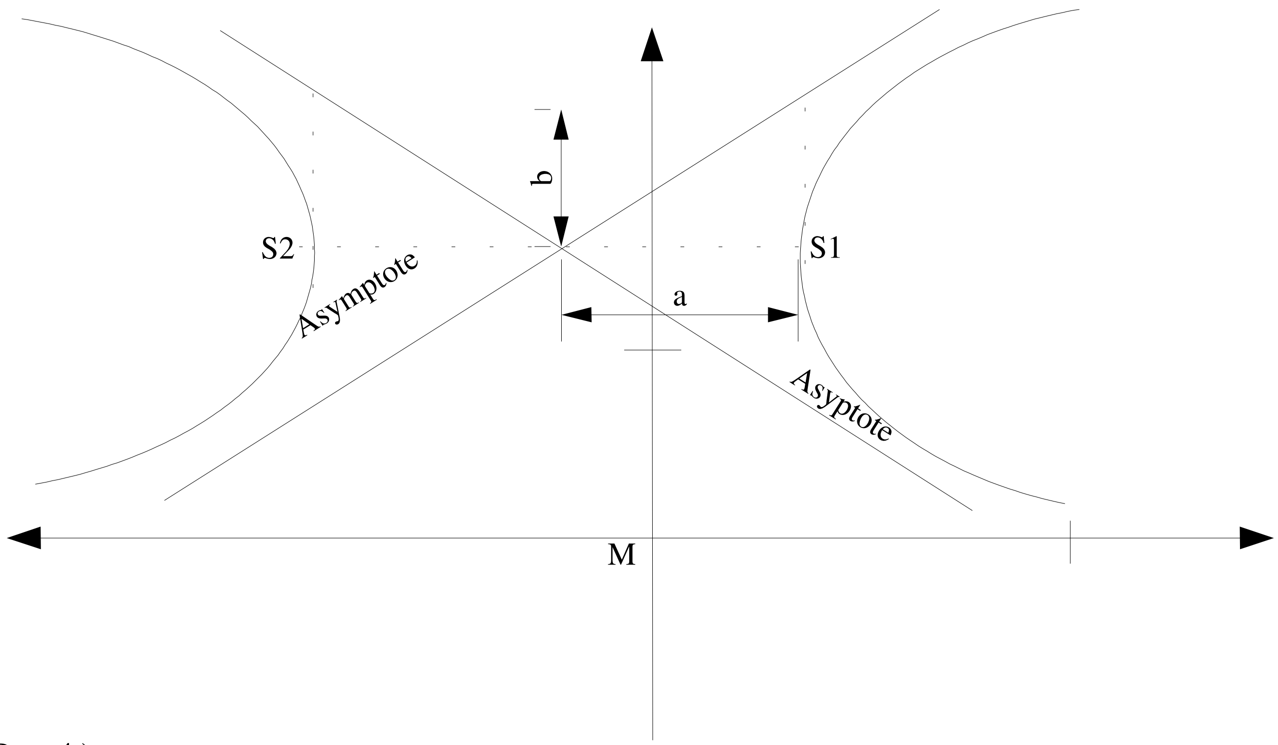
$$Faktoriesieren:$$
$$4(x^2+\frac{16}{4}x)-9(y^2-\frac{72}{9}y)=164$$
$$4(x^2+4x)-9(y^2-8y)=164$$
$$4(x^2+4x+\frac{4^2}{2})-9(y^2-8y+\frac{8^2}{2})=164+\frac{4\cdot4^2}{2}-\frac{9\cdot8^2}{2}$$
$$d.h.: \ 4(x+2)^2 - \frac{9(y-4)^2}{36}=1$$

Hinweis: Der ↑ minusoperator deutet auf eine Hyperbel hin!!!

$$Zusammenfassend:$$
$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4}=1$$

Daraus kann man ablesen: aus (x+2) und (y-4) folgt für den Mittelpunkt : M (-2 , 4)

Und aus $\frac{n}{9}$ und $\frac{m}{4}$ in $\sqrt{}$ für a und b: a = 3 und b = 2.



Bsp. 4)

Kegelschnittordnung : $y^2+2x+4y+10=0$

1.) *Ordnen :*

$2x+y^2+4y+10=0$

$da\ A=0 \qquad i\ A=x^2$

$und\ B\neq 0=1$

handelt es sich um eine Parabel

2.) *Sortieren :*

$y^2+4y=-2x-10$

3.) *Quadratische Ergänzung*

$$y^2+4y+\frac{4^2}{2}= \quad -2x-10+\frac{4^2}{2}$$

$d.h.:\ y^2+4y+2^2= \quad -2x-6$

$$(y+2)^2= \quad -2x-6 \quad \Rightarrow \quad -2(x-6+\frac{6}{2}) \ \Rightarrow \ -2(x+3)$$

$(y+2)^2= \ -2(x+3)$

nochmal :

$(y+2)^2= \quad -2(x+3)$

d.h. : Eine verschobene Parabel mit Hauptform zur Erinnerung :

$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$

$d.h.:\ 2p= \ -2 \qquad |:2$

$p= \ -1$

d.h. : $p<0$ *Parabel links offen.*

$Tipp: Der\ ungefähre\ Verlauf\ ist:$
$wenn\ S(0;0)\ und\ y^2=2px$
$P_{1,2}=(\frac{p}{2}i\pm p) \qquad P_{3,4}=(2Pi\pm 2p)$

$S=(-3;-2)$
$y=y_0\pm\sqrt{2p(x-x_0)} \qquad x\leqslant x_0$
$d.h.: nach\ oben:$
$y=-2+\sqrt{2\ \cdot\ -1\cdot(-3--3)}=-2$
$=-2+\sqrt{2\ \cdot\ -1\cdot(-4--3)}=-0{,}585$
$=-2+\sqrt{2\ \cdot\ -1\cdot(-5--3)}=0$

$nach\ unten:$
$y=-2-\sqrt{2\ \cdot-1(-3\ \cdot+-3)}=-2$
$=-2-\sqrt{2\ \cdot-1(-4\ \cdot\ -3)}=-3{,}414$
$=-2-\sqrt{2\ \cdot-1(-5\ \cdot\ -3)}=-4$